ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. № 1

УДК 517.958 : 513.145.6

Л. Е. Баранова, Ю. П. Чубурин

КВАЗИУРОВНИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Исследуются собственные значения и резонансы двухчастичного дискретного оператора Шредингера с малым убывающим потенциалом.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, малый потенциал, собственное значение, квазиуровень.

Введение

Рассматривается дискретный оператор Шредингера $H = H_0 + V(n-m)$, действующий в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$, $d \in \mathbb{N}$. Здесь H_0 определяется для $\psi(n,m) \in l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ формулой

$$(H_0\psi)(n,m) = \sum_{|(n',m')-(n,m)|=1} \psi(n',m'), \quad n,m,n',m' \in \mathbb{Z}^{2d},$$

где

$$|(\nu,\mu)| = \sum_{j=1}^{d}(|\nu_j| + |\mu_j|), \quad \nu,\mu \in \mathbb{Z}^d$$

($\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_d)$ и так далее), а ненулевая вещественная функция $V(n)$, определенная на $\mathbb{Z}^d$ ($V(n-m)$ — потенциал парного взаимодействия), удовлетворяет оценке

$$|V(n)| \leqslant Ce^{-a|n|}, \tag{0.1}$$

где $C, a > 0$. В случае потенциала с (малым) параметром $\varepsilon > 0$ используем обозначение $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V(n-m)$.

Операторы подобного вида изучались ранее, в частности, исследовались свойства собственных значений и резонансов N-частичного дискретного оператора Шредингера в терминах некоторого «резольвентного» определителя Фредгольма [1], свойства собственных значений двухчастичного кластерного оператора [2]; получены результаты, относящиеся к собственным значениям двухчастичного оператора Шредингера на решетке для потенциалов нулевого радиуса действия [3]–[5].

В данной работе изучаются собственные значения и резонансы оператора $H_\varepsilon(k)$, полученного разложением H_ε в соответствующем прямом интеграле пространств (k — квазиимпульс, см. об этом ниже).

Аналогичные результаты в непрерывном случае были получены в работах [6]–[8]. Заметим, что замене координат в непрерывном случае, выделяющей движение центра масс, в дискретном случае соответствует разложение оператора в прямом интеграле пространств.

Возможная область применения рассматриваемых в данной статье операторов — это, например, теория спиновых волн [9, 10].

Оператор H коммутирует с операторами сдвига в $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ вида

$$\psi(n,m) \to \psi(n+\nu, m+\nu),\ \nu \in \mathbb{Z}^d,$$

поэтому его можно «послойно» разложить в прямом интеграле пространств [6]

$$\int_{\mathbb{T}^d}^{\oplus} l^2(\mathbb{Z}^d)dk = l^2(\mathbb{Z}^d) \otimes L^2(\mathbb{T}^d),$$

где $\mathbb{T}^d = [-\pi,\pi)^d$ — d-мерный тор. (Случай импульсного представления см., например, в работе [1]). Действительно, введем в рассмотрение унитарный оператор

$$U : l^2(\mathbb{Z}^{2d}) \to l^2(\mathbb{Z}) \otimes l^2(\mathbb{T}^d),$$
$$(U\psi)(n,k) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} e^{-i\langle k,\nu\rangle}\psi(n+\nu,\nu).$$

(через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}$.) Величина $k \in \mathbb{T}^d$ называется квазиимпульсом. Далее будем пользоваться обозначениями $\widehat{\psi}(n,k) = (U\psi)(n,k)$.

Найдем оператор UH_0U^{-1}. Имеем

$$(UH_0U^{-1}\widehat{\psi})(n,k) = (1+e^{-ik_1})\widehat{\psi}(n+(1,0,\ldots,0),k)+$$
$$+(1+e^{ik_1})\widehat{\psi}(n-(1,0,\ldots,0),k)+\ldots+(1+e^{-ik_d})\widehat{\psi}(n+(0,\ldots,0,1),k)+$$
$$+(1+e^{ik_d})\widehat{\psi}(n-(1,0,\ldots,0),k) = H_0(k)\widehat{\psi}(n,k). \qquad (0.2)$$

Таким образом, оператор UH_0U^{-1} расслаивается в семейство операторов $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, отличающихся от обычного конечно-разностного оператора коэффициентами, зависящими от k.

Очевидно, что $UV(n-m)U^{-1} = V(n)$, поэтому и оператор H унитарно эквивалентен семейству операторов $H(k) = H_0(k) + V(n)$, действующих при фиксированном $k \in \mathbb{T}^d$ в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$.

Спектр (существенный спектр) оператора A будем обозначать через $\sigma(A)$ ($\sigma_{ess}(A)$).

Обозначим через

$$F : l^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d),$$
$$(F\psi)(p) = \widetilde{\psi}(p) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \psi(n)e^{-i\langle n,p\rangle}$$

оператор преобразования Фурье. Оператор $\widetilde{H}_0(k) = FH_0(k)F^{-1}$ представляет собой оператор умножения на функцию

$$\sum_{j=1}^{d}\Big((1+e^{-ik_j})e^{ip_j} + (1+e^{ik_j})e^{-ip_j}\Big) = 4\sum_{j=1}^{d}\cos\Big(\frac{k_j}{2}\Big)\cos\Big(p_j - \frac{k_j}{2}\Big).$$

Отсюда

$$\sigma\big(H_0(k)\big) = \big(\sigma(\widetilde{H}_0(k)\big) = \Big[-4\sum_{j=1}^{d}\cos\frac{k_j}{2}, 4\sum_{j=1}^{d}\cos\frac{k_j}{2}\Big].$$

Введем обозначения $R_0(k,\lambda) = (H_0(k)-\lambda)^{-1}$, $R(k,\lambda) = (H(k)-\lambda)^{-1}$, $\widetilde{R}_0(k,\lambda) = (\widetilde{H}_0(k)-\lambda)^{-1}$.

Имеем

$$\big(R_0(k,\lambda)\psi\big)(n) = \big(F^{-1}\widetilde{R}_0(k,\lambda)F\psi\big)(n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{e^{i\langle n-m,p\rangle}dp}{4\sum\limits_{j=1}^{d}\cos(\frac{k_j}{2})\cos(p_j-\frac{k_j}{2})-\lambda}\psi(m),$$

откуда находим выражение для функции Грина (ядра резольвенты) оператора $H_0(k)$:

$$G_0(n-m,k,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{e^{i\langle n-m,p\rangle}}{4\sum\limits_{j=1}^{d}\cos(\frac{k_j}{2})\cos(p_j-\frac{k_j}{2})-\lambda}. \tag{0.3}$$

Очевидно, что $G_0(n-m,k,i) \in l^2(\mathbb{Z}^d)$. Отсюда и из неравенства (0.1) следует, что $V(n)$ представляет собой относительно компактное возмущение оператора $H_0(k)$ и, таким образом, согласно [6],

$$\sigma_{ess}\big(H_0(k)\big) = \sigma\big(H_0(k)\big) = \Big[-4\sum_{j=1}^{d}\cos\frac{k_j}{2}, 4\sum_{j=1}^{d}\cos\frac{k_j}{2}\Big].$$

В дальнейшем предполагаем, что $k_j \neq -\pi$, $j = 1, \ldots, d$ (в случае, если $k_j = -\pi$ для $j = j_1, \ldots, j_m$, то слагаемые с этими номерами в выражении, полученном в (0.2) для оператора $H_0(k)$, обращаются в нуль, и оператор действует лишь по $d - m$ координатам).

§ 1. Квазиуровни в случае двух одномерных частиц

В этом разделе предполагаем, что $d = 1$.

Обозначим через $w = \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)$ функцию Жуковского, а через

$$z = g(w) = w - \sqrt{w^2 - 1} \tag{1.1}$$

обратную к ней. Функция $g(w)$ является двузначной, она отображает область $\mathbb{C}\backslash[-1, 1]$ на внутренность или внешность единичного круга в $\mathbb{C}$, в зависимости от выбора знака корня. Листы соответствующей римановой поверхности M соединяются вдоль промежутка $(-1, 1)$, а точки ± 1 являются точками ветвления. Заметим, что первый лист, на котором по определению $g(w) < 1$, отвечает аналитическому продолжению арифметического значения корня в формуле (1.1) для $w > 1$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$G_0(n, k, \lambda) = -\frac{e^{ikn/2}}{\sqrt{\lambda^2 - 16\cos^2(k/2)}}\Big(g\big(\frac{\lambda}{4cos(k/2)}\big)\Big)^{|n|}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a = 1 + e^{-ik}$. Функция G_0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{gathered}\big(H_0(k) - \lambda\big)G_0(n, k, \lambda) = \\ = aG_0(n + 1, k, \lambda) + \overline{a}G_0(n - 1, k, \lambda) - \lambda G_0(n, k, \lambda) = \delta_{n0},\end{gathered} \tag{1.3}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Ищем G_0 в виде

$$G_0(n, k, \lambda) = Cq^{|n|}, \tag{1.4}$$

где C, q не зависят от n. Из (1.3) и (1.4) получаем для $n > 0$

$$q = \frac{|a|}{a}\left(\frac{\lambda}{2|a|} - \sqrt{\Big(\frac{\lambda}{2|a|}\Big)^2 - 1}\right) = \frac{|a|}{a}g\Big(\frac{\lambda}{2|a|}\Big) = e^{ik/2}g\Big(\frac{\lambda}{4\cos(k/2)}\Big)$$

и аналогично для $n < 0$

$$q = \frac{|a|}{a}g\Big(\frac{\lambda}{2|a|}\Big) = e^{-ik/2}g\Big(\frac{\lambda}{4\cos k/2}\Big).$$

Константу C в (1.4) найдем, записав уравнение (1.3) для $n=0$:

$$C=\left(2|a|g\Big(\frac{\lambda}{2|a|}\Big)-\lambda\right)^{-1}=\left(-\sqrt{\lambda^2-16\cos^2\frac{k}{2}}\right)^{-1}. \qquad (1.5)$$

Из формул (1.4) и (1.5) вытекает формула (1.2). Заметим, что при выборе ветви корня, для которого $|g(w)|<1$, функция $G_0(n,k,\lambda)$ экспоненциально убывает при $n\to\infty$, являясь в этом случае ядром ограниченного оператора в $l^2(\mathbb{Z})$ (резольвенты). $\square$

В дальнейшем для изучения резонансов функции Грина G_0 будем также использовать в случае, когда λ находится на втором «нефизическом» листе римановой поверхности M, на котором функция $g\big(\lambda/4\cos(k/2)\big)$, и, следовательно, $G_0(n,k,\lambda)$ экспоненциально возрастает при $n\to\infty$.

Введем в окрестности граничных точек $\pm4\cos(k/2)$ существенного спектра оператора $H(k)$ вместо λ новую переменную

$$\varkappa=\mp i\sqrt{\lambda^2-16\cos^2\frac{k}{2}}, \qquad (1.6)$$

тогда

$$\lambda=\pm\sqrt{16\cos^2\frac{k}{2}-\varkappa^2}=\pm i\sqrt{\varkappa^2-16\cos^2\frac{k}{2}}. \qquad (1.7)$$

Здесь и далее все верхние и нижние знаки соответствуют друг другу. Корень в (1.6) предполагается двухзначным, его риманова поверхность совпадает с M. Как легко видеть, изменению λ на двух листах римановой поверхности в окрестностях каждой из точек $\pm4\cos(k/2)$ отвечает изменение $\varkappa$ в окрестности нуля комплексной плоскости. При переходе значений корня

$$\sqrt{\lambda^2-16\cos^2\frac{k}{2}}=\pm i\varkappa \qquad (1.8)$$

через интервал $\big(-4\cos(k/2),4\cos(k/2)\big)$ (этот интервал является существенным спектром оператора $H_0(k)$ без граничных точек), значения функции $g\big(\lambda/4\cos(k/2)\big)$ переходят через окружность с центром в нуле и радиусом единица (см. [11]), а ее аргумент соответственно с листа на лист римановой поверхности M. В выражении (1.7) выбирается ветвь корня, соответствующая его арифметическому значению.

Введем обозначение

$$\widetilde{G}_{\pm}(n,k,\varkappa)=G_0\left(n,k,\sqrt{\varkappa^2-16\cos^2\frac{k}{2}}\right)=$$
$$=\mp\frac{e^{ikn/2}\cdot e^{\mp i\pi|n|/2}}{i\varkappa}\Big(g\big(\varkappa/4\cos(k/2)\big)\Big)^{|n|}. \tag{1.9}$$

Положим далее

$$\widetilde{G}^{reg}_{\pm}(n,k,\varkappa)=\mp\frac{e^{ikn/2}\cdot e^{\mp i\pi|n|/2}}{i\varkappa}\left(\Big(g\big(\varkappa/4\cos k/2\big)\Big)^{|n|}-\big(g(0)\big)^{|n|}\right) \tag{1.10}$$

(здесь $g(0)=-i$).

Следуя [12], будем пользоваться обозначениями (только для V) $\sqrt{V}=\sqrt{|V|}\operatorname{sgn}V$. Обозначим через $A_{\pm}(k,\varkappa)$ оператор с ядром

$$\sqrt{|V(n)|}\widetilde{G}^{reg}_{\pm}(n-m,k,\varkappa)\sqrt{V(m)}. \tag{1.11}$$

Лемма 2. *Операторнозначная функция $A_{\pm}(k,\varkappa)$ представляет собой аналитическую функцию аргумента $\varkappa$ в некоторой окрестности нуля со значениями в множестве операторов Гильберта–Шмидта.*

Доказательство. Достаточно доказать аналитичность ядра (1.11) как функции со значениями в $l^2(\mathbb{Z}^2)$. Оценим, пользуясь (0.1), норму выражения (1.11) в $l^2(\mathbb{Z}^2)$

$$\sqrt{|V(n)|}\widetilde{G}^{reg}_{\pm}(n-m,k,\varkappa)\sqrt{V(m)}\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}e^{-a(|n|+|m|)}\Big[\frac{(g(\varkappa/4\cos(k/2)))^{|n-m|}-(g(0))^{|n-m|}}{\varkappa}\Big]. \tag{1.12}$$

Имеем

$$\frac{\big(g(z)\big)^{|n|}-\big(g(0)\big)^{|n|}}{z}=\frac{|n|}{z}\int_{[0,z]}\big(g(\zeta)\big)^{|n|-1}g'(\zeta)d\zeta=-\frac{|n|}{z}\int_{[0,z]}\frac{\big(g(\zeta)\big)^{|n|}}{\sqrt{\zeta^2-1}}.$$

Следовательно, для z из δ-окрестности нуля, где $\delta<1$,

$$\Big|\frac{\big(g(z)\big)^{|n|}-\big(g(0)\big)^{|n|}}{z}\Big|\leqslant C|n|\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g(\zeta)|^{|n|}\leqslant C|n|e^{\varepsilon|n|}\leqslant C'e^{2\varepsilon|n|},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало для достаточно малых δ. Пусть $2\varepsilon < a$, тогда ряд в (1.12) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C' \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} e^{-(a-2\varepsilon)(|n|+|m|)}$$

равномерно по $\varkappa$ из δ-окрестности нуля.

Аналитичность $l^2(\mathbb{Z}^2)$-значной функции (1.11) вытекает из векторнозначного аналога теоремы Вейерштрасса: данная функция является равномерным по $\varkappa$ из δ-окрестности нуля пределом при $N \to \infty$ в смысле нормы в $l^2(\mathbb{Z}^2)$ аналитических матриц

$$\theta(N-|n|)(\theta(N-|m|)\sqrt{|V(n)|}(\widetilde{G}_{\pm}^{reg}(n-m,k,\varkappa)\sqrt{V(m)},$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. □

Обозначим через $\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\kappa)$, $\widetilde{R}^{\pm}(k,\kappa)$, резольвенты операторов $H_0(k)$, $H(k)$ соответственно после замены (1.7). Имеем, согласно (1.12), (1.13) равенство

$$\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V} = \mp\frac{(\cdot,\widetilde{\varphi}_{\pm})\varphi_{\pm}}{i\varkappa} + A_{\pm}(k,\varkappa), \tag{1.13}$$

где

$$\varphi_+(n) = \sqrt{|V(n)|}e^{i(k/2-\pi)n},\ \widetilde{\varphi}_+(n) = \sqrt{V(n)}e^{i(k/2-\pi)n}$$
$$\varphi_-(n) = \sqrt{|V(n)|}e^{ikn/2},\ \widetilde{\varphi}_-(n) = \sqrt{V(n)}e^{ikn/2},$$

резольвенту в (1.13) продолжаем по $\varkappa$ на «нефизический» лист функции Грина. Вследствие леммы 2 операторнозначная функция (1.13) мероморфна по $\varkappa$ в окрестности нуля. В силу резольвентного тождества

$$(1+\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V})^{-1} = 1-\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V}$$

и мероморфной теоремы Фредгольма [6] это справедливо и для операторнозначной функции $\sqrt{|V|}\widetilde{R}^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V}$. При этом полюса данной функции находятся в точках $\varkappa$, для которых $\ker\big(1+\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V}\big) \neq \{0\}$, то есть существует ненулевое решение уравнения

$$\varphi = -\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V}\varphi \tag{1.14}$$

в $l^2(\mathbb{Z}^2)$ (см. [13]). Соответствующие $\lambda = \pm i\sqrt{\varkappa^2 - 16\cos^2(k/2)}$ являются или собственными значениями оператора $H(k)$ (на первом листе это вытекает из (1.14), поскольку функция

$$\psi = -\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V}\varphi = -(\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)V\psi$$

принадлежит $l^2(\mathbb{Z})$ и следовательно, является собственным вектором, отвечающим λ), или резонансами (на втором листе); те и другие вместе назовем *квазиуровнями* оператора $H(k)$.

Кратностью квазиуровня будем называть

$$\dim\ker\bigl(1+\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^{\pm}(k,\varkappa)\sqrt{V}\bigr).$$

Все вышесказанное, разумеется, относится и к оператору $H_\varepsilon(k)$.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$\overline{V}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}V(n)\neq 0.$$

Тогда в некоторых окрестностях точек $\pm 4\cos(k/2)$ *для всех достаточно малых* ε *существует ровно по одному квазиуровню* $\lambda=\lambda_\varepsilon$ *кратности единица оператора* $H_\varepsilon(k)$, *для которых справедлива формула*

$$\lambda_\varepsilon=\pm\Bigl(4\cos(k/2)+\frac{\varepsilon^2\overline{V}^2}{8(\cos(k/2))}\Bigr)+O(\varepsilon^3). \tag{1.15}$$

При этом, квазиуровень, расположенный вблизи точки $4\cos(k/2)$ (*соответственно* $-4\cos(k/2)$), *является при* $V>0$ *собственным значением* (*соответственно резонансом*), *а при* $V<0$ *— резонансом* (*соответственно собственным значением*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В уравнениях (1.13) и (1.14) заменим V на εV. Имеем

$$\varphi=\pm\varepsilon\frac{(\varphi,\widetilde{\varphi}_\pm)\varphi_\pm}{i\varkappa}-\varepsilon A_\pm(k,\varkappa)\varphi. \tag{1.16}$$

Для достаточно малых $\varepsilon>0$ имеем $||\varepsilon A_\pm(k,\varkappa)||<1$ для всех $\varkappa$ из малой окрестности нуля. Для таких ε положим $\theta=(1+\varepsilon A_\pm(k,\varkappa))\varphi$ и перепишем (1.16) следующим образом:

$$\theta=\pm\varepsilon\frac{\Bigl(\bigl(1+\varepsilon A_\pm(k,\varkappa)\bigr)^{-1}\theta,\widetilde{\varphi}_\pm\Bigr)\varphi_\pm}{i\varkappa}. \tag{1.17}$$

Отсюда получаем, что эквивалентным условием существования решения уравнения (1.16) является выполнение равенства

$$\varkappa=\mp i\varepsilon\bigl((1+\varepsilon A_\pm(k,\varkappa))^{-1}\varphi,\widetilde{\varphi}_\pm\bigr). \tag{1.18}$$

Выберем достаточно малое $\delta > 0$. Решение $\varkappa$ алгебраического уравнения (1.18) в круге $\{|\varkappa| \leqslant \delta\}$ существует и единственно для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при любом выборе знака (то есть для λ вблизи любой из точек $\pm 4\cos(k/2)$). Это вытекает из теоремы Руше или из принципа сжимающих отображений по лемме 2. При этом согласно (1.18)

$$\varkappa = \mp i\varepsilon(\varphi_\pm, \widetilde{\varphi}_\pm) + O(\varepsilon^2) = \mp i\varepsilon\overline{V} + O(\varepsilon^2), \tag{1.19}$$

причем оценка $|O(\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^2$ равномерна по $\varkappa$. Для соответствующих λ имеем в силу (1.8) и (1.19)

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm\sqrt{16\cos^2(k/2) + \varepsilon^2\overline{V}^2 + O(\varepsilon^3)} = \\ &= \pm\Big(4\cos(k/2) + \frac{\varepsilon^2\overline{V}^2}{8\cos(k/2)}\Big) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Далее, вследствие (1.8) и (1.19) имеем $\sqrt{\lambda^2 - 16\cos^2(k/2)} = \varepsilon\overline{V} + O(\varepsilon^2)$, где корень двухзначен. Выражая его через (аналитически продолженный) арифметический корень вблизи точек $\pm 4\cos(k/2)$, получаем следующее равенство на первом листе римановой поверхности M :

$$\pm\sqrt{\lambda^2 - 16\cos^2(k/2)} = \varepsilon\overline{V} + O(\varepsilon^2).$$

Это следует из того, что для арифметического корня значения равны $|\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}| < 1$ при $\lambda > 1$ и $|\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}| < 1$ при $\lambda < -1$. Поэтому если $\overline{V} > 0$, то вблизи точки $4\cos(k/2)$ при малых ε находится собственное значение, а вблизи $-4\cos(k/2)$ — резонанс, а если $\overline{V} < 0$, то наоборот.

Утверждение о кратности вытекает из того, что согласно (1.17), $\theta = C\varphi_\pm$, $C = \mathrm{const}$. □

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что оценка $|O(\varepsilon^3)| \leqslant C\varepsilon^3$, где $O(\varepsilon^3)$ взято из (1.15) , равномерна по k' из окрестности k.

З а м е ч а н и е 2. Беря $k = 0$, очевидно получаем аналогичное теореме 1 утверждение для обычного конечно-разностного оператора.

§ 2. Случай $d > 1$

Рассмотрим вначале случай $d = 2$.

Имеем $V(n_0) \neq 0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}^2$. Положим $\xi_0 = \{\delta_{n_0,n}\} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$, где δ_{ij} — символ Кронекера, и пусть $\lambda_\sigma = -\big(4\cos(k_1/2) + 4\cos(k_2/2)\big) - \sigma$, $\sigma > 0$. Обозначим через $A(k, \lambda)$ оператор с ядром $\sqrt{|V(n)|}G_0(n - m, k, \lambda)\sqrt{V(m)}$.

Лемма 3. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\sigma\to 0}\big(A(k,\lambda_\sigma)\xi_0,\xi_0\big)=\pm\infty,$$

где знак $\pm$ *совпадает с* $\operatorname{sgn}V(n_0)$.

Доказательство. Положим $p_j^{(0)}=(k_j/2+\pi)\mathrm{mod}(2\pi)$, $j=1,2$ и $p_0=(p_1^{(0)},p_2^{(0)})\in\mathbb{T}^2$ (в этой точке знаменатель в выражении (0.3) равен $-\big(4\cos(k_1/2)+4\cos(k_2/2)\big)-\lambda$. Выберем достаточно малое $r>0$. Тогда

$$\big(A(k,\lambda_\sigma)\xi_0,\xi_0\big)=\frac{V(n_0)}{(2\pi)^2}\int\limits_{\{|p-p_0|\leqslant r\}}\frac{dp}{2\sum\limits_{j=1}^{2}\cos(k_j/2)\cos(p_j-k_j/2)-\lambda_\sigma}+$$
$$+\frac{V(n_0)}{(2\pi)^2}\int\limits_{\{|p-p_0|\geqslant r\}}\frac{dp}{2\sum\limits_{j=1}^{2}\cos(k_j/2)\cos(p_j-k_j/2)-\lambda_\sigma} \tag{2.1}$$

Второе слагаемое в скобках равномерно ограничено по $\sigma>0$. Первое слагаемое после замены $\varkappa=p-p_0$ и использования формулы Тейлора примет вид

$$\int\limits_{\{|x|\leqslant r\}}\frac{dx}{4\sum\limits_{j=1}^{2}\cos(k_j/2)(-1+\varkappa_j^2/2)+O(|x|^4)-\lambda_\sigma}\geqslant$$
$$\geqslant C\int\limits_{\{|y|\leqslant r'\}}\frac{dy}{|y|^2+\sigma}-C\int\limits_{\{|y|\leqslant r'\}}\frac{O(|y|^4)dy}{(|y|^2+\sigma)(|y|^2+O(|y|^4)\sigma)}.$$

Здесь $r'>0$ выбрано достаточно малым, $C>0$. После перехода к полярным координатам видно, что первое слагаемое в полученном выражении стремится к бесконечности при $\sigma\to 0$, а второе ограничено равномерно по $\sigma>0$. Вместе с (2.1) это доказывает лемму. □

Теорема 2. *Предположим, что* $d=2$ *и функция* $V(n)$ *не меняет знак. Тогда оператор* $H_\varepsilon(k)$ *для всех достаточно малых* $\varepsilon>0$ *имеет хотя бы одно собственное значение* λ_ε.

Причем имеют место оценки: $\lambda_\varepsilon<-4\big(\cos(k_1/2)+\cos(k_2/2)\big)$ *в случае* $V(n)\leqslant 0$ *и* $\lambda_\varepsilon>4\big(\cos(k_1/2)+\cos(k_2/2)\big)$ *в случае* $V(n)\geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай, если $V(n)\leqslant 0$. Оператор $A(k,\lambda)$ для $\lambda<-4\big(\cos(k_1/2)+\cos(k_2/2)\big)$, очевидно, является самосопряженным оператором Гильберта–Шмидта. Пусть

$\varepsilon > 0$, тогда в силу леммы 3 для достаточно малого $\sigma > 0$ существует отрицательное собственное значение μ оператора $A(k, \lambda_\sigma)$ такое, что $|\mu| > 1/\varepsilon$. Имеем

$$\varepsilon\sqrt{|V|}R_0(k,\lambda_\sigma)\sqrt{V}\varphi = -|\mu|\varepsilon\varphi,$$

где $\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^2)$ — собственный вектор оператора $A(k, \lambda_\sigma)$, отвечающий μ. Ненулевой вектор

$$\psi = -\frac{\varepsilon}{|\mu|\varepsilon}R_0(k,\lambda_\sigma)\sqrt{V}\varphi = -\frac{\varepsilon}{|\mu|\varepsilon}R_0(k,\lambda_\sigma)V\psi$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\big(H_0(k) + \frac{\varepsilon}{|\mu|\varepsilon}V - \lambda_\sigma\big)\psi = 0.$$

При увеличении параметра $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\mu|\varepsilon} < \varepsilon$ до $\varepsilon' = \varepsilon$ собственное значение λ_σ оператора Шредингера $H_{\varepsilon'}(k)$ монотонно убывает (см. [6], раздел 3), что и доказывает теорему. □

Теорема 3. *Оператор $H_\varepsilon(k)$ в случае $d \geqslant 3$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ не имеет собственных значений вне промежутка*

$$\sigma_{ess}(H_\varepsilon(k)) = \Big[-4\sum_{j=1}^{2}\cos(k_j/2), 4\sum_{j=1}^{2}\cos(k_j/2)\Big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности рассмотрим левую границу существенного спектра. С помощью выкладок, подобных приведенным в доказательстве леммы 3, получаем оценку

$$|G_0(n-m,k,\lambda_\sigma)| \leqslant C_1 + C_2 \int\limits_{\{|y|\leqslant r'\}} \frac{dy}{|y|^2+\sigma} =$$

$$= C_1 + C_3\int_0^{r'}\frac{\rho^{d-1}d\rho}{\rho^2+\sigma} \leqslant C < \infty$$

для некоторых $C_j, C > 0$, $j = 1,2,3$ равномерно по $n, m \in \mathbb{Z}^d$ и $\sigma > 0$. Следовательно, $||\sqrt{|V|}R_0(k,\lambda_\sigma)\sqrt{V}|| \leqslant C'$ равномерно по $\sigma > 0$ и уравнение

$$\big(1 + \varepsilon\sqrt{|V|}R_0(k,\lambda)\sqrt{V}\big)\psi = 0,$$

а вместе с ним и уравнение Шредингера $H_\varepsilon(k)\psi = \lambda\psi$ не имеет ненулевых решений для $\lambda < -4\sum\limits_{j=1}^{2}\cos(k_j/2)$ при всех достаточно малых ε. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лакаев С. Н. Связанные состояния и резонансы N-частичного дискретного оператора Шредингера // ТМФ. 1992. Т. 91. С. 51–65.
2. Маматов Ш. С., Минлос Р. А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора // ТМФ. 1989. Т. 79. С. 163–179.
3. Faria da Viega A., Ioritti L., O'Carroll M. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians // Physical Review E. 2002. Vol. 66. P. 016130-1–016130-9.
4. Абдулаев Ж. И., Лакаев С. Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера // ТМФ. 2003. Т. 136. С. 231–245.
5. Абдулаев Ж. И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке // Uzbek. Math. J. 2005. № 1. С. 3–11.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Теория операторов. М.: Мир, 1977.
7. Чубурин Ю. П. О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом // ТМФ. 1997. Т. 110. С. 443–453.
8. Chuburin Yu. P. On levels of a weakly pertubed periodic Schödinger operator // Commun. Math. Phys. 2004. T. 249.
9. Wolfram T., Callaway J. Spin-wave impurity states in ferromagnets // Physical Review. 1963. Vol. 130, № 6. P. 2207–2217.
10. Изюмов Ю. А. Скрябин Ю. Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3: Теория рассеяния. М.: Мир, 1977.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 01.10.07

L. E. Baranova, Yu. P. Chuburin

On quasi-levels of the discret two-particle Schödinger operator with a decreasing small potential

We investigate resonances and eigenvalues of the discret two-particle Schödinger operator with a decreasing small potential.

Баранова Людмила Евгеньевна
Ижевский государственный технический университет,
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 1)
E-mail: baranova__le@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович
Физико-технический институт УрО РАН,
426000, Россия, г. Ижевск,
ул. Кирова, 132
E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru