ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Рассматривается нелинейное эволюционное операторное уравнение второго рода $\varphi = \mathcal{F}\big[f[u]\varphi\big]$, $\varphi \in W[0;T] \subset L_q\big([0;T];X\big)$, в произвольном банаховом пространстве X, с эволюционными (вольтерровыми) операторами $\mathcal{F}\colon L_p\big([0;\tau];Y\big) \to W[0;T]$, $f[u]\colon W[0;T] \to L_p\big([0;T];Y\big)$ общего вида, Y — произвольное банахово пространство, $u \in \mathcal{D}$ — управляющий параметр. Для указанного уравнения доказываются теорема единственности решения, а также теорема о достаточных условиях тотально (по множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости при варьировании управления. При некоторых естественных предположениях, связанных с поточечными по времени t оценками, заключение об однозначной тотально глобальной разрешимости делается, исходя из факта глобальной разрешимости системы сравнения, в качестве которой выступает система функционально-интегральных неравенств (можно заменить ее системой уравнений аналогичного типа, а в некоторых случаях — системой обыкновенных дифференциальных уравнений) относительно функций одного переменного $t \in [0;T]$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}$. В качестве примера устанавливаются условия однозначной тотально глобальной разрешимости управляемой нелинейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное операторное уравнение второго рода, тотально глобальная разрешимость, система Навье–Стокса.

DOI: 10.35634/vm200107

Введение

Тотально глобальная разрешимость (ТГР) — это свойство управляемой системы (с распределенными или сосредоточенными параметрами) сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Ранее автором в аналогичном смысле использовался термин *тотальное сохранение глобальной разрешимости*, введенный в [1]. Нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части этого уравнения по фазовой переменной превышает линейный — см. примеры в [2, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [3, § 1], [4, введение, п. 2], [5]. Об актуальности проблемы сохранения глобальной разрешимости и истории вопроса см. подробные обзоры в [6,7]. Обзор [6] посвящен тем возможностям, которые в теории оптимального управления открывает свойство ТГР управляемых систем. Обзор в [7] касается, в основном, получения достаточных условий *устойчивости* (при «малом» возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) таких систем методом функциональных вольтерровых уравнений. Метод был предложен В. И. Суминым и развит в его работах и работах его учеников, в том числе совместных. Разносторонние обзоры по условиям УСГР содержатся в [8–10]. В [9] см. также обзор работ автора по условиям ТГР до 2014 г.

Ранее при исследовании ТГР управляемых распределенных систем автором применялся метод, основанный на их сведении к функционально-операторному (операторному) уравнению типа Гаммерштейна в банаховом идеальном (в частности, лебеговом) пространстве измеримых функций и его мажоризации, см., например, [1,11–13]. В [14] предложен подход, имеющий ряд принципиальных отличий: описание управляемой распределенной системы в виде эволюционного операторного уравнения первого рода с управляемым приращением в банаховом пространстве; применимость не только к полулинейным, но и к существенно нелинейным уравнениям; отказ от требований, аналогичных требованию изотонности линейного оператора правой части уравнения типа Гаммерштейна; использование задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения при мажоризации исследуемого абстрактного уравнения; использование пространства $\mathbf{C}([0;T];X)$, где X — некоторое банахово пространство, в качестве пространства решений. Подход [14] позволил исследовать операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, псевдопараболическое уравнение, систему уравнений Осколкова. Данная статья — результат существенного переосмысления работы [14].

Во-первых, результат [14] сформулирован для эволюционного операторного уравнения первого рода. Но в контексте изучаемой проблематики более естественно рассматривать эволюционное операторное уравнение второго рода. Поясним это на следующем простом примере. Пусть X — гильбертово пространство, $W[0;T] = \mathbf{C}_w\big([0;T];X\big)$ — пространство слабо непрерывных функций, $z \in Z[0;T] = L_2\big([0;T];X\big)$, $x_0 \in X$, $G\colon X \to X$ — инфинитезимальный производящий линейный оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \geqslant 0$. Многие линейные начально-краевые задачи сводятся к задаче Коши

$$x'(t) = (Gx)(t) + z(t), \quad t \in (0;T], \quad x(0) = x_0, \tag{0.1}$$

обладающей единственным слабым решением в $W[0;T]$ вида

$$x(t) = \theta(t) + A[z](t) = \mathcal{F}[z](t), \quad \theta(t) = S(t)x_0, \quad A[z](t) = \int_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0;T].$$

Для определенного таким образом оператора $\mathcal{F}\colon Z[0;T] \to W[0;T]$, фактически, той же формулой, но для $t \in [0;\tau]$ определяется естественное сужение на подотрезок, а именно, $\mathcal{F}_\tau : Z[0;\tau] \to W[0;\tau]$. И по свойствам интеграла Бохнера и свойству равномерной ограниченности сильно непрерывной полугруппы, при некотором $M > 0$ получаем:

$$\big\|\mathcal{F}[z](t)\big\|_X \leqslant \|\theta(t)\|_X + M\int_0^t \|z(s)\|_X\,ds, \quad t \in [0;T]. \tag{0.2}$$

Рассмотрим теперь управляемый полулинейный аналог задачи (0.1):

$$x'(t) = (Gx)(t) + f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in (0;T], \quad x(0) = x_0.$$

Решение здесь естественно понимать как решение операторного уравнения второго рода:

$$x = F[x], \quad F[x] \equiv \mathcal{F}\big[f(.,x,u)\big], \quad x \in W[0;T]. \tag{0.3}$$

А специальный вид оператора правой части $F[x] = \theta + A\big[f(.,x,u)\big]$, проистекающий из линейности задачи (0.1), позволяет называть его операторным уравнением типа Гаммерштейна. Между тем, в проведенных построениях задача (0.1) может быть и нелинейной (с нелинейным оператором G); важно только, чтобы для произвольно фиксированного $z \in Z[0;T]$ было определено решение $x \in W[0;T]$ (обозначим его $x = \mathcal{F}[z]$). Тогда аналогичным образом конструируется уравнение (0.3) с оператором $\mathcal{F}\colon Z[0;T] \to W[0;T]$.

Во-вторых, пространство $\mathbf{C}([0;T];X)$ может оказаться не подходящим на роль пространства $W[0;T]$ решений уравнения (см. пример выше: $W[0;T] = \mathbf{C}_w([0;T];X)$). Для приложений может также понадобиться оценка решения уравнения вида (0.3) по норме пространства $W[0;T] \neq \mathbf{C}([0;T];X)$; помимо поточечной (по $t \in [0;T]$) оценки решения могут потребоваться оценки его обобщенных производных.

В-третьих, априорные поточечные (при $t \in [0;T]$) оценки $\mathcal{F}[z]$ могут быть доступны не в виде (0.2) (см. [14]), а в виде функции от нормы пространства $L_p([0;t];Y)$, $t \in [0;T]$.

В-четвертых, в [14] не предусматривается, что правая часть управляемого уравнения может содержать, помимо функции состояния, ее обобщенные производные.

В данной статье для уравнения (0.3) с оператором $\mathcal{F}$ произвольного вида устанавливаются достаточные условия ТГР и единственности решения, а фактически, результаты [14] дорабатываются в соответствии со сделанными замечаниями. В качестве приложения в § 3 исследуется управляемая нелинейная нестационарная система уравнений Навье–Стокса, аналогичная рассмотренной в [15], но с тем отличием, что в функцию плотности внешних сил добавляется зависимость от управления и от состояния. Для указанной управляемой системы, при условии разрешимости на $[0;T]$ задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}$ (выступающей в качестве системы сравнения), устанавливаются: 1) однозначная ТГР; 2) поточечные по времени оценки нормы решения и его обобщенных производных первого порядка в соответствующих лебеговых пространствах; 3) равномерная оценка решений по норме соответствующего пространства Соболева. Результаты [14] здесь неприменимы.

Как и в [14], теорема о ТГР доказывается путем последовательного продолжения решения уравнения вдоль временной шкалы. Возможность продолжения решения основана на предположении о вольтерровости операторов $\mathcal{F}$ и f, определяющих правую часть уравнения, в духе А. Н. Тихонова [16]. Но при следующих отличиях: рассматриваются операторы, действующие в классах функций со значениями в банаховых пространствах; свойство вольтерровости относится не к отдельно взятому оператору, а к семейству операторов, каждый из которых действует в пространстве функций, определенных на своем подотрезке $[0;\tau] \subset [0;T]$. Эта конструкция представляется автору более удобной, так как позволяет не определять специально такой важный инструмент как естественное сужение вольтеррова оператора на подотрезок (преподнося его как отдельный оператор семейства) и не заботиться о том, чтобы сужение всякой функции из $W[0;T]$ на $[0;\tau] \subset [0;T]$ принадлежало пространству $W[0;\tau]$ (см. условие $\mathbf{G}_1$) далее).

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть X, Y, Y_i — вещественные банаховы пространства, $i = \overline{1,\ell}$; $T > 0$, $p, q, p_i \in [1,\infty)$ — заданные константы, $i = \overline{1,\ell}$; $L_p^+[0;T]$ — конус неотрицательных функций в пространстве $L_p[0;T]$; $W_0[0;T]$ — замкнутое множество в банаховом пространстве $W[0;T] \subset \subset L_q\big([0;T];X\big)$. Точнее говоря, мы предполагаем, что задана шкала банаховых пространств $W[0;\tau] \subset L_q\big([0;\tau];X\big)$ и соответственно, замкнутых подмножеств $W_0[0;\tau] \subset W[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$. В приложениях часто $W_0[0;T]$ — это совокупность функций из $W[0;T]$, которые удовлетворяют некоторому начальному условию, записанному в той или иной конкретной форме. Пусть, далее, задано семейство операторов $\mathcal{F}_\tau \colon L_p\big([0;\tau];Y\big) \to W_0[0;\tau]$, $\tau \in (0;T]$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, удовлетворяющее следующим условиям.

($\mathbf{G}_1$) (*вольтерровость*). Для любых $0 < \tau \leqslant \xi \leqslant T$, $z_\tau \in L_p\big([0;\tau];Y\big)$, $z_\xi \in L_p\big([0;\xi];Y\big)$, и образов $\varphi_\tau = \mathcal{F}_\tau z_\tau$, $\varphi_\xi = \mathcal{F}_\xi z_\xi$, из условия $z_\xi(t) = z_\tau(t)$ при п. в. $t \in [0;\tau]$, вытекает равенство $\varphi_\xi \Big|_{[0;\tau]} = \varphi_\tau$ в пространстве $W[0;\tau]$. Тем самым, $\forall\, z \in L_p\big([0;T];Y\big)$, $\tau \in (0;T]$ существует единственное решение уравнения: $\varphi = \mathcal{F}_\tau\big[z\,\big|_{[0;\tau]}\big]$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$. Указанное решение естественно понимать как локальное решение уравнения

$$\varphi = \mathcal{F}[z], \quad \varphi \in W_0[0;T]. \tag{1.1}$$

$(\mathbf{G}_2)$ Для каждого $\tau \in (0;T]$ определены линейные ограниченные операторы

$$D_{\tau,i}\colon W[0;\tau] \to L_{p_i}\big([0;\tau];Y_i\big), \quad i = \overline{1,\ell},$$

такие, что $\big\|(D_{\tau,i}\varphi)(t)\big\|_{Y_i} \leqslant \mathcal{N}_i\big(t, \|z\|_{L_p([0;t];Y)}\big) \in L_{p_i}[0;\tau]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\forall\, z \in L_p\big([0;\tau];Y\big)$, $\varphi = \mathcal{F}_\tau[z]$, где функции $\mathcal{N}_i(t,\omega)\colon [0;T]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ не убывают по ω.

$(\mathbf{G}_3)$ Для всех $0 \leqslant \tau < \xi \leqslant T$, $z_j \in L_p\big([0;\xi];Y\big)$, $\|z_j\|_{L_p([0;\xi];Y)} \leqslant \omega$, $z_1\Big|_{[0;\tau]} = z_2\Big|_{[0;\tau]}$ при $\tau > 0$, и $\varphi_j = \mathcal{F}_\xi[z_j]$, $j = 1,2$, имеем: $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W[0;\xi]} \leqslant \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(\xi-\tau)\|z_1 - z_2\|_{L_p([\tau;\xi];Y)}$, где $\mathcal{N}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая, $\alpha_0\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функции.

Теперь в правую часть уравнения (1.1) добавим зависимость от фазовой переменной и от управления. А именно, будем рассматривать управляемый аналог уравнения (1.1):

$$\varphi = \mathcal{F}\big[f[u](\varphi)\big], \quad \varphi \in W[0;T]. \tag{1.2}$$

Здесь $u \in U$ — управление из произвольного множества U, и предполагается, что для каждого $u \in U$ определен оператор $f[u] = f_T[u]$, соотнесенный с семейством операторов $f_\tau[u]\colon W[0;\tau] \to L_p\big([0;\tau];Y\big)$, $\tau \in (0;T]$, обладающим следующими свойствами.

$(\mathbf{F}_1)$ Для любых $\tau,\xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, и $\psi_\xi \in W[0;\xi]$, $\psi_\xi\Big|_{[0;\tau]} = \psi_\tau \in W[0;\tau]$, имеем:

$$f_\xi[u](\psi_\xi)(t) = f_\tau[u](\psi_\tau)(t) \text{ для п. в. } t \in [0;\tau].$$

$(\mathbf{F}_2)$ Для всех $\tau \in (0;T]$, $\psi \in W[0;\tau]$, $\big\|(D_{\tau,i}\psi)(.)\big\|_{Y_i} \leqslant M_i(.)$ п. в. на $[0;\tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, имеем:

$$\big\|f_\tau[u](\psi)(t)\big\|_Y \leqslant \mathcal{N}_0\big(t, M_1(t),\ldots,M_\ell(t)\big) \in L_p[0;T] \text{ для п. в. } t \in [0;\tau].$$

$(\mathbf{F}_3)$ Для всех $0 \leqslant \tau < \xi \leqslant T$, $\psi_1,\psi_2 \in W_0[0;\xi]$, $\big\|(D_{\xi,i}\psi_j)(t)\big\|_{Y_i} \leqslant M_i(t)$, п. в. $t \in [0;\xi]$, где $M_i \in L^+_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, $j = 1,2$, при некоторых $\widetilde{M}_i \in L^+_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, имеем:

$$\big\|f_\xi[u](\psi_1) - f_\xi[u](\psi_2)\big\|_{L_p([\tau;\xi];Y)} \leqslant \alpha_1(\xi-\tau)K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|M_i + \widetilde{M}_i\|_{L_{p_i}[\tau;\xi]}\big)\,\|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;\xi]},$$

где $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\alpha_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции.

$(\mathbf{F}_4)$ Существуют $\rho_i \in L_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, дающие решение системы сравнения вида: $\mathcal{N}_i\Big(t, \big\|\mathcal{N}_0(.,\rho_1,\ldots,\rho_\ell)\big\|_{L_p[0;t]}\Big) \leqslant \rho_i(t)$, для п. в. $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$ (ясно, что можно усилить это условие: «$\leqslant$» заменить на «$=$» или потребовать, чтобы $\rho_i = \rho \in \mathbf{AC}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{G}_1)$–$(\mathbf{G}_3)$, $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$, $\alpha_0(0)\alpha_1(0)K(0) = 0$. *Тогда, каково бы ни было* $u \in U$, *уравнение* (1.2) *не может иметь более одного решения.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{G}_1)$–$(\mathbf{G}_3)$, $(\mathbf{F}_1)$–$(\mathbf{F}_4)$, $\alpha_0(0)\alpha_1(0)K(0) = 0$. *Тогда* $\forall\, u \in U$ *уравнение* (1.2) *имеет единственное решение* $\varphi \in W[0;T]$. *Более того,* $\big\|(D_{T,i}\varphi)(t)\big\|_{Y_i} \leqslant \rho_i(t)$ *при п. в.* $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\big\|\varphi - \mathcal{F}[0]\big\|_{W[0;T]} \leqslant \mathcal{N}(\gamma)\alpha_0(T)\,\gamma$, *где* $\gamma = \big\|\mathcal{N}_0(.,\rho_1,\ldots,\rho_\ell)\big\|_{L_p[0;T]}$.

Доказательства теорем 1, 2 см. в § 2.

§ 2. Доказательство основных результатов

Для любых $\tau, \xi \in (0;T]$, $\tau \leqslant \xi$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\vec{M} = \{M_i\}_{i=\overline{1,\ell}}$, определим $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ как множество всех $\eta \in W_0[0;\xi]$ таких, что $\left\|(D_{\xi,i}\eta)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant M_i(t)$ для п. в. $t \in [0;\xi]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\inf\limits_{\psi} \|\psi - \eta\|_{W[0;\xi]} = 0$, где $\inf$ берется по всем $\psi \in W_0[0;\xi]$ таким, что $\left\|(D_{\xi,i}\psi)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant M_i(t)$, п. в. $t \in [0;\tau]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\psi \Big|_{[0;\tau]} = \varphi$ в пространстве $W[0;\tau]$.

Лемма 1. *Для любых $\tau, \xi \in (0;T]$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\vec{M} = \{M_i\}_{i=\overline{1,\ell}}$ множество $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ замкнуто в пространстве $W[0;\xi]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случаях $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi] = \varnothing$, а также конечного множества утверждение тривиально. Будем предполагать, что множество $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ бесконечно.

Пусть $\{\eta_m\} \subset \Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$, $\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;\xi]} \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку $W_0[0;\xi]$ замкнуто в $W[0;\xi]$, то $\eta_0 \in W_0[0;\xi]$. Зафиксируем произвольно индекс $i \in \overline{1,\ell}$. В силу ограниченности оператора $D_i = D_{\xi,i}$ получаем: $\left\|D_i(\eta_m - \eta_0)\right\|_{L_{p_i}([0;\xi];Y_i)} \leqslant c_i(\xi)\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;\xi]} \to 0$ при $m \to \infty$, следовательно, $\left\|D_i\eta_m - D_i\eta_0\right\|_{L_{p_i}([0;\xi];Y_i)} \to 0$ при $m \to \infty$;

$$\left\|(D_i\eta_0)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant \left\|(D_i\eta_m)(t)\right\|_{Y_i} + \left\|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant M_i(t) + \left\|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\right\|_{Y_i},$$

и по доказанному, последовательность $\left\|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\right\|_{Y_i} \to 0$ по норме $L_{p_i}[0;\xi]$, а стало быть, и по мере. По теореме Ф. Рисса найдется подпоследовательность, сходящаяся п. в. Поэтому, без ограничения общности рассуждений, $\left\|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\right\|_{Y_i} \to 0$ п. в. $t \in [0;\xi]$. Переходом к пределу при $m \to \infty$ получаем:

$$\left\|(D_i\eta_0)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant M_i(t) \quad \text{для п.в.}\, t \in [0;\xi], \quad i = \overline{1,\ell}. \tag{2.1}$$

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$ и найдем $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0;\xi]} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall\, m \geqslant m_\varepsilon$. По определению множества $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ найдется $\psi_\varepsilon \in W_0[0;\xi]$ такое, что

$$\left\|(D_i\psi_\varepsilon)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant M_i(t),\ t \in [0;\xi],\ i = \overline{1,\ell},\ \psi_\varepsilon \Big|_{[0;\tau]} = \varphi,\ \|\psi_\varepsilon - \eta_{m_\varepsilon}\|_{W[0;\xi]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим $\|\psi_\varepsilon - \eta_0\|_{W[0;\xi]} \leqslant \|\psi_\varepsilon - \eta_{m_\varepsilon}\|_{W[0;\xi]} + \|\eta_{m_\varepsilon} - \eta_0\|_{W[0;\xi]} < \varepsilon$. В силу (2.1), произвольности выбора $\varepsilon > 0$, и замкнутости $W_0[0;\xi]$ это означает, что $\eta_0 \in \Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$. *Тогда для всех τ, $\xi \in (0;T]$, $\varphi \in W_0[0;\tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$, $\vec{M} = \{M_i\}_{i=\overline{1,\ell}}$, и соответственно, $\psi_1, \psi_2 \in \Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$, имеем:*

$$\left\|f_\xi[u](\psi_1) - f_\xi[u](\psi_2)\right\|_{L_p\left([0;\tau];Y\right)} = 0 \text{ для всех } u \in U.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $u \in U$ и число $\varepsilon > 0$, и в соответствии с определением множества $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ найдем $\widetilde{\psi}_s \in W_0[0;\xi]$ такие, что

$$\left\|(D_i\widetilde{\psi}_s)(t)\right\|_{Y_i} \leqslant M_i(t) \text{ п. в. } t \in [0;\xi], \quad i = \overline{1,\ell}, \quad \widetilde{\psi}_s \Big|_{[0;\tau]} = \varphi,$$

$$\delta_s = \|\widetilde{\psi}_s - \psi_s\|_{W[0;\xi]} \leqslant 1, \quad \alpha_1(\xi)K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|M_i\|_{L_{p_i}[0;\xi]}\big)\delta_s \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad s = 1, 2.$$

Положим $f_\xi = f_\xi[u]$, $f_\tau = f_\tau[u]$. Пользуясь условиями $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$, имеем:

$$\big\|f_\xi(\psi_1)-f_\xi(\psi_2)\big\|_{L_p\left([0;\tau];Y\right)} \leqslant \big\|f_\xi(\widetilde{\psi}_1)-f_\xi(\widetilde{\psi}_2)\big\|_{L_p\left([0;\tau];Y\right)} + \sum_{s=1}^{2}\big\|f_\xi(\widetilde{\psi}_s)-f_\xi(\psi_s)\big\|_{L_p\left([0;\tau];Y\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \big\|f_\tau(\varphi)-f_\tau(\varphi)\big\|_{L_p\left([0;\tau];Y\right)} + \alpha_1(\xi)K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|M_i\|_{L_{p_i}[0;\xi]}\big)\sum_{s=1}^{2}\delta_s \leqslant \varepsilon.$$

Остается воспользоваться произвольностью выбора числа ε. □

Далее во избежание излишней громоздкости индекс τ в обозначениях $D_{\tau,i}$ и $f_\tau[u]$ будем опускать (его значение будет легко понять из контекста). Кроме того, будем считать, что в условии $(\mathbf{F}_3)$ $\widetilde{M}_i \equiv 0$, $i=\overline{1,\ell}$; соответствующие изменения в доказательствах для общего случая очевидны: свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега надо использовать не в отношении функций ρ_i, а в отношении суммы $\rho_i+\widetilde{M}_i$, $i=\overline{1,\ell}$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, от противного, что управлению $u\in U$ отвечают два решения $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ уравнения (1.2). Обозначим

$$f=f[u],\quad z_j=f(\varphi_j),\quad j=1,2,\quad \omega=\max_{j=1,2}\|z_j\|_{L_p([0;T];Y)},\quad \aleph_s=\max_{t\in[0;T]}\alpha_s(t),\quad s=0,1;$$

$$\mathcal{N}_\omega=\mathcal{N}(\omega),\quad \rho_i(t)=\mathcal{N}_i\big(t,\max_{j=1,2}\|z_j\|_{L_p([0;t];Y)}\big),\quad i=\overline{1,\ell}.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем: $\max\limits_{i=\overline{1,\ell}}\|\chi_h\rho_i\|_{L_{p_i}[0;T]}\to 0$ при $\operatorname{mes}h\to 0$, $h\subset[0;T]$. По условию $\alpha_0(0)\alpha_1(0)K(0)=0$. В случае $K(0)=0$ проведем следующее построение. По непрерывности $\lim\limits_{\tau\to+0}K(\tau)=0$. Тогда существует разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=T$: $\mathcal{N}_\omega\aleph_0\aleph_1K\big(\max\limits_{i=\overline{1,\ell}}\|\chi_h\rho_i\|_{L_{p_i}[0;T]}\big)\leqslant\dfrac{1}{2}$ $\forall h=[t_{j-1},t_j]$, $j=\overline{1,m}$. В случае $K(0)>0$ для непрерывной функции $\alpha=\alpha_0(\delta)\alpha_1(\delta)$ имеем: $\alpha(0)=0$. Поэтому найдется $\overline{\delta}>0$ такое, что $\mathcal{N}_\omega\alpha(\delta)K\big(\max\limits_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;T]}\big)\leqslant\dfrac{1}{2}$ для всех $\delta\in(0;\overline{\delta})$. Таким образом, в любом случае существует разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=T$ такое, что

$$\mathcal{N}_\omega\alpha(t_j-t_{j-1})K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[t_{j-1},t_j]}\big)\leqslant\frac{1}{2},\quad j=\overline{1,m}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим отрезок $[0;t_1]$. Определим функцию $\widetilde{z}_s\in L_p\big([0;t_1];Y\big)$ как сужение функции z_s на $[0;t_1]$, и положим $\widetilde{\varphi}_s=\mathcal{F}_{t_1}[\widetilde{z}_s]$, $s=1,2$. Согласно условию $(\mathbf{G}_1)$, $\varphi_s\Big|_{[0;t_1]}=\widetilde{\varphi}_s$ в пространстве $W[0;t_1]$, $s=1,2$. Таким образом, если мы докажем, что $\widetilde{\varphi}_1=\widetilde{\varphi}_2$ в пространстве $W[0;t_1]$, то это будет означать, что $\varphi_1\Big|_{[0;t_1]}=\varphi_2\Big|_{[0;t_1]}$ в пространстве $W[0;t_1]$.

Обозначим $\widetilde{\eta}=\widetilde{\varphi}_2-\widetilde{\varphi}_1$. Согласно условию $(\mathbf{G}_3)$, $\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_1]}\leqslant\mathcal{N}_\omega\alpha_0(t_1)\|\widetilde{z}_2-\widetilde{z}_1\|_{L_p([0;t_1];Y)}$, где по условию $(\mathbf{G}_2)$ $\big\|(D_i\widetilde{\varphi}_s)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\mathcal{N}_i\big(t,\max\limits_{j=1,2}\|z_s\|_{L_p([0;t];Y)}\big)=\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_1]$, $i=\overline{1,\ell}$, $s=1,2$. Теперь по условиям $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$

$$\|\widetilde{z}_2-\widetilde{z}_1\|_{L_p([0;t_1];Y)}=\big\|f(\widetilde{\varphi}_2)-f(\widetilde{\varphi}_1)\big\|_{L_p([0;t_1];Y)}\leqslant\alpha_1(t_1)K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;t_1]}\big)\,\|\widetilde{\varphi}_2-\widetilde{\varphi}_1\|_{W[0;t_1]}.$$

И в силу выбора разбиения, $\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_1]}\leqslant\dfrac{1}{2}\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_1]}$, то есть $\dfrac{1}{2}\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_1]}\leqslant 0$.

Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали, что $\varphi_1\big|_{[0;t_{j-1}]}=\varphi_2\big|_{[0;t_{j-1}]}$ в пространстве $W[0;t_{j-1}]$, $j\in\overline{2,m}$. Исходя из этого, докажем, что $\varphi_1\big|_{[0;t_j]}=\varphi_2\big|_{[0;t_j]}$ в пространстве $W[0;t_j]$. Определим функцию $\widetilde{z}_s\in L_p\big([0;t_j];Y\big)$ как сужение функции z_s на $[0;t_j]$, и положим $\widetilde{\varphi}_s=\mathcal{F}_{t_j}[\widetilde{z}_s]$, $s=1,2$. Согласно условию $(\mathbf{G}_1)$, $\varphi_s\Big|_{[0;t_j]}=\widetilde{\varphi}_s$ в пространстве $W[0;t_j]$, $s=1,2$. Таким образом, если мы докажем, что $\widetilde{\varphi}_1=\widetilde{\varphi}_2$ в пространстве $W[0;t_j]$, то это будет означать, что $\varphi_1\Big|_{[0;t_j]}=\varphi_2\Big|_{[0;t_j]}$ в пространстве $W[0;t_j]$.

Обозначим $\widetilde{\eta}=\widetilde{\varphi}_2-\widetilde{\varphi}_1$. По условию $(\mathbf{F}_1)$ (с учетом предположения индукции),

$$\widetilde{z}_1\big|_{[0;t_{j-1}]}=f(\varphi_1\Big|_{[0;t_{j-1}]})=f(\varphi_2\Big|_{[0;t_{j-1}]})=\widetilde{z}_2\big|_{[0;t_{j-1}]}.$$

Поэтому согласно условию $(\mathbf{G}_3)$ $\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_j]}\leqslant\mathcal{N}_\omega\alpha_0(t_j-t_{j-1})\|\widetilde{z}_2-\widetilde{z}_1\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)}$, где по условию $(\mathbf{G}_2)$ $\big\|(D_i\widetilde{\varphi}_s)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\mathcal{N}_i\big(t,\max\limits_{j=1,2}\|z_s\|_{L_p([0;t];Y)}\big)=\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_j]$, $i=\overline{1,\ell}$, $s=1,2$. Теперь по условиям $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$, $\|\widetilde{z}_2-\widetilde{z}_1\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)}=\big\|f(\widetilde{\varphi}_2)-f(\widetilde{\varphi}_1)\big\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)}$, $\big\|f(\widetilde{\varphi}_2)-f(\widetilde{\varphi}_1)\big\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)}\leqslant\alpha_1(t_j-t_{j-1})K\big(\max\limits_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[t_{j-1};t_j]}\big)\,\|\widetilde{\varphi}_2-\widetilde{\varphi}_1\|_{W[0;t_j]}$.

И в силу выбора разбиения, $\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_j]}\leqslant\dfrac{1}{2}\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_j]}$, то есть $\dfrac{1}{2}\|\widetilde{\eta}\|_{W[0;t_j]}\leqslant 0$. По индукции, делаем вывод, что $\varphi_1=\varphi_2$ в пространстве $W[0;T]$. □

Доказательство теоремы 2. Основываясь на функциях, заданных условиями $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_4)$, определим функцию $\widetilde{\mathcal{N}}_0\in L_p[0;T]$ формулой $\widetilde{\mathcal{N}}_0(t)=\mathcal{N}_0\big(t,\rho_1(t),\ldots,\rho_\ell(t)\big)$, $t\in[0;T]$. Обозначим $\omega=\|\widetilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0;T]}$, $\mathcal{N}_\omega=\mathcal{N}(\omega)$. Повторяя дословно соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, заключаем, что существует разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=T$ такое, что выполнено (2.2). Зафиксируем любое $u\in U$ и обозначим для краткости $f=f[u]$. Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (1.2):

$$\varphi(t)=\mathcal{F}_{t_j}\big[f(\varphi)\big](t),\quad t\in[0;t_j].\qquad(\mathcal{E}_j).$$

Разрешимость уравнений $(\mathcal{E}_j)$ в пространствах $W[0;t_j]$ установим индукцией по $j=\overline{1,m}$.

1. Докажем существование функции $\varphi=\varphi_1\in W_0[0;t_1]$, решающей уравнение $(\mathcal{E}_1)$ и такой, что $\big\|(D_i\varphi_1)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_1]$, $i=\overline{1,\ell}$. Определим Ψ_1 как множество всех $\psi\in W_0[0;t_1]$ таких, что $\big\|(D_i\psi)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_1]$, $i=\overline{1,\ell}$.

а) Покажем, что $\Psi_1\neq\varnothing$. Положим $\eta=\mathcal{F}_{t_1}[0]\in W_0[0;t_1]$. По условиям $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_4)$,

$$\big\|(D_i\eta)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\mathcal{N}_i(t,0)\leqslant\mathcal{N}_i\big(t,\widetilde{\mathcal{N}}_0(t)\big)\leqslant\rho_i(t)\quad\text{для п. в. } t\in[0;t_1],\quad i=\overline{1,\ell}\quad\Rightarrow\quad\eta\in\Psi_1.$$

б) Как показано при доказательстве леммы 1, множество Ψ_1 замкнуто в $W[0;t_1]$.

в) Определим оператор $F_1\colon\Psi_1\to W_0[0;t_1]$ формулой $\eta=F_1[\varphi]=\mathcal{F}_{t_1}[z]$, где $z=f(\varphi)$, $\varphi\in\Psi_1$. По условию $(\mathbf{F}_2)$ $\big\|z(t)\big\|_Y=\big\|f[\varphi](t)\big\|_Y\leqslant\widetilde{\mathcal{N}}_0(t)$ для п. в. $t\in[0;t_1]$. По условию $(\mathbf{G}_2)$,

$$\big\|(D_i\eta)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\left\{\int_0^t\big\|z(\tau)\big\|_Y^p\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\left\{\int_0^t\big(\widetilde{\mathcal{N}}_0(\tau)\big)^p\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\right).$$

Отсюда, в силу $(\mathbf{F}_4)$, $\big\|(D_i\eta)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_1]$, $i=\overline{1,\ell}$, то есть $F_1\colon\Psi_1\to\Psi_1$.

г) Докажем, что оператор F_1 является сжимающим на множестве Ψ_1. Выберем любые ψ_1, $\psi_2\in\Psi_1$ и положим $z_s=f(\psi_s)(t)$, $t\in[0;t_1]$, $\eta_s=F_1[\psi_s]=\mathcal{F}_{t_1}[z_s]$, $s=1,2$. В силу $(\mathbf{F}_2)$

$$\big\|z_s(t)\big\|_Y=\big\|f[\psi_s](t)\big\|_Y\leqslant\widetilde{\mathcal{N}}_0(t),\quad t\in[0;t_1]\ \Rightarrow\ \|z_s\|_{L_p([0;t_1];Y)}\leqslant\omega,\quad s=1,2.$$

По условию $(\mathbf{G}_3)$ $\|\eta_1-\eta_2\|_{W[0;t_1]}\leqslant\mathcal{N}_\omega\alpha_0(t_1)\,\|z_1-z_2\|_{L_p([0;t_1];Y)}$, где, согласно условию $(\mathbf{F}_3)$

$$\|z_1-z_2\|_{L_p([0;t_1];Y)}=\|f(\psi_1)-f(\psi_2)\|_{L_p([0;t_1];Y)}\leqslant\alpha_1(t_1)K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;t_1]}\right)\,\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_1]}.$$

И в силу выбора разбиения, $\|\eta_1-\eta_2\|_{W[0;t_1]}\leqslant\dfrac{1}{2}\,\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_1]}$.

д) Согласно принципу сжимающих отображений, заключаем, что уравнение $(\mathcal{E}_1)$ имеет единственное решение φ_1 в множестве Ψ_1.

2. Действуя по индукции, предположим, что мы уже доказали существование решения $\varphi_{j-1}\in W_0[0;t_{j-1}]$ уравнения $(\mathcal{E}_{j-1})$ и оценки $\big\|(D_i\varphi_{j-1})(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_{j-1}]$, $i=\overline{1,\ell}$. Исходя из этого, докажем существование решения $\varphi_j\in W_0[0;t_j]$ уравнения $(\mathcal{E}_j)$, удовлетворяющего оценкам $\big\|(D_i\varphi_j)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)$ для п. в. $t\in[0;t_j]$, $i=\overline{1,\ell}$. Определим множество $\Psi_j=\Phi[t_j,\vec{\rho},\varphi_{j-1}]$.

а) Покажем, что $\Psi_j\neq\varnothing$. Положим $z(t)=\big\{f(\varphi_{j-1})(t),\ t\in[0;t_{j-1}];\ 0,\ t\in[t_{j-1};t_j]\big\}$, $\psi=\mathcal{F}_{t_j}[z]\in W_0[0;t_j]$. Тогда, согласно условию $(\mathbf{G}_1)$, имеем:

$$\psi\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=\mathcal{F}_{t_{j-1}}\Big[z\,\big|_{[0;t_{j-1}]}\Big]=\mathcal{F}_{t_{j-1}}\big[f(\varphi_{j-1})\big]=\varphi_{j-1}. \tag{2.3}$$

По условиям $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_2)$, предположению индукции, $(\mathbf{F}_4)$ при п. в. $t\in[0;t_{j-1}]$ имеем:

$$\big\|(D_i\psi)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\|f(\varphi_{j-1})\|_{L_p([0;t];Y)}\right)\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\left\{\int_0^t\widetilde{\mathcal{N}}_0^p(\tau)\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant\rho_i(t),\quad i=\overline{1,\ell}.$$

Аналогично, при п. в. $t\in[t_{j-1};t_j]$ имеем:

$$\big\|(D_i\psi)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\|z\|_{L_p([0;t_{j-1}];Y)}\right)=\mathcal{N}_i\left(t,\|f(\varphi_{j-1})\|_{L_p([0;t_{j-1}];Y)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\left\{\int_0^{t_{j-1}}\widetilde{\mathcal{N}}_0^p(\tau)\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant\mathcal{N}_i\left(t,\left\{\int_0^{t}\widetilde{\mathcal{N}}_0^p(\tau)\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant\rho_i(t),\ i=\overline{1,\ell}.$$

Отсюда, с учетом (2.3), получаем, что $\psi\in\Psi_j$.

б) Замкнутость множества Ψ_j в $W[0;t_j]$ следует непосредственно из леммы 1.

в) Определим оператор $F_j\colon\Psi_j\to W_0[0;t_j]$ формулой $\eta=F_j[\varphi]=\mathcal{F}_{t_j}[z]$, где $z=f(\varphi)$, $\varphi\in\Psi_j$. Покажем, что $\eta\in\Psi_j$. Совершенно аналогично пункту 1, в),

$$\big\|(D_i\eta)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)\quad\text{для п. в. }t\in[0;t_j],\quad i=\overline{1,\ell}. \tag{2.4}$$

Выберем любое $\xi>0$. Поскольку $\varphi\in\Phi[t_j,\vec{\rho},\varphi_{j-1}]$, найдется $\psi_\xi\in W_0[0;t_j]$ такой, что

$$\big\|(D_i\psi_\xi)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)\quad\text{для п. в. }t\in[0;t_j],\quad i=\overline{1,\ell},$$

$$\psi_\xi\,\Big|_{[0;t_{j-1}]}=\varphi_{j-1},\ \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(t_j)\alpha_1(t_j)K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;t_j]}\big)\,\|\psi_\xi-\varphi\|_{W[0;t_j]}\leqslant\xi.$$

Пусть $\eta_\xi=F_j[\psi_\xi]=\mathcal{F}_{t_j}[\zeta_\xi]$, $\zeta_\xi=f(\psi_\xi)$. Ясно, что $\psi_\xi\in\Phi[t_j,\vec{\rho},\varphi_{j-1}]$, и аналогично (2.4),

$$\big\|(D_i\eta_\xi)(t)\big\|_{Y_i}\leqslant\rho_i(t)\quad\text{для п.в. }t\in[0;t_j],\quad i=\overline{1,\ell}. \tag{2.5}$$

Учитывая, что $z=f(\varphi)$, $\zeta_\xi=f(\psi_\xi)$ и пользуясь условием $(\mathbf{F}_2)$, оценим

$$\|z\|_{L_p\left([0;t_j];Y\right)}\leqslant\|\widetilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0;t_j]}\leqslant\omega;\quad\|\zeta_\xi\|_{L_p\left([0;t_j];Y\right)}\leqslant\|\widetilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0;t_j]}\leqslant\omega.$$

Согласно условиям $(\mathbf{G}_1)$, $(\mathbf{F}_1)$

$$\eta_\xi\Big|_{[0;t_{j-1}]} = \mathcal{F}_{t_{j-1}}\big[\zeta_\xi\big|_{[0;t_{j-1}]}\big] = \mathcal{F}_{t_{j-1}}\big[f(\varphi_{j-1})\big] = \varphi_{j-1}. \tag{2.6}$$

При этом по условиям $(\mathbf{G}_3)$, $(\mathbf{F}_3)$, и учитывая, что φ, $\psi_\xi \in \Phi[t_j,\vec{\rho},\varphi_{j-1}]$,

$$\|\eta-\eta_\xi\|_{W[0;t_j]} = \big\|\mathcal{F}_{t_j}[z]-\mathcal{F}_{t_j}[\zeta_\xi]\big\| \leqslant \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(t_j)\big\|f(\varphi)-f(\psi_\xi)\big\|_{L_p\left([0;t_j];Y\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(t_j)\alpha_1(t_j)K\big(\max_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;t_j]}\big)\,\|\varphi-\psi_\xi\|_{W[0;t_j]} < \xi.$$

В силу произвольности выбора числа $\xi > 0$, отсюда, с учетом (2.4)–(2.6), получаем, что $\eta \in \Phi[t_j,\vec{\rho},\varphi_{j-1}] = \Psi_j$. Таким образом, $F_j\colon \Psi_j \to \Psi_j$.

г) Докажем, что оператор F_j — сжимающий на множестве Ψ_j. Выберем любые ψ_1, $\psi_2 \in \Psi_j$ и положим $z_s = f(\psi_s)(t)$, $t \in [0;t_j]$, $\eta_s = F_j[\psi_s] = \mathcal{F}_{t_j}[z_s]$, $s = 1,2$. Подобно тому, как это было сделано для оценки z в пункте 2, в), получаем: $\|z_s\|_{L_p([0;t_j];Y)} \leqslant \omega$, $s = 1,2$. По лемме 2 и условию $(\mathbf{F}_1)$, $z_1\big|_{[0;t_{j-1}]} = f(\psi_1)\Big|_{[0;t_{j-1}]} = f(\psi_2)\Big|_{[0;t_{j-1}]} = z_2\big|_{[0;t_{j-1}]}$. Поэтому согласно условию $(\mathbf{G}_3)$ $\|\eta_1-\eta_2\|_{W[0;t_j]} \leqslant \mathcal{N}_\omega\alpha_0(t_j-t_{j-1})\,\|z_1-z_2\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)}$, где по условию $(\mathbf{F}_3)$ $\|z_1-z_2\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)} \leqslant \alpha_1(t_j-t_{j-1})K\left(\max\limits_{i=\overline{1,\ell}}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[t_{j-1};t_j]}\right)\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_j]}$. И в силу выбора разбиения, $\|\eta_1-\eta_2\|_{W[0;t_j]} \leqslant \dfrac{1}{2}\,\|\psi_1-\psi_2\|_{W[0;t_j]}$.

д) По принципу сжимающих отображений, уравнение $(\mathcal{E}_j)$ имеет решение $\varphi_j \in \Psi_j$.

3. По индукции, аналогичное утверждение справедливо и при $j = m$, т. е. уравнение (1.2) имеет решение $\varphi \in W_0[0;T]$ такое, что $\big\|(D_i\varphi)(t)\big\|_{Y_i} \leqslant \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0;T]$, $i = \overline{1,\ell}$. Отсюда, в силу $(\mathbf{G}_3)$, $(\mathbf{F}_2)$, $\big\|\varphi-\mathcal{F}[0]\big\|_{W[0;T]} \leqslant \mathcal{N}(\gamma)\alpha_0(T)\,\gamma$, $\gamma = \omega = \|\widetilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0;T]}$.

Единственность решения в пространстве $W[0;T]$ следует из теоремы 1. $\square$

§ 3. Пример: начально-краевая задача для системы Навье–Стокса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega = S \in \mathbb{C}^2$, $T > 0$, $p,r \geqslant 1$, $Q_T = \Omega\times[0;T]$. Помимо пространств Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(Q_T)$ и анизотропных пространств Лебега $L_{p,r}(Q_T) = L_r\big([0;T];L_p(\Omega)\big)$ с нормами $\|.\|_{p,Q_T} = \|.\|_{L_p(Q_T)}$, $\|.\|_{p,r,Q_T} = \|.\|_{L_{p,r}(Q_T)}$, следуя [15], будем использовать следующие пространства (в [15] обозначения $L_p^3(\Omega)$ — пространство вектор-функций и $L_p(\Omega)$ — пространство скалярных функций не различаются; мы тоже будем использовать это соглашение):

(1) пространство Соболева $W[0;T] = W_p^{2,1}(Q_T)$, $\|\varphi\|_{W[0;T]} = \sum\limits_{|\mu|\leqslant 2}\|\partial^\mu\varphi\|_{p,Q_T} + \|\partial_t\varphi\|_{p,Q_T}$, где $\mu = (\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ — мультииндекс, $|\mu| = \sum\limits_{i=1}^{3}\mu_i$, $\partial^\mu\varphi = \dfrac{\partial^{|\mu|}\varphi}{\partial x_1^{\mu_1}\partial x_2^{\mu_2}\partial x_3^{\mu_3}}$, $\partial_t\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$;

(2) $\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ — замыкание множества гладких финитных соленоидальных векторов в норме пространства $W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ (см. [15, с. 177]); эквивалентной нормой в пространстве $\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ является $|||\varphi|||_{p,\Omega} = \inf\limits_{\psi}\|\psi\|_{W[0;1]}$, где inf берется по всем продолжениям $\psi(x,t)$ (которые, как устанавливается, всегда существуют) вектора $\varphi(x)$ на множество Q_1;

(3) классы $G_p(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ — см. [15, с. 161]; всякий гладкий финитный вектор $f(x)$ можно представить в виде суммы двух ортогональных в $L_2(\Omega)$ слагаемых:

$$f(x) = \nabla\varphi(x) + g(x),\ \text{где}\ \nabla\cdot g = 0,\ g\cdot n(x)\Big|_S = 0;\ \Delta\varphi = \nabla\cdot f(x),\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = f\cdot n\Big|_S; \tag{3.1}$$

$$(\nabla\varphi, \nabla\Phi) = (f, \nabla\Phi), \quad (g, \nabla\Phi) = 0 \quad \forall\,\nabla\Phi \in L_{p'}(\Omega), \tag{3.2}$$

где $n(x)$ — вектор внешней нормали, $(\varphi,\psi) = \displaystyle\int_\Omega \varphi\cdot\psi\,dx = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \varphi_i(x)\psi_i(x)\,dx$; соответственно, через $G_p(\Omega)$ обозначается множество всех $\nabla\varphi \in L_p(\Omega)$, а через $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ — множество всех векторов $g \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющих тождеству (3.2);

(4) классы $G_p(Q_T)$ и $\overset{\circ}{J}_p(Q_T)$ — подпространства $L_p(Q_T)$, состоящие из векторов, при п. в. $t \in [0;T]$ принадлежащих $G_p(\Omega)$ и $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, соответственно; соотношение (3.1) означает, что $L_p(\Omega) = G_p(\Omega) \oplus \overset{\circ}{J}_p(\Omega)$, $L_p(Q_T) = G_p(Q_T) \oplus \overset{\circ}{J}_p(Q_T)$; следуя [15], определим операторы проектирования $P_G\colon L_p(Q_T) \to G_p(Q_T)$, $P_J\colon L_p(Q_T) \to \overset{\circ}{J}_p(Q_T)$;

(5) класс $J_p(Q_T)$ — пространство всех соленоидальных векторов из $W[0;T]$, которые обращаются в ноль на S; аналогично, $J_p(\Omega)$ — пространство всех соленоидальных векторов из $W_p^2(\Omega)$, которые обращаются в ноль на $\partial\Omega$.

Прежде всего, следуя [15], рассмотрим линеаризованную систему Навье–Стокса:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + a(x,t)\varphi + \sum_{k=1}^{3} a_k(x,t)\varphi_{x_k} + \nabla\mathcal{P} = z(x,t),\ x\in\Omega,\ t\in[0;T], \tag{3.3}$$

$$\nabla\cdot\varphi = 0,\ \text{то есть}\ \operatorname{div}\varphi = 0; \quad \varphi\Big|_{x\in S} = 0, \quad t\in[0;T]; \quad \varphi\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x\in\Omega. \tag{3.4}$$

Здесь $\varphi(x,t) = \big(\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t), \varphi_3(x,t)\big)$ — поле скоростей жидкости, $\mathcal{P}(x,t)$ — давление, φ, $\mathcal{P}$ — неизвестные; $a(x,t)$, $a_k(x,t)$ — заданные матрицы такие, что
$\|a\|_{s,\sigma,Q_T} + \sum\limits_{j=1}^{3} \|a_j\|_{s_1,\sigma_1,Q_T} \leqslant M$, $\|a\|_{s,\sigma,Q_T} = \max\limits_{k,m} \|a^{k,m}\|_{s,\sigma,Q_T}$, $\dfrac{3}{2s} + \dfrac{1}{\sigma} < 1$, $\dfrac{3}{2s_1} + \dfrac{1}{\sigma_1} < \dfrac{1}{2}$;
$z = (z_1, z_2, z_3) \in L_p(Q_T)$ — плотность внешних сил, ν — коэффициент вязкости.

Решение задачи (3.3)–(3.4) понимается как пара $(\varphi, \nabla\mathcal{P}) \in J_p(Q_T) \times G_p(Q_T)$, удовлетворяющая при заданных $z \in L_p(Q_T)$, $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ равенству (3.3) в пространстве $L_p(Q_T)$ (поскольку все входящие в уравнение производные существуют как обобщенные, то это достаточно очевидно и в [15] специально не оговаривается), а также начальному условию в смысле: $|||\varphi(.,0) - \varphi_0|||_{p,\Omega} = 0$. При заданной функции $\varphi \in J_p(Q_T)$ функция $\nabla\mathcal{P}$ определяется непосредственно из исходного уравнения. В свою очередь, см. [15, § 5], функция φ при заданном $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ может быть найдена как решение задачи Коши для операторного дифференциального уравнения в пространстве $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi = P_J z, \quad \varphi(s) = \varphi_0; \tag{3.5}$$

где $s=0$, $A(t)\varphi=-\nu P_J\Delta\varphi+P_J\mathcal{R}\varphi$ — оператор с плотной в $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ областью определения $J_p(\Omega)$; $\mathcal{R}\varphi=\sum\limits_{i=1}^{3}a_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}+a\varphi$, $\varphi\in J_p(Q_T)$. Решение дается формулой [15, (5.5)]

$$\varphi(t)=S(t,0)\varphi_0+\int_0^t S(t,s)P_Jz(s)\,ds,\quad t\in[0;T]. \tag{3.6}$$

Здесь $S(t,s)$ — оператор с областью определения $J_p(Q_T)$, сопоставляющий вектору $\varphi_0\in\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ решение задачи Коши для уравнения (3.5) при $z=0$.

Справедливо следующее утверждение [15, теорема 4.2, с. 177; следствие 2, с. 179; § 5].

Лемма 3. *При сделанных предположениях для всех $z\in L_p(Q_T)$, $\varphi_0\in\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ задача (3.3)–(3.4) имеет единственное решение $\varphi\in W[0;T]$, $\nabla\mathcal{P}\in L_p(Q_T)$, и более того,*

$$\|\varphi\|_{W[0;T]}+\|\nabla\mathcal{P}\|_{p,Q_T}\leqslant C_1\big(1+e^{\gamma T}\big)\big\{|||\varphi_0|||_{p,\Omega}+\|z\|_{p,Q_T}\big\},$$

где константы C_1, $\gamma>0$ не зависят от T, φ_0, z.

Из утверждения и доказательства теоремы 2.1 из [15, с. 156] и доказательства леммы 10.1 из [15, с. 221] очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\varphi\in W[0;T]$. Если $q,r\geqslant p>1$ таковы, что $\lambda=1-\dfrac{5}{2p}+\dfrac{3}{2q}+\dfrac{1}{r}\geqslant 0$ (при $p=\infty$ или $r=\infty$ неравенства предполагаются строгими), то имеем:*

$$\|\varphi_i\|_{q,r,Q_T}\leqslant c\big\{\|\varphi\|_{W[0;T]}+|||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\|\varphi_i(.,t)\|_{q,\Omega}&\leqslant c\int_{-1}^{t}\alpha(t,\tau)\mathcal{A}[\widetilde{\varphi}_i](\tau)\,d\tau\leqslant\\&\leqslant c\int_0^t\alpha(t,\tau)\mathcal{A}[\varphi_i](\tau)\,d\tau+c\int_{-1}^{0}\alpha(t,\tau)\mathcal{A}[\widetilde{\varphi}_i](\tau)\,d\tau,\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\alpha(t,\tau)=(t-\tau)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$, $\mathcal{A}[\varphi_i](t)=\left\|\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}(.,t)\right\|_{p,\Omega}+\sum\limits_{|\mu|=2}\|\partial^\mu\varphi_i(.,t)\|_{p,\Omega}$, $i=\overline{1,3}$, константа c не зависит от T, φ (зависит от Ω); $\widetilde{\varphi}(x,t)$ — произвольное продолжение функции $\varphi(x,t)$ на $\Omega\times[-1;T]$. Аналогичные утверждения справедливы при замене λ на $\lambda_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2p}+\dfrac{3}{2q}+\dfrac{1}{r}$ и $\|\varphi_i\|_{q,r,Q_T}$, $\|\varphi_i(.,t)\|_{q,\Omega}$ на $\sum\limits_{i=1}^{3}\|\varphi_{x_i}\|_{q,r,Q_T}$, $\sum\limits_{i=1}^{3}\|\varphi_{x_i}(.,t)\|_{q,\Omega}$.

Лемма 5. *Предположим, что при условиях леммы 4 выполняется оценка*

$$1-\frac{5}{2p}+\frac{3}{2q}>0 \tag{3.9}$$

вместо неравенства $\lambda\geqslant 0$. Тогда оценка (3.8) может быть преобразована к виду:

$$\|\varphi(.,t)\|_{q,\Omega}\leqslant\widetilde{c}\big\{\|\varphi\|_{W[0;t]}+|||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\}\ \textit{п. в. } t\in[0;T],\quad \widetilde{c}\textit{ не зависит от } t,\ \varphi. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом неравенства Гёльдера,

$$\int_0^t \alpha(t,\tau)\mathcal{A}[\varphi_i](\tau)\,d\tau \leqslant \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)p'}\,d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t \left\{\mathcal{A}[\varphi_i](\tau)\right\}^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_0\|\varphi\|_{W[0;t]},$$

$i=\overline{1,3}$. Здесь в силу (3.9), $p(\lambda r-1)>0$, то есть $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)p'+1>0$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$. Дальнейшее очевидно. □

Непосредственно из лемм 4, 5 вытекает следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть $\varphi\in W[0;T]$, числа $r,r_1\in[1;+\infty]$ — произвольны, $q,q_1\geqslant p>1$ таковы, что выполняются условия* (3.9), $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2p}+\dfrac{3}{2q_1}>0$. *Тогда имеем: $\varphi\in L_{q,r}(Q_T)$, $\varphi_{x_i}\in L_{q_1,r_1}(Q_T)$, $i=\overline{1,3}$, и при п. в. $t\in[0;T]$ справедливы оценки* (3.10) *и*

$$\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_{x_i}(.,t)\|_{q_1,\Omega}\leqslant\widetilde{c}\big\{\|\varphi\|_{W[0;t]}+|||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\},\ \widetilde{c}\ \textit{не зависит от}\ t,\ \varphi\ (\textit{зависит от}\ \Omega).$$

Непосредственно из лемм 3, 6 вытекает следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть числа q_1, $q_2\geqslant p>1$ таковы, что $1-\dfrac{5}{2p}+\dfrac{3}{2q_1}>0$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2p}+\dfrac{3}{2q_2}>0$; r_1, $r_2\in[1;+\infty]$ — произвольные. При сделанных предположениях для каждой пары $z\in L_p(Q_T)$, $\varphi_0\in\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ задача* (3.3)–(3.4) *имеет единственное решение $\varphi\in W[0;T]$, $\nabla\mathcal{P}\in L_p(Q_T)$, и для п. в. $t\in[0;T]$ справедливы оценки*

$$\|\varphi(.,t)\|_{q_1,\Omega}\leqslant C_2\big\{|||\varphi_0|||_{p,\Omega}+\|z\|_{p,Q_t}\big\},\qquad \sum_{i=1}^{3}\|\varphi_{x_i}(.,t)\|_{q_2,\Omega}\leqslant C_2\big\{|||\varphi_0|||_{p,\Omega}+\|z\|_{p,Q_t}\big\},$$

с левыми частями из $L_{r_1}[0;T]$, $L_{r_2}[0;T]$, соответственно; C_2 не зависит от t, φ_0, z.

Пусть $\tau\in(0;T]$, $\varphi_0\in\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ — произвольно фиксированы. Обозначим $Y=L_p(\Omega)$; $W_0[0;\tau]$ — множество всех $\varphi\in W[0;\tau]$ таких, что $|||\varphi(.,0)-\varphi_0|||_{p,\Omega}=0$. Ясно, что $L_p(Q_\tau)=L_p\big([0;\tau];Y\big)$. Числа q_1,r_1,q_2,r_2 считаем выбранными так, как указано в лемме 7. Оператор $\mathcal{F}_\tau\colon L_p(Q_\tau)\to W_0[0;\tau]$ определим следующим образом. Считая функцию $\varphi_0\in\overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ фиксированной и пользуясь леммой 3, по заданному $z\in L_p(Q_\tau)$ находим пару $\varphi\in W_0[0;\tau]$ и $\nabla\mathcal{P}\in L_p(Q_\tau)$ как решение задачи (3.3)–(3.4) при $T=\tau$. После этого полагаем $\mathcal{F}_\tau[z]=\varphi$. В соответствии с (3.6), операторы $\mathcal{F}_\tau$ определяются формулой:

$$\mathcal{F}_\tau[z](t)=S(t,0)\varphi_0+\int_0^t S(t,s)P_J z(s)\,ds,\quad t\in[0;\tau]. \tag{3.11}$$

Отсюда ясно, что условие $(\mathbf{G}_1)$ выполняется. Предположения $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{G}_3)$ выполняются согласно леммам 3, 7 при следующих параметрах:

$$\left\{\begin{array}{c} D_1\varphi=\varphi,\quad D_1\colon W[0;\tau]\to L_{q_1,r_1}(Q_\tau),\quad Y_1=L_{q_1}(\Omega);\\ D_i\varphi=\varphi_{x_{i-1}},\quad D_i\colon W[0;\tau]\to L_{q_2,r_2}(Q_\tau),\quad Y_i=L_{q_2}(\Omega),\quad i=\overline{2,4};\\ \mathcal{N}_i(t,\omega)=C_2\big(\omega+|||\varphi_0|||_{p,\Omega}\big),\quad i=\overline{1,4},\quad \mathcal{N}(\omega)=C_1(1+e^{\gamma T}),\quad \alpha_0\equiv 1.\end{array}\right. \tag{3.12}$$

Далее рассмотрим задачу (3.4) для (сначала — неуправляемой) системы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nu\Delta\varphi+a(x,t)\varphi+\sum_{k=1}^{3}a_k(x,t)\varphi_{x_k}+\nabla\mathcal{P}=f[\varphi](x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{3.13}$$

где $f[\varphi](x,t)=g(x,t)-\sum\limits_{k=1}^{3}\varphi_k\varphi_{x_k}$, $g\in L_p(Q_T)$, $p\geqslant\dfrac{5}{3}$. Компоненту φ решения $(\varphi,\nabla\mathcal{P})$ можно искать как решение уравнения (1.2) с оператором $\mathcal{F}=\mathcal{F}_T$ вида (3.11). После того, как функция φ найдена, функцию $\nabla\mathcal{P}$ можно выразить непосредственно из уравнения (3.13). Используя некоторые элементы построений [15, § 10], получим необходимые нам оценки для правой части f. Найдем числа σ, q, $r\geqslant 1$, исходя из условий:

$$\max\left\{\frac{7}{2p}-\frac{3}{2},0\right\}\leqslant\frac{1}{\sigma}\leqslant\frac{1}{p}, \tag{3.14}$$

$$1+\frac{3}{2pq}-\frac{5}{2p}>0,\quad \frac{1}{2}+\frac{3}{2pq'}-\frac{5}{2p}>0, \tag{3.15}$$

где q' — сопряженное к q. Система (3.14), (3.15) непротиворечива. Например, при $q=2$, и соответственно, $q'=2$, условие (3.15) принимает вид: $p>\dfrac{7}{2}$; (3.14) конкретизируется как $\sigma\geqslant p$. Из (3.15), согласно лемме 6, следует, что для $\varphi\in W[0;\tau]$ имеем: $\varphi\in L_{pq,\sigma r}(Q_\tau)$, $\varphi_{x_k}\in L_{pq',\sigma r'}(Q_\tau)$. Обозначим $H[\varphi]=H[\varphi,\varphi]$, $H[\varphi,\psi]=\sum\limits_{k=1}^{3}\varphi_k\psi_{x_k}$, $\varphi,\psi\in W[0;\tau]$. Для $H=H[\varphi,\psi]$, пользуясь неравенством Гёльдера, оценим:

$$\|H\|^p_{p,Q_\tau}=\int_0^\tau dt\int_\Omega|H|^p\,dx\leqslant\left(\int_0^\tau 1^{\xi'}\,dt\right)^{\frac{1}{\xi'}}\left(\int_0^\tau\left\{\int_\Omega|H|^p\,dx\right\}^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}},$$

где $\xi=\dfrac{\sigma}{p}$, $\xi'=\dfrac{\xi}{\xi-1}=\dfrac{\sigma}{\sigma-p}$. Следовательно, $\|H\|^p_{p,Q_\tau}\leqslant\tau^{1-\frac{p}{\sigma}}\left(\int_0^\tau\|H\|^\sigma_{p,\Omega}\,dt\right)^{\frac{p}{\sigma}}$, откуда $\|H\|_{p,Q_\tau}\leqslant\tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}\|H\|_{p,\sigma,Q_\tau}\leqslant\tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}\sum\limits_{k=1}^{3}\|\varphi_k\psi_{x_k}\|_{p,\sigma,Q_\tau}$. По неравенству Гёльдера

$$\big\|(\varphi_k\psi_{x_k})(.,t)\big\|^p_{p,\Omega}\leqslant\left(\int_\Omega|\varphi_k|^{pq}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega|\psi_{x_k}|^{pq'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}},$$

следовательно, $\big\|(\varphi_k\psi_{x_k})(.,t)\big\|_{p,\Omega}\leqslant\|\varphi_k\|_{pq,\Omega}\|\psi_{x_k}\|_{pq',\Omega}$. Таким образом,

$$\|\varphi_k\psi_{x_k}\|^\sigma_{p,\sigma,Q_\tau}\leqslant\int_0^\tau\|\varphi_k\|^\sigma_{pq,\Omega}\|\psi_{x_k}\|^\sigma_{pq',\Omega}\,dt\leqslant\left(\int_0^\tau\|\varphi_k\|^{\sigma r}_{pq,\Omega}\,dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^\tau\|\psi_{x_k}\|^{\sigma r'}_{pq',\Omega}\,dt\right)^{\frac{1}{r'}},$$

то есть справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Для любых φ, $\psi\in W[0;\tau]$ справедливы оценки*

$$\|\varphi_k\psi_{x_k}\|_{p,\sigma,Q_\tau}\leqslant\|\varphi_k\|_{pq,\sigma r,Q_\tau}\|\psi_{x_k}\|_{pq',\sigma r',Q_\tau},\qquad\|H\|_{p,Q_\tau}\leqslant\tau^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}\sum_{k=1}^{3}\|\varphi_k\|_{pq,\sigma r,Q_\tau}\|\psi_{x_k}\|_{pq',\sigma r',Q_\tau}.$$

Из проведенных выкладок вытекает также следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть φ, $\psi \in W[0;\tau]$, и при $\rho_1 \in L_{\sigma r}[0;T]$, $\rho_2 \in L_{\sigma r'}[0;T]$ имеем:*

$$\big\|\varphi_k(.,t)\big\|_{pq,\Omega} \leqslant \rho_1(t),\ \big\|\psi_{x_k}(.,t)\big\|_{pq',\Omega} \leqslant \rho_2(t) \text{ для п.в. } t \in [0;\tau],\ k = \overline{1,3}. \tag{3.16}$$

Тогда $\big\|H[\varphi,\psi](.,t)\big\|_{p,\Omega} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{3} \big\|\varphi_k(.,t)\big\|_{pq,\Omega}\big\|\psi_{x_k}(.,t)\big\|_{pq',\Omega} \leqslant 3\rho_1(t)\rho_2(t)$ *для п. в.* $t \in [0;\tau]$.

Замечание 1. Таким образом, $H[\varphi]$ удовлетворяет условию $(\mathbf{F}_2)$ при $\mathcal{N}_0(t,\rho_1,\rho_2) = 3\rho_1\rho_2$, $p_1 = \sigma r$, $Y_1 = L_{pq}(\Omega)$, $p_i = \sigma r'$, $Y_i = L_{pq'}(\Omega)$, $i = \overline{2,4}$, или в смысле согласования с приведенной выше конкретизацией условия $(\mathbf{G}_2)$, при $q_1 = pq$, $q_2 = pq'$, $r_1 = \sigma r$, $r_2 = \sigma r'$.

Положим $\beta_\tau[\varphi] = \big\{\|\varphi\|_{W[0;\tau]} + |||\varphi(.,0)|||_{p,\Omega}\big\}$. Непосредственно из лемм 6, 8 получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 10. *Пусть $\varphi, \psi \in W[0;\tau]$, $C_3 = \widetilde{c}T^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}$, $h \subset [0;T]$ — измеримо. Тогда*

$$\|\chi_h H\|_{p,Q_\tau} \leqslant C_3\beta_\tau[\varphi]\sum_{k=1}^{3}\|\chi_h\psi_{x_k}\|_{pq',\sigma r',Q_\tau}, \qquad \|\chi_h H\|_{p,Q_\tau} \leqslant C_3\beta_\tau[\psi]\sum_{k=1}^{3}\|\chi_h\varphi_k\|_{pq',\sigma r',Q_\tau}.$$

В частности, если при $\rho_1 \in L_{\sigma r}[0;T]$, $\rho_2 \in L_{\sigma r'}[0;T]$ имеют место оценки (3.16), то

$$\|\chi_h H\|_{p,Q_\tau} \leqslant 3C_3\beta_\tau[\varphi]\|\chi_h\rho_2\|_{L_{\sigma r'}[0;T]}, \qquad \|\chi_h H\|_{p,Q_\tau} \leqslant 3C_3\beta_\tau[\psi]\|\chi_h\rho_1\|_{L_{\sigma r}[0;T]}.$$

Рассмотрим разность $H[\varphi] - H[\psi] = \sum\limits_{k=1}^{3}\big(\varphi_k\varphi_{x_k} - \psi_k\psi_{x_k}\big) = H[\varphi-\psi,\varphi] + H[\psi,\varphi-\psi]$. Таким образом, непосредственно из леммы 10 вытекает следующая лемма.

Лемма 11. *Пусть $0 \leqslant \xi \leqslant \tau \leqslant T$, $\varphi,\psi \in W_0[0;\tau]$, $C_4 = 3C_3$, и при $\rho_1 \in L_{\sigma r}[0;T]$, $\rho_2 \in L_{\sigma r'}[0;T]$ имеют место оценки (3.16). Тогда*

$$\big\|H[\varphi] - H[\psi]\big\|_{L_p\left([\xi;\tau];Y\right)} \leqslant C_4\big\{\|\rho_1\|_{L_{\sigma r}[\xi;\tau]} + \|\rho_2\|_{L_{\sigma r'}[\xi;\tau]}\big\}\|\varphi-\psi\|_{W[0;\tau]}.$$

Замечание 2. Стало быть, $H[\varphi]$ удовлетворяет $(\mathbf{F}_3)$ при $\alpha_1 \equiv 1$, $K(\omega) = 2C_4\omega$.

Пусть теперь имеется управляемый оператор $g = g[u](\varphi)(x,t)$, $u \in U$, удовлетворяющий условиям $(\mathbf{F}_1)$–$(\mathbf{F}_3)$ с параметрами $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_g$, $\alpha_1 \equiv 1$, $K = K_g$. В частности, с физической точки зрения, представляет интерес управление плотностью внешних сил по принципу линейной обратной связи: $g = u_1(x,t) + u_2(x,t)\varphi(x,t)$. Рассмотрим оператор $f[u](\varphi) = g[u](\varphi) - H[\varphi]$. Очевидно, что $f[u]$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{F}_1)$–$(\mathbf{F}_3)$. Условие $(\mathbf{F}_4)$ будет выполнено, если существует функция $\rho(.) \in \mathbf{AC}[0;T]$ такая, что

$$C_2\left(|||\varphi_0|||_{p,\Omega} + \left[\int_0^t \big\{3\rho^2(\xi) + \mathcal{N}_g(\xi,\rho,\rho)\big\}^p d\xi\right]^{\frac{1}{p}}\right) = \rho(t),\ t \in [0;T]. \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) может быть преобразовано к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения; а она имеет решение при достаточно малом $T > 0$.

Рассмотрим задачу (3.4) для управляемой нелинейной системы Навье–Стокса

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + a(x,t)\varphi + \sum_{k=1}^{3} a_k(x,t)\varphi_{x_k} + \nabla\mathcal{P} = f[u](\varphi)(x,t),\ (x,t) \in Q_T. \tag{3.18}$$

Так же как и раньше, компоненту φ решения $(\varphi,\nabla\mathcal{P})$ данной задачи можно искать как решение уравнения (1.2) с оператором $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ вида (3.11). Из проведенных выше рассуждений и теорем 1, 2, а также леммы 3 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $p \geqslant \frac{5}{3}$, $Y = L_p(\Omega)$; *числа* σ, q, $r \geqslant 1$ *удовлетворяют условиям* (3.14), (3.15); $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}{}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$; *оператор* $g = g[u](\varphi)(.,t)$ *для всех* $u \in U$ *удовлетворяет условиям* $(\mathbf{F}_1)$–$(\mathbf{F}_3)$ *при* $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_g$, $K = K_g$, $K_g(0) = 0$, *и прочими параметрами, выбранными согласно* (3.12) *и замечанию* 1; $f[u](\varphi) = g[u](\varphi) - H[\varphi]$. *Предположим, что существует функция* $\rho \in \mathbf{AC}[0;T]$, *удовлетворяющая системе сравнения* (3.17), *где* C_2 — *константа из леммы* 7. *Тогда для всех* $u \in U$ *задача* (3.18), (3.4) *имеет единственное решение* $(\varphi, \nabla\mathcal{P}) \in W_0[0;T] \times G_p(Q_T)$; *это решение подчиняется оценкам:*

$$\big\|\varphi(.,t)\big\|_{L_{q_1}(\Omega)} \leqslant \rho(t), \quad \big\|\varphi_{x_k}(.,t)\big\|_{L_{q_2}(\Omega)} \leqslant \rho(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0;T], \quad k = \overline{1,3};$$
$$\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{W[0;T]} \leqslant \mathcal{N}(M)M, \quad \|\nabla\mathcal{P}\|_{p,Q_T} \leqslant C_1\big(1 + e^{\gamma T}\big)\big\{|||\varphi_0|||_{p,\Omega} + \big\|f[u](\varphi)\big\|_{p,Q_T}\big\},$$

где $M = \big\|3\rho^2 + \mathcal{N}_g(.,\rho,\rho)\big\|_{L_p[0;T]}$, *а константы* C_1, $\gamma > 0$ *не зависят от* T, φ_0, φ (*см. лемму* 3); $\overline{\varphi}$ — *решение задачи* (3.3)–(3.4) *при* $z = 0$. *В частности,* $\overline{\varphi} = 0$, *если* $\varphi_0 = 0$.

Таким образом, отрезок $[0;T]$ определяется здесь как отрезок разрешимости системы сравнения (3.17). Во многих случаях для конкретно заданной функции $\mathcal{N}_g$ решение уравнения (3.17) можно найти в явном виде, решив соответствующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и получить $[0;T]$ как отрезок непрерывности этого решения. Таким образом, исследование разрешимости довольно сложной управляемой системы сводится к исследованию разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения конкретного вида. В [15, § 10] однозначная разрешимость задачи (3.4) для неуправляемого уравнения вида (3.13) была доказана при условии, что финальное время T достаточно мало, что согласуется с результатом, полученным выше. Процедура доказательства [15, теорема 10.1] сводится к применению метода последовательных приближений к уравнению (1.2) с операторами $f[\varphi] = g - H[\varphi]$ и $\mathcal{F}$, заданным формулой (3.11) (при $\tau = T$). Чтобы это было возможно, оператор $F[\varphi] = \mathcal{F}\big[f(\varphi)\big]$ должен быть инвариантным относительно замкнутого множества Ψ (в [15, теорема 10.1] это — замкнутый ограниченный шар) пространства $W[0;T]$ и сжимающим на этом множестве. Это, по-существу, означает, что из доказательства теорем 1, 2 (в данном частном случае) берется лишь первый шаг индукции (с точностью до того, что вместо величины $\frac{1}{2}$ берется константа, сколь угодно близкая к 1 слева), то есть $T = t_1$; процедура продолжения решения не проводится.

О возможности разрушения решения (*blow-up*) системы Навье–Стокса при подходе к некоторой критической отметке времени хорошо известно, см., например, [17]. Вообще, за исключением некоторых частных случаев (отсутствие вынуждающих сил $g = 0$, задачи с осевой симметрией и т. д.), и даже для этих частных случаев, вопросы глобальной разрешимости и единственности решений нелинейных нестационарных систем Навье–Стокса исследовались, главным образом, по отдельности (в различных классах), см., например, [18–23]. Отметим, наконец, [24, глава 3, §§ 4–5; глава 4], где рассматривалась задача (3.4) для уравнения вида (3.13) при $a = 0$, $a_k = 0$, $k = \overline{1,3}$, в котором функция $g(t,x)$ понималась как управление. Была доказана всюду плотность множества управлений, для которых существует единственное глобальное решение (при произвольно фиксированном $T > 0$), в пространстве правых частей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107. http://mi.mathnet.ru/ivm7249

2. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102. http://mi.mathnet.ru/znsl1983
3. Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21. http://mi.mathnet.ru/zvmmf3318
4. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
5. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 40. Дифференциальные уравнения. С. 3–138.
6. Чернов А. В. О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 83–94. http://mi.mathnet.ru/ivm9252
7. Чернов А. В. О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 12. С. 2095–2111. https://doi.org/10.31857/S004446690003555-1
8. Сумин В. И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107. http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1411
9. Сумин В. И., Чернов А. В. Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: тр. Междунар. конф. посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 293–300.
10. Сумин В. И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
11. Чернов А. В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73. http://mi.mathnet.ru/ivm8446
12. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 230–243. https://doi.org/10.20537/vm150207
13. Чернов А. В. Мажорантный признак первого порядка тотально глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 531–548. https://doi.org/10.20537/vm180407
14. Чернов А. В. О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Известия вузов. Математика. 2018. № 11. С. 60–74. http://mi.mathnet.ru/ivm9413
15. Солонников В. А. Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1973. Т. 38. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. С. 153–231. http://mi.mathnet.ru/znsl2649
16. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Московск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25. https://zbmath.org/?q=an:0021.23404
17. Seregin G. A. Necessary conditions of potential blow up for Navier–Stokes equations // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 385. С. 187–199. http://mi.mathnet.ru/znsl3904
18. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Mathematica. 1934. Vol. 63. No. 1. P. 193–248. https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485888078

19. Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1959. Vol. 48. No. 4. P. 173–182. https://doi.org/10.1007/BF02410664
20. Kozono H., Sohr H. Remarks on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations // Analysis. 1996. Vol. 16. No. 3. P. 255–271. https://doi.org/10.1524/anly.1996.16.3.255
21. Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи математических наук. 2003. Т. 58. № 2 (350). С. 45–78. https://doi.org/10.4213/rm610
22. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity L_p–L_q class // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264. No. 3. P. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
23. Seregin G. A., Shilkin T. N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations // Russian Mathematical Surveys. 2018. Vol. 73. No. 4. P. 661–724. https://doi.org/10.1070/RM9822
24. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.

Поступила в редакцию 23.08.2019

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О тотально глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.

A. V. Chernov

On totally global solvability of controlled second kind operator equation

Keywords: nonlinear evolutionary operator equation of the second kind, totally global solvability, Navier–Stokes system.

MSC2010: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: 10.35634/vm200107

We consider the nonlinear evolutionary operator equation of the second kind as follows $\varphi = \mathcal{F}\big[f[u]\varphi\big]$, $\varphi \in W[0;T] \subset L_q\big([0;T];X\big)$, with Volterra type operators $\mathcal{F}\colon L_p\big([0;\tau];Y\big) \to W[0;T]$, $f[u]\colon W[0;T] \to L_p\big([0;T];Y\big)$ of the general form, a control $u \in \mathcal{D}$ and arbitrary Banach spaces X, Y. For this equation we prove theorems on solution uniqueness and sufficient conditions for totally (with respect to set $\mathcal{D}$) global solvability. Under natural hypotheses associated with pointwise in $t \in [0;T]$ estimates the conclusion on univalent totally global solvability is made provided global solvability for a comparison system which is some system of functional integral equations (it could be replaced by a system of equations of analogous type, and in some cases, of ordinary differential equations) with respect to unknown functions $[0;T] \to \mathbb{R}$. As an example we establish sufficient conditions of univalent totally global solvability for a controlled nonlinear nonstationary Navier–Stokes system.

REFERENCES

1. Chernov A. V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95. https://doi.org/10.3103/S1066369X11030108
2. Kalantarov V. K., Ladyzhenskaya O. A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, issue 1, pp. 53–70. https://doi.org/10.1007/BF01109723
3. Sumin V. I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90002-A
4. Sumin V. I. *Funktsional'nye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovy uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1992.
5. Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. Blow-up of solutions to strongly nonlinear equations of the pseudoparabolic type, *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya*, 2006, vol. 40, Differential Equations, pp. 3–138 (in Russian).
6. Chernov A. V. On total preservation of solvability of controlled Hammerstein-type equation with non-isotone and non-majorizable operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 72–81. https://doi.org/10.3103/S1066369X1706010X
7. Chernov A. V. Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 2018–2030. https://doi.org/10.1134/S0965542518120096
8. Sumin V. I. The problem of global solutions existence-stability for controllable boundary-value problems and Volterra functional equations, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta imeni N. I. Lobachevskogo. Matematika*, 2003, issue 1, pp. 91–107 (in Russian). http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1411
9. Sumin V. I., Chernov A. V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimization of distributed systems, *Systems Dinamics and Control Processes (SDCP-2014): Proceedings of Int.*

Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of the birth of Acad. N.N. Krasovskii, Ekaterinburg: “UMTS UPI” Publ., 2015, pp. 293–300 (in Russian).

10. Sumin V.I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 262–278 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278
11. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X12030085
12. Chernov A.V. On the totally global solvability of a controlled Hammerstein type equation with a varied linear operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 230–243 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm150207
13. Chernov A.V. Majorant sign of the first order for totally global solvability of a controlled functional operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 531–548 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180407
14. Chernov A.V. The total preservation of unique global solvability of the first kind operator equation with additional controlled nonlinearity, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 53–66. https://doi.org/10.3103/S1066369X18110063
15. Solonnikov V.A. Estimates for solutions of nonstationary Navier–Stokes equations, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 1973, vol. 38, pp. 153–231 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/znsl2649
16. Tikhonov A.N. On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics, *Bull. Mos. Univ. Sec. A.*, 1938, vol. 1, issue 8, pp. 1–25 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0021.23404
17. Seregin G.A. Necessary conditions of potential blow-up for Navier–Stokes equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 178, no. 3, pp. 345–352. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0551-z
18. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, 1934, vol. 63, no. 1, pp. 193–248. https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485888078
19. Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1959, vol. 48, no. 4, pp. 173–182. https://doi.org/10.1007/BF02410664
20. Kozono H., Sohr H. Remarks on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations, *Analysis*, 1996, vol. 16, no. 3, pp. 255–271. https://doi.org/10.1524/anly.1996.16.3.255
21. Ladyzhenskaya O.A. Sixth problem of the millenium: Navier–Stokes equations, existence and smoothness, *Russian Mathematical Surveys*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 251–286. https://doi.org/10.1070/RM2003v058n02ABEH000610
22. Saito H. Global solvability of the Navier-Stokes equations with a free surface in the maximal regularity L_p–L_q class, *Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 1475–1520. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045
23. Seregin G.A., Shilkin T.N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations, *Russian Mathematical Surveys*, 2018, vol. 73, no. 4, pp. 661–724. https://doi.org/10.1070/RM9822
24. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Providence, RI: AMS, 2000. https://zbmath.org/?q=an:1027.93500

Received 23.08.2019

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia;
Nizhny Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On totally global solvability of controlled second kind operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 92–111.