МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 112–124.

УДК 517.977

© *А. В. Юденков, А. М. Володченков*

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Краевые задачи теории функции комплексных переменных эффективно используются при исследовании равновесия однородных упругих сред. Наиболее сложные системы краевых задач соответствуют случаю, когда упругое тело обладает анизотропными свойствами. Анизотропия среды приводит к появлению в краевых условиях функции сдвига, которая в общем случае нарушает аналитичность искомых функций. В работе проводится исследование систем краевых задач со сдвигом для аналитических векторов, соответствующих трем основным задачам теории упругости (первая, вторая и смешанная задачи). Системы аналитических векторов со сдвигом сводятся к равносильным системам из краевых задач Гильберта для аналитических функций, содержащих интегральные члены со слабой особенностью. Полученное общее решение основных краевых задач анизотропной теории упругости позволяет проверить указанные задачи на устойчивость относительно возмущений краевых условий и формы контура. Такое исследование актуально в связи с необходимостью применения приближенных численных методов к решению краевых задач со сдвигом. Основным результатом работы следует считать доказательство устойчивости систем векторных краевых задач со сдвигом для аналитических функций на пространстве Гёльдера, соответствующих основным задачам теории упругости для анизотропных тел относительно изменения краевых условий и формы контура.

Ключевые слова: краевая задача, аналитическая функция, теория упругости, уравнение Фредгольма.

DOI: 10.35634/vm200108

Введение

Краевые задачи для аналитических функций эффективно используются для решения практически важных задач физики и техники. Это связано с тем, что потенциал многих векторных полей (электростатических, магнитных, температурных, скоростей течения жидкостей) выражается через аналитические или гармонические функции.

Несколько особняком стоят краевые задачи, которые используются в теории упругости. Известно, что комплексный потенциал поля напряжений для упругих тел имеет достаточно сложный вид. Для моделирования основных задач теории упругости используются функции и краевые задачи, обобщающие гармонические функции и известные краевые задачи классической теории потенциала (краевые задачи для бианалитических или бигармонических функций [2,3]). Случай изотропного тела подробно изложен в работах Н. И. Мусхелишвили и Г. Н. Савина (смотри, например, [6,7,9] и приведенную там библиографию).

Следует отметить, что в результате многолетних исследований теория краевых задач для бианалитических функций на данный момент хорошо развита [3, 10, 13, 14]. Анизотропная теория упругости в научной литературе представлена не столь широко. Наиболее полное исследование упругих свойств анизотропных тел можно найти в работах [4, 8, 10]. Основной сложностью в исследовании основных задач анизотропной теории упругости является то, что комплексный потенциал напряженного поля не является ни аналитической, ни бианалитической функцией [5, 8, 10]. При составлении краевых условий в задачах возникает неаналитическая функция сдвига. Поэтому для решения таких задач необходимо применять специальные методы, основанные на использовании конформного отображения, свойств сингулярного интеграла типа Коши и краевых задач специального вида, схожих с классическими задачами Дирихле и Шварца. Постановку и исследование свойств математическую модели первой основной задачи анизотропной теории упругости можно найти в работах [8, 10].

Следует отметить, что только в отдельных случаях удается получить решение в замкнутом виде (в квадратурах). В общем случае приходится прибегать к приближенным численным методам, что делает необходимым проведение исследования математических моделей основных задач анизотропной теории упругости на устойчивость.

В представленной работе решаются первая, вторая и смешанная задачи для анизотропных сред в случае плоской деформации. На основе полученных решений делается вывод об устойчивости этих решений при возмущении краевых условий и формы контура.

§ 1. Основные задачи анизотропной теории упругости

В начале отметим, что все исследования будут проводится с функциями класса Гёльдера. Напомним, что функция φ принадлежит классу Гёльдера на контуре L, если для любых двух точек контура выполняется условие

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^{\mu},$$

где A, μ — положительные числа. A называется постоянной Гёльдера, μ — показателем Гёльдера.

В работе [4] было показано, что основные задачи теории упругости в анизотропном случае сводятся к системам краевых задач. Например, граничные условия первой основной задачи

$$\begin{gathered} X_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ Y_n = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) \end{gathered}$$

можно записать в следующем виде

$$\begin{gathered} \Phi_1(z_1) + \overline{\Phi_1(z_1)} + \Phi_2(z_2) + \overline{\Phi_2(z_2)} = f_1 + c_1, \\ \mu_1\Phi_1(z_1) + \overline{\mu_1\Phi_1(z_1)} + \mu_2\Phi_2(z_2) + \overline{\mu_2\Phi_2(z_2)} = f_2 + c_2, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\Phi(z_k)(k = 1, 2)$ — неизвестные аналитические функции обобщенных комплексных переменных, f_k — известные функции класса Гёльдера, c_k — произвольные действительные постоянные, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 + iy_2$, $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ — корни определенного характеристического уравнения. Будем предполагать, что

$$\beta_1 \neq \beta_2, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0.$$

Общее выражение для компонентов напряжения можно получить, используя аналитические функции $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$:

$$\begin{gathered} \sigma_x = 2\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\Phi_2'(z_2)\right], \quad \sigma_y = 2\mathrm{Re}\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right], \\ \tau_{xy} = -2\mathrm{Re}\left[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)\right] \end{gathered}$$

Для обобщенных комплексных переменных справедливо равенство $(k = 1, 2)$

$$z_k = \frac{z + \overline{z}}{2} + \mu_k\frac{z - \overline{z}}{2i} = 0,5(1 - i\mu_k)z + 0,5(1 + i\mu_k)z = \lambda_k(z). \tag{1.2}$$

Из соотношения (1.2) следует, что обобщенные комплексные переменные z_k являются бианалитическими функциями [1, 12], которые входят в краевое условие (1.1) в качестве аргументов неизвестных аналитических функций Φ_1 и Φ_2.

Перенесем решение задачи (1.1) на единичную окружность. Для этого рассмотрим функции $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ как функции обычных переменных $z_k = x_k + iy_k, k = 1, 2$, определенных в областях D_1, D_2 $x_k = x + \alpha_k y$, $y_k = y + \beta_k y$. Пусть функции ω, ω_1, ω_2 конформно отображают области D, D_1, D_2 на внутренность единичного круга. Обозначим соответствующие обратные функции ω^{-1}, ω_1^{-1}, ω_2^{-1}. Краевое условие (1.1) преобразуется к следующему виду

$$2\mathrm{Re}\left[\psi_1(\sigma_1) + \psi_2(\sigma_2)\right] = f_1(\sigma), \quad 2\mathrm{Re}\left[\mu_1\psi_1(\sigma_1) + \mu_2\psi_2(\sigma_2)\right] = f_2(\sigma), \tag{1.3}$$

где

$$\psi_1(\xi) = \Phi_1(\omega_1(\xi)), \quad \psi_2(\xi) = \Phi_2(\omega_2(\xi)).$$

Выразим переменные σ_1, σ_2 через σ. Получим

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \omega_1^{-1}(t_1) = \omega^{-1}(\lambda_1(t)) = \omega_1^{-1}(\lambda_1(\omega(\sigma))) = \alpha_1(\sigma),\\ \sigma_2 &= \omega_2^{-1}(t_2) = \omega^{-1}(\lambda_2(t)) = \omega_2^{-1}(\lambda_2(\omega(\sigma))) = \alpha_2(\sigma).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь в качестве точек t, t_1, t_2 выступают соответствующие точки контуров L, L_1, L_2. Функции α_1, α_2 отображают окружность в себя. Такие функции в теории краевых задач называются функциями сдвига. Учитывая (1.4), краевые условия (1.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\psi_1(\alpha_1(\sigma)) + \overline{\psi_1(\alpha_1(\sigma))} + \psi_2(\alpha_2(\sigma)) + \overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma))} = f_1(\sigma),\\ \mu_1\psi_1(\alpha_1(\sigma)) + \overline{\mu_1\psi_1(\alpha_1(\sigma))} + \mu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma)) + \overline{\mu_2\psi_2(\alpha_2(\sigma))} = f_2(\sigma).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Так как в общем случае функции $\alpha_k(\sigma)$ не являются граничным значением аналитической функции, то функции $\psi_k(\alpha_k(t))$ в свою очередь не будут аналитическими в точке t.

Будем последовательно выражать неизвестные аналитические функции ψ_1 и ψ_2 из краевых условий (1.5). Представим первое краевое условие (1.5) в виде

$$\psi_1(\alpha_1(\sigma)) = -\overline{\psi_1(\alpha_1(\sigma))} + Q_1(\sigma), \tag{1.6}$$

где

$$Q_1(\sigma) = f_1(\sigma) - \psi_2(\alpha_2(\sigma)) - \overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma))}.$$

В данном виде краевое условие (1.6) представляет собой краевую задачу Гильберта (в частности, Дирихле [7]) для аналитической функции ψ_1 в точке $\alpha_1(\sigma)$. Решая ее, получаем

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{Q_1(\beta_1(\sigma_0))}{\sigma_0 - \xi}d\sigma_0 - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_\gamma \frac{Q_1(\beta_1(\sigma_0))}{\sigma_0}d\sigma_0 + ic_1,$$

или

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_\gamma Q_1(\beta(\sigma_0))\frac{\sigma_0 + \xi}{\sigma_0 - \xi}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + ic_1, \tag{1.7}$$

где $\beta_1(\alpha_1(\sigma)) = \sigma$. Устремляя в (1.7) ξ к σ и используя формулы Сохоцкого–Племеля, а также соотношения

$$\frac{1}{2}\psi_2(\alpha_2(\sigma)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))\alpha_2'(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha(\sigma)},$$

$$\frac{1}{2}\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma))} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))}\alpha_2'(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))}\alpha_2'(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\alpha_2(\sigma_0)},$$

получим

$$\psi_1(\alpha_1(\sigma)) = -\psi_2(\alpha_2(\sigma)) + \int\limits_{\gamma} A_1(\sigma,\sigma_0)\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))\,d\sigma_0 + \int\limits_{\gamma} B_1(\sigma,\sigma_0)\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))\,d\sigma_0 + g_1(\sigma),$$

где

$$\begin{aligned} A_1(\sigma,\sigma_0) &= \frac{1}{2\pi i}\Big[\frac{\alpha_2'(\sigma_0)}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)} - \frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)}\Big] + \frac{1}{4\pi i}\frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)}, \\ B_1(\sigma,\sigma_0) &= \frac{1}{2\pi i}\Big[\frac{\alpha_2'(\sigma_0)}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)} - \frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)}\Big] + \frac{1}{4\pi i}\frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)} - \frac{1}{4\pi i}\frac{\alpha_2'(\sigma_0)}{\alpha_2(\sigma_0)}, \\ g_1(\sigma) &= \frac{1}{2}f_1(\sigma) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1(\sigma_0)\alpha_1'(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1(\sigma_0)\alpha_1'(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\alpha_1(\sigma_0)} + ic_1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Покажем, что в случае $\alpha'(\sigma) \neq 0$, $\alpha(\sigma) \in H^{(1)}(\gamma)$, ядра $A_1(\sigma,\sigma_0)$, $B_1(\sigma,\sigma_0)$ в выражении (1.8) принадлежат классу $H^{(1)}(\gamma\times\gamma)$. Для этого достаточно показать, что выражение

$$\frac{\alpha_2'(\sigma_0)}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)} - \frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)}$$

имеет лишь слабую особенность. Представим данное выражение в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_2'(\sigma_0)}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)} - \frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)} = \\ &= \Big[\frac{\alpha_2'(\sigma_0)}{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)} - \frac{1}{\sigma_0-\sigma}\Big] + \Big[\frac{1}{\sigma_0-\sigma} - \frac{\alpha_1'(\sigma_0)}{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)}\Big] = \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\Big[\frac{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)}{\sigma_0-\sigma}\Big]}{\frac{\alpha_2(\sigma_0)-\alpha_2(\sigma)}{\sigma_0-\sigma}} + \frac{\frac{\partial}{\partial\sigma_0}\Big[\frac{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)}{\sigma_0-\sigma}\Big]}{\frac{\alpha_1(\sigma_0)-\alpha_1(\sigma)}{\sigma_0-\sigma}}. \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые выражения имеют слабую особенность и принадлежат классу $H^*(\gamma\times\gamma)$. Подставим выражение (1.7) во второе краевое условие системы (1.5) и после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} &(\mu_2-\mu_1)\psi_2(\alpha_2(\sigma)) + (\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma))} + \\ &\qquad + \int\limits_{\gamma} A_1(\sigma,\sigma_0)\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))\,d\sigma_0 + \int\limits_{\gamma} B_1(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))}\,d\sigma_0 = Q_2(\sigma), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$A(\sigma,\sigma_0) = -\overline{\mu_1 B_1(\sigma,\sigma_0)}\frac{1}{\sigma_0^2} + \mu_1 A(\sigma,\sigma_0), \quad B(\sigma,\sigma_0) = \mu_1 B_1(\sigma,\sigma_0) - \overline{\mu_1 A_1(\sigma,\sigma_0)}\frac{1}{\sigma_0^2},$$
$$Q_2(\sigma) = -\mu_1 g_1(\sigma) - \overline{\mu_1 g_1(\sigma)} + f_2(\sigma).$$

Краевое условие (1.9) представляет собой задачу Гильберта для аналитической функции $\psi_2(\xi)$ в точке $\alpha_2(\sigma)$, содержащую интегральные члены со слабой особенностью. В общем случае ее решение сводится к решению уравнения Фредгольма второго рода. Найдя $\psi_2(\xi)$, подставим ее граничное значение в точке $\alpha_2(\sigma)$ в краевое условие (1.8) и найдем значение функции $\psi_1(\xi)$. Функции $\Psi_1(z_1)$, $\Psi_2(z_2)$ найдем из соотношений

$$\Psi_k(z_k) = \psi(\omega_k^{-1}(z_k)).$$

Тем самым доказана следующая теорема 1.

Теорема 1. *Решение краевой задачи* (1.1)*, равносильной первой основной задаче анизотропной теории упругости, сводится к последовательному решению задачи Гильберта, содержащей интегральные члены относительно функции $\psi_2(\xi)$ в точке $\alpha_2(\sigma)$, и обычной задачи Гильберта относительно функции $\psi_1(\xi)$ в точке $\alpha_1(\sigma)$.*

В частном случае, когда $\alpha_k(\sigma) = \beta_k(\sigma) = \sigma$, что соответствует случаю эллипитического отверстия, получим

$$\psi_1(\sigma) = -\overline{\psi_1(\sigma)} + Q_1(\sigma),$$

где $Q_1(\sigma) = -\psi_2(\sigma) - \overline{\psi_2(\sigma)} + f_1(\sigma)$. Тогда

$$\psi_1(\xi) = -\psi_2(\xi) - \overline{\psi_2(0)} + \frac{1}{4\pi i}\int\limits_\gamma \gamma_1(\sigma_0)\frac{\sigma_0+\xi}{\sigma_0-\xi}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + ic_1. \tag{1.10}$$

Подставим значение $\psi_1(\xi)$ во второе краевое условие (1.7), получаем

$$(\mu_2-\mu_1)\psi_2(\alpha_2(\sigma)) + (\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma))} = Q_2(\sigma), \tag{1.11}$$

где

$$Q_2(\sigma) = f_2(\sigma) - 0,5(\mu_1+\overline{\mu_1})f_2(\sigma) - \frac{\mu_1-\overline{\mu_1}}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_1(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\sigma_0-\sigma} + \frac{\mu_1-\overline{\mu_1}}{4\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_1(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\sigma_0} + \\ +ic_1(\mu_1-\overline{\mu_1}) + 2\mathrm{Re}\,[\mu_2\psi_2(0)]. \tag{1.12}$$

Решая задачу Гильберта (1.11), получим

$$\psi_2(\xi) = \frac{1}{2\pi i(\mu_2-\mu_1)}\int\limits_\gamma \frac{Q_2(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\sigma_0-\xi} - \frac{1}{4\pi i(\mu_2-\mu_1)}\int\limits_\gamma \frac{Q_2(\sigma_0)\,d\sigma_0}{\sigma_0} + ic_2. \tag{1.13}$$

Используя (1.12), преобразуем (1.13) к следующему виду

$$\psi_2(\xi) = \frac{1}{4\pi i(\mu_2-\mu_1)}\int\limits_\gamma \left[f_2(\sigma_0) - \mu_1 f_1(\sigma_0)\right]\frac{\sigma_0+\xi}{\sigma_0-\xi}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + \lambda_2, \tag{1.14}$$

где λ_2 — некоторая комплексная компонента. Подставляя выражение (1.14) в условие (1.10), получаем

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{4\pi i(\mu_2-\mu_1)}\int\limits_\gamma \left[\mu_2 f_1(\sigma_0) - f_2(\sigma_0)\right]\frac{\sigma_0+\xi}{\sigma_0-\xi}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + \lambda_1,$$

где λ_1 — некоторая комплексная постоянная. Так как произвольные постоянные не влияют на напряженное состояние, то полагаем их равными нулю.

К сожалению, случай эллиптического отверстия остается единственным приятным исключением, при котором можно точно определить функцию сдвига. Во всех остальных случаях приходится применять приближенные численные методы.

Вторая основная задача возникает на практике при описании напряженного тела в случае, когда известна форма тела. Например, расчет напряжения в анизотропной пластине возле абсолютно жесткого ядра.

Известно, что в случае, когда заданы смещения для плоской задачи, контурные условия для функций $\Phi(z_1)$, $\Phi(z_2)$ имеют вид

$$\begin{gathered} 2\mathrm{Re}\left[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)\right]=g_1(s),\\ 2\mathrm{Re}\left[q_1\Phi_1(Z_1)+q_2\Phi_2(z_2)\right]=g_2(s), \end{gathered}$$

где функции $g_k(s)$ $(k=1,2)$ смещения z_1 и z_2, заданные на контуре L, как и ранее определяются формулами

$$\begin{gathered} z_1=x+\mu_1 y,\quad z_2=x+\mu_2 y,\\ \mu_1=\alpha_1+i\beta_1,\quad \mu_2=\alpha_2+i\beta_2,\quad \beta_k>0,\quad \beta_1\neq\beta_2, \end{gathered}$$

p_k, q_k $(k=1,2)$ — определенные числовые коэффициенты.

Кроме области D рассмотрим еще и области D_1, D_2, находящиеся в аффинном соответствии с первоначальной областью. При этом

$$x_k=x+\alpha_k y,\quad y_k=\beta_k y\quad (k=1,2).$$

Отобразив области D, D_1, D_2 на внутренность единичного круга, получим

$$\begin{gathered} p_1\psi_1[\alpha_1(\sigma)]+\overline{p_1\psi_1[\alpha_1(\sigma)]}+p_2\psi_2[\alpha_2(\sigma)]+\overline{p_2\psi_2[\alpha_2(\sigma)]}=f_1(\sigma),\\ q_1\psi_1[\alpha_1(\sigma)]+\overline{q_1\psi_1[\alpha_1(\sigma)]}+q_2\psi_2[\alpha_2(\sigma)]+\overline{q_2\psi_2[\alpha_2(\sigma)]}=f_2(\sigma). \end{gathered}\tag{1.15}$$

Здесь функции сдвига $\alpha_1(\sigma)$ и $\alpha_2(\sigma)$ определяются, как и в случае первой основной задачи, следующим образом:

$$\alpha_1(\sigma)=\omega_1^{-1}(\lambda_1(\omega(\sigma)),\quad \alpha_2(\sigma)=\omega_2^{-1}(\lambda_2(\omega(\sigma)).$$

Краевые условия (1.15) с математической точки зрения аналогичны условиям (1.5). Поэтому не будем повторять достаточно громоздкие выкладки, а сразу сформулируем основные результаты в виде теоремы 2.

Теорема 2. *Решение краевой задачи* (1.15) *сводится к последовательному решению задачи Гильберта, содержащей интегральные члены относительно функции $\psi_2(\xi)$ в точке $\alpha_2(\sigma)$, и обычной задачи Гильберта относительно функции $\psi_1(\xi)$ в точке $\alpha_1(\sigma)$.*

К настоящему времени смешанная задача теории упругости считается наиболее сложной из основных задач. Существует несколько формулировок смешанной задачи. В данном случае будем считать, что на часть контура, ограничивающую область, занятую телом, заданы напряжения на оставшейся части смещения.

Пусть тело занимает область D (конечную или бесконечную), ограниченную простым замкнутым контуром L. Пусть на L взяты дуги a_jb_j, $j=1,\dots,p$, не имеющие общих концов, положительные направления которых совпадают с положительным направлением контура L. Обозначим совокупность дуг L'. Совокупность оставшихся дуг обозначим L''.

Пусть на L' заданы внешние напряжения, а на L'' — смещения. Математическая модель смешанной задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2\mathrm{Re}\left[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)\right]=f_1(t), \\ 2\mathrm{Re}\left[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)\right]=f_2(t), \end{cases} \quad t\in L',$$
$$\begin{cases} 2\mathrm{Re}\left[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)\right]=f_1(t), \\ 2\mathrm{Re}\left[q_1\Phi_1(z_1)+q_2\Phi_2(z_2)\right]=f_2(t), \end{cases} \quad t\in L''. \tag{1.16}$$

Здесь $f_k(t)$ — заданные на L функции. В частности,

$$f_1(t)=-\int_0^s Y_n\,ds, \quad f_2(t)=\int_0^s X_n\,ds, \quad \text{при } t\in L',$$
$$f_1(t)=g_1(s), \quad f_2(t)=g_2(s), \qquad \text{при } t\in L''.$$

Чтобы адекватно применять модель векторных краевых задач со сдвигом решения смешанной задачи, необходимо расширить класс искомых функций, входящих в краевые условия (1.16). Будем рассматривать функции, аналитические в области и имеющие в конечном числе точек оценку $|\Phi(z)|<\dfrac{C}{|z-z_i|^\varepsilon}(\varepsilon<1)$.

Перепишем краевые условия (1.16) следующим образом.

$$\begin{cases} 2\mathrm{Re}\left[a_{11}(t)\Phi_1(z_1)+a_{12}(t)\Phi_{12}(t)\Phi_2(z_2)\right]=f_1(t), \\ 2\mathrm{Re}\left[a_{21}(t)\Phi_1(z_1)+a_{12}(t)\Phi_{22}(t)\Phi_2(z_2)\right]=f_2(t), \end{cases} \tag{1.17}$$

где $(k=1,2)$

$$a_{1k}(t)=\begin{cases} 1, \text{ если } t\in L', \\ p_k, \text{ если } t\in L'' \end{cases}, \quad a_{2k}(t)=\begin{cases} \mu_k, \text{ если } t\in L', \\ q_k, \text{ если } t\in L''. \end{cases}$$

Как и предыдущих случаях, перейдем от области D на единичный круг γ, ограниченный единичной окружностью Γ. Получим

$$\begin{aligned} &a^*_{11}(\sigma)\psi_1(\alpha_1(\sigma))+\overline{a^*_{11}(\sigma)\psi_1(\alpha_1(\sigma))}+a^*_{12}(\sigma)\psi_2(\alpha_2(\sigma))+\overline{a^*_{12}(\sigma)\psi_2(\alpha_2(\sigma))}=f_1(\sigma), \\ &a^*_{21}(\sigma)\psi_1(\alpha_1(\sigma))+\overline{a^*_{21}(\sigma)\psi_1(\alpha_1(\sigma))}+a^*_{22}(\sigma)\psi_2(\alpha_2(\sigma))+\overline{a^*_{22}(\sigma)\psi_2(\alpha_2(\sigma))}=f_2(\sigma). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь функции $a^*_{ij}(\sigma)$ принимают те же самые значения, что и функции a_{ij} в формуле (1.17), но точки разрыва изменили свои координаты следующим образом:

$$a_i(t_a), b_j(t_b)\to a^*_i(\omega^{-1}(t_a)), b^*_j(\omega^{-1}(t_b)).$$

Обозначим новые точки разрыва на контуре Γ через σ_{a_j} и σ_{b_j}. Введем новые аналитические функции, имеющие в точках σ_{a_j} и σ_{b_j} $j=1,\ldots,p$, устранимые особенности

$$\begin{cases} \psi^*_1(\xi)=\psi_1(\xi)\cdot\prod\limits_{j=1}^{p}(\xi-\sigma_{a_j})^{-0,5-i\beta}(\xi-\sigma_{b_j})^{0,5+i\beta}, \\ \psi^*_2(\xi)=\psi_2(\xi)\cdot\prod\limits_{j=1}^{p}(\xi-\sigma_{a_j})^{-0,5-i\beta}(\xi-\sigma_{b_j})^{0,5+i\beta}. \end{cases}$$

Преобразуем систему (1.18) к следующему виду

$$\tilde{a}_{11}(\sigma)\psi^*_1(\alpha_1(\sigma))+\overline{\tilde{a}_{11}(\sigma)\psi^*_1(\alpha_1(\sigma))}+\tilde{a}_{12}(\sigma)\psi^*_2(\alpha_2(\sigma))+\overline{\tilde{a}_{12}(\sigma)\psi^*_2(\alpha_2(\sigma))}=f_1(\sigma),$$
$$\tilde{a}_{21}(\sigma)\psi^*_1(\alpha_1(\sigma))+\overline{\tilde{a}_{21}(\sigma)\psi^*_1(\alpha_1(\sigma))}+\tilde{a}_{22}(\sigma)\psi^*_2(\alpha_2(\sigma))+\overline{\tilde{a}_{22}(\sigma)\psi^*_2(\alpha_2(\sigma))}=f_2(\sigma).$$

Далее систему (1.18) можно решить с помощью представленного выше алгоритма. Получим следующую систему

$$
\begin{gathered}
\psi_1^*(\alpha_1(\sigma)) = -\frac{\overline{\tilde{a}_{11}(\sigma)}}{\tilde{a}_{11}(\sigma)}\overline{\psi_1^*(\alpha_1(\sigma))} + Q_1(\sigma),\\
\psi_2^*(\alpha_2(\sigma)) + \frac{\overline{\tilde{a}_{22}(\sigma)}}{\tilde{a}_{22}(\sigma)}\overline{\psi_2^*(\alpha_2(\sigma))} + \int\limits_\gamma A(\sigma,\sigma_0)\psi_2^*(\alpha_2(\sigma_0))\,d\sigma_0 + \\
+\int\limits_\gamma B(\sigma,\sigma_0)\overline{\psi_2^*(\alpha_2(\sigma_0))}\,d\sigma_0 = Q_2(\sigma).
\end{gathered}
$$

Таким образом справедлива следующая теорема 3.

Теорема 3. *Математическая модель основной смешанной задачи для анизотропного тела в случае плоской деформации эквивалентна системе, состоящей из двух задач Гильберта с разрывными коэффициентами, одна из которых содержит интегральные члены. Из двух задач Гильберта только одна является независимой. Другая задача Гильберта содержит в краевом условии граничные значения неизвестной функции.*

Как видно из теорем 1–3 основные задачи теории упругости в математическом смысле схожи между собой. Поэтому в дальнейшем, исследуя краевые задачи на устойчивость и разрешимость, будем рассматривать первую основную задачу, а затем обобщать на остальные случаи.

§ 2. Разрешимость и устойчивость векторной модели со сдвигом основных задач теории упругости для анизотропных тел

Согласно теоремам 1–3, решения основных задач анизотропной плоской теории упругости сводится к последовательному решению краевой задачи относительно функции $\psi_2(\xi)$ вида

$$
\begin{gathered}
(\mu_1-\mu_2)\psi_2(\alpha_2(\sigma)) + \overline{(\mu_1-\mu_2)\psi_2(\alpha_2(\sigma))} + \\
+\int\limits_\Gamma A(\sigma,\sigma_0)\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))\,d\sigma_0 + \int\limits_\Gamma B(\sigma,\sigma)\overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma_0))}d\sigma_0 = Q_2(\sigma),
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

где $A(\sigma,\sigma_0)$, $B(\sigma,\sigma_0)$ — ядра Фредгольма, $Q_2(\sigma)$ — известная функция, и краевой задачи относительно функции $\psi_1(\xi)$ вида

$$
\psi_1(\alpha_1(\sigma)) = -\overline{\psi_1(\alpha_1(\sigma))} + Q_1(\sigma), \tag{2.2}
$$

где $Q_1(\sigma) = f_1(\sigma) - \psi_2(\alpha_2(\sigma)) - \overline{\psi_2(\alpha_2(\sigma))}$.

Рассмотрим уравнение (2.1). Данное уравнение является уравнением Фредгольма. Для него справедливо следующее утверждение.

Альтернатива Фредгольма. *Либо неоднородное уравнение разрешимо, какова бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение.*

Замечание 1. При равенстве нулю внешних усилий тело может двигаться равномерно и прямолинейно, однако такое движение не будет влиять на напряженное состояние тела.

Поскольку деформации равны нулю, то решением уравнения (2.1) будет функция $\psi_2(\xi) = 0$, то есть однородное уравнение Фредгольма не имеет нетривиальных решений. Следовательно, неоднородное уравнение (2.1) разрешимо при любой правой части.

Уравнение (2.2) представляет собой краевую задачу Гильберта в частном случае (задача Дирихле). Данная задача при $Q_2(\sigma) \neq 0$ всегда имеет нетривиальное решение (см. [7]).

Таким образом справедлива следующая теорема 4.

Теорема 4. *Математические модели основных задач плоской теории упругости для анизотропного тела однозначно разрешимы.*

В ряде случаев приходится заменять функции напряжений $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ на более удобные функции (многочлены). Это имеет место в случае, когда на тело действуют сосредоточенные нагрузки. Поэтому важно установить устойчивость предложенной модели относительно малых изменений параметров $f_1(\sigma), f_2(\sigma)$.

Согласно полученным результатам, функции $\psi_2(\xi)$, $\psi_1(\xi)$ имеют вид

$$\psi_2(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{Q_2(\beta_2(\sigma))\,d\sigma_0}{\sigma_0 - \xi} + \int\limits_{\Gamma} R_2(\sigma_0, \xi) Q_2(\beta(\sigma_0))\,d\sigma_0,$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{Q_1(\beta_1(\sigma))\,d\sigma_0}{\sigma_0 - \xi}.$$

В данных формулах функции $Q_1(\beta_1(\sigma_0))$ и $Q_2(\beta_2(\sigma_0))$ имеют тот же смысл, что в (2.1), (2.2).

Заменим функции $f_1(\sigma), f_2(\sigma)$ на функции $f_1^*(\sigma)$, $f_2^*(\sigma)$. Будем предполагать, что функции $f_1^*(\sigma)$, $f_2^*(\sigma)$ также принадлежат пространству гёльдеровых функций.

Функция $Q_2(\sigma)$ зависит только от функций $f_1(\sigma)$, $f_2(\sigma)$ и является гёльдеровой. Пусть во втором краевом условии функции $f_1(\sigma)$, $f_2(\sigma)$ заменены на функции $f_1^*(\sigma)$, $f_2^*(\sigma)$. Соответствующие значения правой части уравнения обозначим через $Q_2^*(\sigma)$. Так как контур L принадлежит классу Ляпунова, функции $f_1^*(\sigma)$, $f_2^*(\sigma)$ принадлежат классу Гёльдера, то справедливо неравенство

$$|Q_2(f_1, f_2) - Q_2(f_1^*, f_2^*)| \leqslant A|f_1 - f_1^*| + B|f_2 - f_2^*|,$$

где A, B — константы.

Следовательно бесконечно малое изменение параметров f_1, f_2 влечет за собой бесконечно малое изменение функции $Q_2(\sigma)$.

Так как оператор сингулярного интегрирования действует из $H_\mu(L)$ в $H_\mu(L)$, то справедливо неравенство

$$|\psi_2(Q_2) - \psi_2(Q_2^*)| \leqslant C|Q_2 - Q_2^*|.$$

Следовательно задача (2.1) устойчива относительно изменения параметров f_1, f_2. Аналогично можно показать устойчивость задачи (2.2). Таким образом справедлива следующая теорема 5.

Теорема 5. *Математические модели основных задач плоской статической теории упругости для анизотропного тела устойчивы относительно изменения параметров* $f_1(\sigma)$, $f_2(\sigma)$.

§ 3. Устойчивость математической модели относительно изменения области, занимаемой телом

Будем считать, что две области бесконечно мало отличаются друг от друга, если функции отображающие эти области на внутренность круга принадлежат классу Гёльдера и бесконечно мало отличаются друг от друга.

Заменим область D на бесконечно близкую область D_n. В этом случае в краевых условиях (2.1), (2.2) функции сдвига $\alpha_1(\sigma), \alpha_2(\sigma)$ и $\alpha_1^n(\sigma), \alpha_2^n(\sigma)$ бесконечно близки. Решение первой основной задачи теории упругости для области D имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma Q_1(\beta_1(\sigma_0))\frac{\sigma_0+\xi}{\sigma_0-\xi}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + iC_1,\\ \Psi_2(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{Q_2(\beta_2(\sigma_0))\,d\sigma_0}{\sigma_0-\xi} + \int\limits_\Gamma R(\sigma_0,\xi)Q_2(\beta_2(\sigma_0))\,d\sigma_0.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Решение первой основной задачи для области D_n имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_1^n(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma Q_1(\beta_1^n(\sigma_0))\frac{\sigma_0+\xi}{\sigma_0-\xi}\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + iC_1,\\ \Psi_2^n(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{Q_2(\beta_2^n(\sigma_0))\,d\sigma_0}{\sigma_0-\xi} + \int\limits_\Gamma R(\sigma_0,\xi)Q_2(\beta_2^n(\sigma_0))\,d\sigma_0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из уравнений (3.1), (3.2) получаем

$$\Psi_1(\xi) - \Psi_1^n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \big[Q_1(\beta_1(\sigma_0)) - Q_1(\beta_1^n(\sigma_0))\big]\cdot\frac{\sigma_0+\xi}{\sigma_0-\xi}\cdot\frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + iC_1,$$

$$\Psi_2(\xi) - \Psi_2^n(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\big[Q_2(\beta_2(\sigma_0)) - Q_2(\beta_2^n(\sigma_0))\big]\,d\sigma_0}{\sigma_0-\xi} + \int\limits_\Gamma \big[Q_2(\beta_2(\sigma_0)) - Q_2(\beta_2^n(\sigma_0))\big]R(\sigma_0,\xi)\,d\sigma_0.$$

Из последних соотношений непосредственно следует, что если $|\beta_k(\sigma_0) - \beta_k^n(\sigma_0)| \to 0$, то $|\Psi_k(\xi) - \Psi_k^n(\xi)| \to 0 (k = 1, 2)$. Таким образом справедлива следующая теорема 6.

Теорема 6. *Математические модели основных задач теории упругости для анизотропного тела устойчивы относительно изменений области занятой телом, при условии, что контур, ограничивающий область принадлежит классу кривых Ляпунова.*

Заключение. В статье проведено исследование основных задач теории упругости для анизотропного тела в случае плоской деформации. Для этого была использована математическая модель, представляющая собой краевую задачу для комплексного поля напряжений. В результате:

1) получен общий алгоритм решения основных задач анизотропной теории упругости;

2) доказана однозначная разрешимость основных задач анизотропной теории упругости;

3) доказана устойчивость математической модели относительно изменений краевых коэффициентов и формы контура.

Полученные результаты позволяют разрабатывать приближенные численные методы решения практически важных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балк М. Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНИТИ / Сер. Совр. Проб. матем. Фунд. напр. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 85. С. 187–246. http://mi.mathnet.ru/intf212
2. Векуа И. Н. Об одном методе решения основной бигармонической краевой задачи и задачи Дирихле // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 120–127.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
4. Лехницкий Г. С. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
5. Максимова Л. А., Юденков А. В. Теория стохастического потенциала в плоской теории упругости // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 134–142. http://limit21.ru/upload/arhiv/26.pdf
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
8. Редкозубов С. А., Юденков А. В., Володченков А. М. Моделирование процесса линейной деформации упругого однородного тела с помощью бианалитических функций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2006. № 1 (49). С. 128–134.
9. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968.
10. Юденков А. В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002.
11. Юденков А. В., Володченков А. М. Основные задачи теории упругости тел с прямолинейной анизотропией в стохастической теории потенциала // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. 2013. № 2 (26). С. 14–17. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19084847
12. Balk M. B. Polyanalvtic functions. Berlin: Akademie Verlag, 1991.
13. Kuritsyn S. Y., Rasulov K. M. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Т. 39. № 1. С. 97–103. https://doi.org/10.1134/S1995080218010183
14. Rasulov K. M. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Т. 39. № 1. С. 142–145. https://doi.org/10.1134/S1995080218010237

Поступила в редакцию 01.12.2019

Юденков Алексей Витальевич, д. ф.-м. н., профессор, Смоленская государственная академия физической культуры спорта и туризма, 214018, Россия, г. Смоленск, пр. Гагарина, 23.
E-mail: aleks-ydenkov@mail.ru

Володченков Александр Михайлович, к. ф.-м. н., заведующий кафедрой естественнонаучных и гуманитарных дисциплин, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Смоленский филиал, 214030, Россия, г. Смоленск, ул. Нормандия–Неман, 21;
доцент, Саратовская государственная юридическая академия, Смоленский филиал, 214012, Россия, г. Смоленск, ул. Ударников, 3.
E-mail: alexmw2012@yandex.ru

Цитирование: А. В. Юденков, А. М. Володченков. Устойчивость математических моделей основных задач анизотропной теории упругости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 112–124.

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 1. Pp. 112–124.

A. V. Yudenkov, A. V. Volodchenkov

Stability of mathematical models of the main problems of the anisotropic theory of elasticity

Keywords: boundary value problem, analytic function, elasticity theory, Fredholm equation.

MSC2010: 49N75, 91A23

DOI: 10.35634/vm200108

The boundary problems of the complex-variable function theory are effectively used while investigating equilibrium of homogeneous elastic mediums. The most complicated systems of the boundary value problems correspond to the case when an elastic body exhibits anisotropic properties. Anisotropy of the medium results in the drift of boundary conditions of the function that in general disrupts analyticity of the functions of interest. The paper studies systems of the boundary value problems with drift for analytic vectors corresponding to the primal elastic problems (first, second and mixed problems). Systems of analytic vectors with drift are reduced to equivalent systems of Hilbert boundary value problems for analytic functions with weak singularity integrators. The obtained general solution of the primal boundary value problems for the anisotropic theory of elasticity allows us to check the above problems for stability with respect to perturbations of boundary value conditions and contour shape. The research is relevant as there is necessity to apply approximate numerical methods to the boundary value problems with drift. The main research result comes to be a proof of stability of the systems of the vector boundary value problems with drift for analytic functions on the Hölder space corresponding to the primal problems of the elastic theory for anisotropic bodies in the case of change in the boundary value conditions and contour shape.

REFERENCES

1. Balk M. B. Polyanalytic functions and their generalizations, *Complex Analysis I*, Berlin: Springer, 1997, pp. 195–253. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03396-8_2
2. Vekua I. N. On one solution of the main biharmonic boundary value problem and the Dirichlet problem, *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki* (Some problems of mathematics and mechanics), Leningrad: Nauka, 1970, pp. 120–127.
3. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems), Moscow: Nauka, 1977.
4. Lekhnitskii G. S. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* (Elasticity theory for the anisotropic body), Moscow: Nauka, 1977.
5. Maksimova L. A., Yudenkov A. V. Stochastic potential theory in the two-dimensional elasticity theory, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2015, no. 4 (26), pp. 134–142 (in Russian). http://limit21.ru/upload/arhiv/26.pdf
6. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugisti* (Some primal problems of the mathematical theory of elasticity), Moscow: Nauka, 1966.
7. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye inregral'nye uravnenia* (Singular integral equations), Moscow: Nauka, 1968.
8. Redkozubov S. A., Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M. Simulation of the process of linear deformation of the elastic homogeneous body through bianalytic functions, *Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin*, 2006, no. 1 (49), pp. 128–134 (in Russian).
9. Savin G. N. *Stress distribution around holes*, Kiev: Naukova Dumka, 1968. https://archive.org/details/nasa_techdoc_19710000647
10. Yudenkov A. V. *Kraevye zadachi so sdvigom dlya polianaliticheskikh funktsii i ikh prilozheniya k voprosam staticheskoi teorii uprugosti* (Boundary value problems with drift for polyanalytic functions and their application to the static theory of elasticity), Smolensk: Smyadyn', 2002.
11. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M. The primal problems of the elasticity theory for bodies with linear anisotropy in the stochastic theory of potential, *Uchenye Zapiski. Elektronnyi Nauchnyi Zhurnal*

Kurskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2013, no. 2 (26), pp. 14–17 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19084847
12. Balk M. B. *Polyanalytic functions*, Berlin: Akademie Verlag, 1991.
13. Kuritsyn S. Yu., Rasulov K. M. On a generalized Riemann problem for metaanalytic functions of the second type, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 1, pp. 97–103. https://doi.org/10.1134/S1995080218010183
14. Rasulov K. M. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasi-harmonic functions in a non-unit disk, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 1, pp. 142–145. https://doi.org/10.1134/S1995080218010237

Received 01.12.2019

Yudenkov Aleksei Vital'evich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Smolensk State Academy of Physical Culture, Sports and Tourism, pr. Gagarina, 23, Smolensk, 214018, Russia.
E-mail: aleks-ydenkov@mail.ru

Volodchenkov Aleksandr Mikhailovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department of Natural Sciences and Humanities, Plekhanov Russian University of Economics, Smolensk Branch, ul. Normandia–Neman, 21, Smolensk, 214030, Russia;
Associate Professor, Saratov State Academy of Law, Smolensk Branch, ul. Udarnikov, 3, Smolensk, 214012, Russia.
E-mail: alexmw2012@yandex.ru

Citation: A. V. Yudenkov, A. V. Volodchenkov. Stability of mathematical models of the main problems of the anisotropic theory of elasticity, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 112–124.