МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

© *Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов*

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Предлагается обзор современного состояния теории функционально-дифференциальных уравнений, разработанной участниками Пермского семинара. Приводятся примеры новых подходов к ряду классических задач.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, вариационные задачи, асимптотическое поведение решений.

Введение

В течение последних трех десятилетий участниками Пермского семинара [1] разрабатывалась единая теория широкого обобщения дифференциального уравнения. Проведенные исследования установили тесную связь между многочисленными задачами, изучавшимися ранее вне связи друг с другом, и позволили предложить более совершенные методы их решения.

В настоящей работе предлагается обзор общей теории и приводятся примеры новых подходов к ряду классических задач, иллюстрирующие эффективность разработанной теории.

§ 1. Уравнения в пространстве абсолютно непрерывных функций

Во второй половине минувшего века назрела необходимость в общем подходе к многочисленным классам уравнений относительно дифференцируемых функций — дифференциальным, интегро-дифференциальным, с отклоняющимся аргументом и их многочисленным «гибридам». В монографии [2] была предложена теория уравнения

$$\dot{x} = \mathcal{F}x, \tag{1}$$

обобщающего обыкновенное дифференциальное. Оператор $\mathcal{F}$ здесь действует из банахова пространства $\mathbf{AC}^n$ абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{L}^n$ суммируемых $z : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \operatorname{col}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ с действительными компонентами. Обобщение состоит в замене очень специфического «локального» оператора Немыцкого $(\mathcal{N}z)(t) = f(t, x(t))$ на общий оператор $\mathcal{F} : \mathbf{AC}^n \to \mathbf{L}^n$.

Теория уравнения (1) применима к широким классам уравнений относительно дифференцируемых функций, в том числе к уравнениям с отклоняющимся аргументом. Следует подчеркнуть, что многочисленные исследования уравнений с отклоняющимся аргументом опирались на концепцию [3, 4, 5], исходящую из специального определения понятия решения как непрерывного продолжения «начальной функции» в силу уравнения. Требование «непрерывной стыковки» было естественным в случае запаздывающего аргумента и при изучении вопросов, связанных

[1]Николай Викторович Азбелев (1922–2006) начал свою самостоятельную научную деятельность в Ижевском механическом институте в 1954 году. За 12 лет пребывания в Ижевске Николай Викторович создал научную школу, объединённую под названием Ижевский математический семинар. На протяжении всей жизни Николай Викторович периодически навещал Ижевск и оставался идейным вдохновителем этого семинара. Здесь мы публикуем последнюю статью Николая Викторовича, написанную им в 2006 г. совместно со своими учениками. — *Главный редактор «Вестника» Е. Л. Тонков.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Пермского края (гранты 06–01–00744-а, 07–01–96060-р-урал-а), программы Рособразования (РНП.2.1.3.7803) и ЗАО «ПРОГНОЗ».

с начальной задачей Коши, но при попытках подойти к краевым задачам или учитывать возможность импульсного воздействия стало приводить к существенным затруднениям. Поясним сказанное на примере простейшего скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = \nu(t), \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Пусть функции p, h и ν определены на отрезке $[a,b]$. Если «отклоняющийся аргумент» $h(t)$ принимает значения, выходящие за рамки отрезка $[a,b]$, то уравнение (2) лишено смысла на множестве функций x, определенных на этом отрезке. В таком случае необходимо ввести в рассмотрение заданную «начальную функцию» φ и записывать уравнение (2) в форме

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = \nu(t), \quad t \in [a,b], \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \text{если } \xi \notin [a,b]. \end{cases} \tag{3}$$

Если $h(t)$ принимает значения как левее, так и правее отрезка $[a,b]$, то в случае непрерывной стыковки требуется выполнение краевых условий

$$x(a) = \varphi(a), \quad x(b) = \varphi(b).$$

В противном случае остается лишь одно условие непрерывной стыковки (($x(a) = \varphi(a)$ или $x(b) = \varphi(b)$). Таким образом, под решением уравнения (2) предлагается понимать решение соответствующей краевой задачи. Если $h(t) \leqslant t$ (наиболее актуальный случай «запаздывающего» аргумента), то при естественных предположениях эта задача однозначно разрешима. В общем же случае такая краевая задача не имеет решения. В работе [6] предложено понятие решения, применимое к широкому классу уравнений с отклоняющимся аргументом. Сущность этого определения состоит в отказе от необходимости условий непрерывной стыковки, которые, кстати сказать, являются лишними с точки зрения определенности операций в левой части (2). Решением при этом называется абсолютно непрерывная функция x, удовлетворяющая уравнению (2) почти всюду на $[a,b]$.

Уравнение (2) целесообразно записывать, используя линейный оператор «внутренней суперпозиции»

$$(\mathcal{S}_h x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x[h(t)], \text{ если } h(t) \in [a,b], \\ 0, \text{ если } h(t) \notin [a,b] \end{cases}$$

и функцию

$$\varphi^h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, \text{ если } h(t) \in [a,b], \\ \varphi[h(t)], \text{ если } h(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Тогда уравнение (3) становится линейным:

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + p(t)(\mathcal{S}_h x)(t) = f(t), \quad f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(t) - p(t)\varphi^h(t).$$

Начальная функция φ нашла свое место в правой части уравнения в качестве составляющей свободного члена.

Линейное уравнение с «сосредоточенным отклонением аргумента»

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} P_k(t)(\mathcal{S}_{h_k} x)(t) = f(t), \tag{4}$$

где $n \times n$-матрицы P_k имеют суммируемые элементы, $f \in \mathbf{L}^n$ и функции h_k измеримы, является частным случаем уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + \int_a^b d_s R(t,s)x(s) = f(t),$$

так как $(\mathcal{S}_h x)(t) = \displaystyle\int_a^b d_s R_0(t,s)x(s)$, где $R_0(t,s) = -\sigma(t,s)E$, E — единичная матрица, $\sigma(t,s)$ — характеристическая функция множества

$$\{(t,s) \in [a,b]\times[a,b] : a \leqslant s \leqslant h(t) < b\} \cup \{(t,s) \in [a,b]\times[a,b) : h(t) = b\}.$$

При $h_k(t) \leqslant t$ уравнение (4) является частным уравнения с «распределенным запаздыванием аргумента»

$$(\mathcal{L}x)(t) \overset{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + \int_a^t d_s R(t,s)x(s) = f(t). \tag{5}$$

Важнейшим результатом отказа от классических тенденций в изучении уравнений с запаздывающим аргументом следует считать представление общего решения уравнения (5) в форме

$$x(t) = C(t,a)x(a) + \int_a^t C(t,s)f(s)ds. \tag{6}$$

Здесь «функция Коши» $C(t,s)$ является ядром интегрального представления решения

$$x(t) = \int_a^t C(t,s)f(s)ds$$

полуоднородной задачи Коши

$$\dot{x}(t) + \int_a^t d_s R(t,s)\,x(s) = f(t), \quad x(a) = 0. \tag{7}$$

Отметим, что для обыкновенного дифференциального уравнения $C(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$, где $X(t)$ — матрица фундаментальной системы решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$.

Доказательство представления (6) приведено в [2, 7, 8, 9] и основано на взаимно-однозначном соответствии решений $x \in \mathbf{AC}^n$ задачи (7) и решений $z \in \mathbf{L}^n$ интегрального уравнения

$$z(t) - \int_a^t R(t,s)z(s)ds = f(t). \tag{8}$$

Действительно, положив $R(t,t) = 0$, получаем с помощью подстановки $x(t) = \displaystyle\int_a^t z(s)\,ds$, $\dot{x} = z$, $x(a) = 0$ и интегрирования по частям уравнение

$$z(t) + \int_a^t d_s R(t,s)\int_a^s z(\tau)\,d\tau \equiv z(t) - \int_a^t R(t,s)z(s)\,ds = f(t).$$

В естественных предположениях интегральный оператор Вольтерры в пространстве $\mathbf{L}^n$ слабо вполне непрерывен. Спектральный радиус такого оператора равен нулю. Поэтому для уравнения (8) сходятся последовательные приближения:

$$z(t) = f(t) + (\mathcal{R}f)(t) + (\mathcal{R}^2 f)(t) + \ldots = f(t) + (\mathcal{H}f)(t),$$

где $(\mathcal{R}f)(t) = \displaystyle\int_a^t R(t,s)f(s)\,ds$. Здесь резольвента

$$(\mathcal{H}f)(t) = \int_a^t H(t,s)f(s)\,ds$$

и, таким образом,

$$x(t) = \int_a^t \left(f(s) + \int_a^s H(s,\tau)f(\tau)d\tau\right)ds = \int_a^t C(t,s)f(s)\,ds,$$

где
$$C(t,s)=E+\int_s^t H(\tau,s)\,d\tau.$$

Укоренившаяся традиция требовать непрерывную стыковку начальной и искомой функций не позволяла записывать уравнение в виде (5). Более того, на некоторых конференциях раздавались голоса в пользу предположения о том, что уравнения с запаздывающим аргументом настолько сложны, что их всестороннее изучение еще недоступно современному состоянию математического анализа... Поэтому следует подчеркнуть, что, как сказано выше, при отказе от непрерывной стыковки задача Коши для уравнения с запаздывающим аргументом сводится к классическому интегральному уравнению Вольтерры.

Тем не менее отказ от традиционных методов исследования уравнений с запаздывающим аргументом нередко был предметом споров и дискуссий. По этому поводу уместно привести высказывание Макса Планка: «Обычно новые научные истины побеждают не так, что их противников убеждают и они признают свою неправоту, а большей частью так, что противники постепенно вымирают, а подрастающее поколение усваивает истину сразу». История развития наших представлений об уравнениях с отклоняющимся аргументом освещена в [10].

§ 2. Дальнейшее обобщение

Теория уравнения (1) существенно опирается на изоморфизм между пространством $\mathbf{AC}^n$ и прямым произведением $\mathbf{L}^n\times\mathbb{R}^n$. Изоморфизм следует из того, что $x\in\mathbf{AC}^n$ определяется равенством
$$x(t)=\int_a^t z(s)\,ds+\alpha,\quad z\in\mathbf{L}^n,\quad \alpha\in\mathbb{R}^n.$$

Таким образом, каждой паре $z\in\mathbf{L}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$ ставится в соответствие единственный элемент $x\in\mathbf{AC}^n$ и каждому $x\in\mathbf{AC}^n$ ставится в соответствие единственная пара $z=\dot{x}$, $\alpha=x(a)$. Пространство $\mathbf{W}^n$ функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^1$ с абсолютно непрерывной производной $(n-1)$-го порядка тоже изоморфно прямому произведению пространства $\mathbf{L}^1$ суммируемых скалярных функций $z:[a,b]\to\mathbb{R}^1$ на $\mathbb{R}^n$. Поэтому скалярные уравнения n-го порядка в пространстве $\mathbf{W}^n$ можно изучать, пользуясь общей схемой теории уравнения (1). Более того, при замене пространства $\mathbf{L}^n$ на произвольное банахово пространство $\mathbf{B}$ сохраняются основные утверждения теории уравнения (1). Таким образом, возникает дальнейшее обобщение дифференциального уравнения. Уравнение в банаховом пространстве $\mathbf{D}$, изоморфном прямому произведению $\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$ ($\mathbf{D}\cong\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$), получило название абстрактного функционально-дифференциального.

Было бы несправедливо рассматривать новую теорию как всего лишь еще одно обобщение. Как будет показано ниже, результаты новой теории рекомендуют пересмотреть традиционные подходы к ряду классических задач и открывают новые перспективы в их исследовании.

Чтобы пояснить сущность и значение общей теории, подчеркнем, что всякую операцию, функционал или уравнение, возникающие при математическом описании той или иной проблемы, надо понимать лишь как рисунок, составленный из математических символов, пока не указано множество функций, на котором их следует определить. Таким образом, встречая конкретную задачу, следует выбрать пространство, адекватное этой задаче (определить понятие решения). Предполагая, что в пространстве $\mathbf{D}\cong\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$ уравнение удовлетворяет условиям общей теории, мы получаем возможность непосредственно пользоваться стандартными схемами анализа при исследовании рассматриваемой задачи.

§ 3. Линейное уравнение

Наиболее подробно изучено уравнение $\mathcal{L}x=f$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L}:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$. В центре линейной теории — «краевая задача» — система уравнений
$$\mathcal{L}x=f,\quad lx=\alpha, \tag{9}$$

где $lx \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{col}\{l^1x,\dots,l^mx\}$, $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{col}\{\alpha^1,\dots,\alpha^m\}$, l^i — линейные ограниченные функционалы на $\mathbf{D}$.

Если $m=n$ и задача имеет единственное решение $x\in\mathbf{D}$ для каждой пары $\{f,\alpha\}\in\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$, то это решение представимо в виде
$$x=\mathcal{G}f+\mathcal{X}\alpha. \tag{10}$$

Здесь «оператор Грина» $\mathcal{G}:\mathbf{B}\to\mathbf{D}$ и конечномерный оператор $\mathcal{X}:\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}$ непрерывны. Оператор $\mathcal{X}$ будем отождествлять далее с таким вектором $X=(x_1,\dots,x_n)$, где $x_i\in\mathbf{D}$, что $\mathcal{X}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} X\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha^i$. Элементы $x_1,\dots,x_n$ составляют «фундаментальную систему» решений однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$.

Теорема 1 ([9, с. 27, 28]). *Для любой системы $l=\{l^1,\dots,l^n\}$ линейно независимых ограниченных функционалов $l^1,\dots,l^n:\mathbf{D}\to\mathbb{R}^n$ существует такой линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_0:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$, что краевая задача*
$$\mathcal{L}_0x=z,\quad lx=\alpha$$
имеет единственное решение $x\in\mathbf{D}$ при каждой паре $\{z,\alpha\}\in\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$ и, следовательно, решение такой задачи имеет форму
$$x=\mathcal{G}z+\mathcal{X}\alpha.$$

Заметим, что если $\mathbf{B}=\mathbf{L}^n$, то оператор Грина $\mathcal{G}:\mathbf{B}\to\mathbf{D}$ является интегральным оператором [8]
$$(\mathcal{G}z)(t)=\int_a^b G(t,s)z(s)\,ds.$$

Зафиксируем однозначно разрешимую задачу
$$\mathcal{L}_0x=z,\quad l_0x=\alpha \tag{11}$$
и запишем ее решение в виде
$$x=\mathcal{W}z+\mathcal{U}\alpha \tag{12}$$
($\mathcal{W}:\mathbf{B}\to\mathbf{D}$ — оператор Грина задачи (11), $\mathcal{U}\alpha=U\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\alpha^i$, $u_1,\dots,u_n$ — фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}_0x=0$). Тогда изоморфизм $\mathcal{J}=\{\mathcal{W},\mathcal{U}\}:\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}$ ($\mathcal{J}^{-1}=[\mathcal{L}_0,l_0]:\mathbf{D}\to\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$) определяется парой операторов $\mathcal{W}:\mathbf{B}\to\mathbf{D}$ и $\mathcal{U}:\mathbb{R}^n\to\mathbf{D}$ ($\mathcal{L}_0:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$, $l_0:\mathbf{D}\to\mathbb{R}^n$). Норму в $\mathbf{D}\cong\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$ определяем равенством
$$\|x\|_{\mathbf{D}}=\|\mathcal{L}_0x\|_{\mathbf{B}}+\|l_0x\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Относительно линейного оператора $\mathcal{L}:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$ предполагаем, что оператор нётеров индекса n (оператор $\mathcal{Q}\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{L}\mathcal{W}:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ представим в виде $\mathcal{Q}=\mathcal{P}+\mathcal{V}$, где $\mathcal{P}$ — обратимый оператор, а $\mathcal{V}$ — оператор конечномерный).

Отметим утверждение, выделяющее важный класс линейных операторов.

Теорема 2 ([9, с. 25]). *Следующие утверждения эквивалентны.*

a) Уравнение $\mathcal{L}x=f$ разрешимо при любом $f\in\mathbf{B}$ (область значений оператора $\mathcal{L}$ совпадает с пространством $\mathbf{B}$).

b) Существует такой линейный ограниченный вектор-функционал $l:\mathbf{D}\to\mathbb{R}^n$, что задача (9) имеет единственное решение при каждой паре $\{f,\alpha\}\in\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$.

c) Размерность ядра оператора $\mathcal{L}$ равна n (фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}x=0$ состоит из n элементов).

Разрешимость задачи (9) можно попытаться установить на основе предлагаемого ниже критерия однозначной разрешимости этой задачи.

Теорема 3 ([9, с. 30]). *Пусть «модельная задача» (11) выбрана так, что* $l_0 = l$. *Тогда существование ограниченного обратного оператора* $[\mathcal{L}\mathcal{W}]^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *необходимо и достаточно для однозначной разрешимости задачи* (9).

Так как $\mathcal{L}\mathcal{W} = \mathcal{I} - (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}$, где $\mathcal{I}$ — тождественный оператор, то оценка

$$\|(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} < 1 \tag{13}$$

гарантирует однозначную разрешимость задачи (9).

Общая теория непосредственно приводит к фундаментальным утверждениям о линейных уравнениях с отклоняющимся аргументом в пространстве $\mathbf{D} \cong \mathbf{L}^n \times \mathbb{R}^n$. Более того, краевые задачи для таких уравнений, разрешенных относительно старшей производной, оказываются эквивалентными классическим интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что между решениями $x \in \mathbf{D}$ краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом и решениями $z \in \mathbf{L}^n$ соответствующего интегрального уравнения имеется взаимно-однозначное соответствие.

В качестве иллюстрации сказанному рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) + p(t)(\mathcal{S}_h x)(t) = f(t)$$

с измеримой h и суммируемыми p и f. Выберем краевую задачу

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = \alpha^1, \quad x(b) = \alpha^2 \tag{14}$$

и возьмем в качестве модельной задачу $\ddot{x} = z$, $x(a) = \alpha^1$, $x(b) = \alpha^2$.

Тогда

$$(\mathcal{W}z)(t) = \int_a^b W(t,s)z(s)\,ds, \quad (\mathcal{U}\alpha)(t) = \frac{b-t}{b-a}\,\alpha^1 + \frac{t-a}{b-a}\,\alpha^2,$$

$$W(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(a-s)(t-b)}{b-a}, & \text{если } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ \dfrac{(a-t)(b-s)}{b-a}, & \text{если } a \leqslant t < s \leqslant b \end{cases}$$

(считаем, что $W(t,s) = 0$ вне $[a,b] \times [a,b]$).

В результате « W -подстановки» (12) (замены переменных по формуле (12)) получим в пространстве $\mathbf{L}^1$ уравнение Фредгольма

$$z(t) - \int_a^b K(t,s)z(s)\,ds = \psi(t),$$

где

$$\int_a^b K(t,s)z(s)\,ds = ((\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}z)\,(t),$$

$$\psi = f + (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})(\psi_1\alpha^1 + \psi_2\alpha^2), \quad \psi_1(t) = \frac{b-t}{b-a}, \quad \psi_2(t) = \frac{t-a}{b-a}.$$

Если это уравнение имеет единственное решение $z \in \mathbf{L}^1$ для каждого $\psi \in \mathbf{L}^1$ (оператор $\mathcal{L}\mathcal{W} : \mathbf{L}^1 \to \mathbf{L}^1$ имеет ограниченный обратный), то

$$z = \psi + \mathcal{H}\psi, \quad (\mathcal{H}\psi)(t) = \int_a^b H(t,s)\psi(s)\,ds,$$

где резольвентный оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}^1 \to \mathbf{L}^1$ вполне непрерывен. Таким образом, для оператора Грина задачи (14) имеем:

$$(\mathcal{G}f)(t) = (\mathcal{W}z)(t) = (\mathcal{W}(f + \mathcal{H}f))(t) = \int_a^b W(t,s)\left\{f(s) + \int_a^b H(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\right\} ds,$$

и, следовательно, функция Грина

$$G(t,s) = W(t,s) + \int_a^b W(t,\tau)H(\tau,s)\,d\tau.$$

Фундаментальная система x_1, x_2 решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ определяется равенствами

$$x_1 = \psi_1 + \mathcal{W}(\mathcal{I}+\mathcal{H})(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\psi_1, \quad x_2 = \psi_2 + \mathcal{W}(\mathcal{I}+\mathcal{H})(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\psi_2.$$

Уравнения, не разрешенные относительно производной, например, уравнения вида

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dot{x}(t) - B(t)(\mathcal{S}_h\dot{x})(t) + \int_a^b d_sR(t,s)\,x(s) = f(t), \quad t\in[a,b],$$

тоже преобразуются с помощью W-подстановки (12), где $z = \dot{x}$, $\alpha = l_0x = x(a)$, к эквивалентному, но более сложному уравнению

$$\mathcal{L}(\mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha) = z - (\mathcal{S}+\mathcal{K})z + \psi = f,$$

где

$$(\mathcal{S}z)(t) = B(t)(\mathcal{S}_hz)(t), \quad (\mathcal{K}z)(t) = \int_a^b R(t,s)z(s)ds, \quad \psi = -R(\cdot,a)\alpha.$$

Эквивалентность здесь, как и выше, понимается как взаимно-однозначное соответствие между решениями задачи $\mathcal{L}x = f$, $l_0x = x(a) = \alpha$ и уравнения $\mathcal{L}\mathcal{W}z = f - \mathcal{L}\mathcal{U}\alpha$. Здесь возникли серьезные вопросы с условиями действия оператора $\mathcal{S}_h$ в пространстве суммируемых функций. А именно оператор $\mathcal{S}_h : \mathbf{AC}^n \to \mathbf{L}^n$ с измеримым $h(\cdot)$ ограничен, но для действия оператора $\mathcal{S}_h : \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$ оказались необходимыми условия

$$\mathrm{mes}(e) = 0 \Rightarrow \mathrm{mes}(h^{-1}(e)) = 0$$

для любого множества $e \subset [a,b]$, где mes — мера Лебега.

Уместно отметить, что игнорирование этого условия нередко было причиной неточностей и ошибок, хотя общие положения о действии оператора внутренней суперпозиции можно было найти в известной монографии Н. Данфорда и Дж. Шварца [14].

Фундаментальные теоремы об уравнении $\mathcal{L}x = f$ предполагают фредгольмовость оператора $\mathcal{I} - (\mathcal{S}+\mathcal{K})$ в пространстве $\mathbf{L}^n$. Гипотеза [11] о том, что этот оператор фредгольмов тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{I} - \mathcal{S} : \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^n$ обратим, была всесторонне изучена и доказана А.В. Чистяковым [12].

Следует подчеркнуть, что проблемы об уравнениях с отклоняющимся аргументом были решены еще Тамбовским семинаром [10] до появления теории уравнения (1). При этом рациональность их решения разрушила миф об исключительности уравнений с отклоняющимся аргументом и указала путь к построению единой теории.

§ 4. Нелинейные уравнения и их приводимость

Утверждения общей теории о квазилинейных уравнениях

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$$

предполагают полную непрерывность оператора $\mathcal{F} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ и посвящены условиям разрешимости краевой задачи

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}x, \quad lx = \alpha. \tag{15}$$

Если «укороченная» задача $\mathcal{L}x = f$, $lx = \alpha$ однозначно разрешима, $\mathcal{G}$ — ее оператор Грина и ν — решение задачи $\mathcal{L}x = 0$, $lx = \alpha$, то задача (15) эквивалентна уравнению второго рода

$$x = \mathcal{G}\mathcal{F}x + \nu.$$

Цикл работ А. Р. Абдуллаева с соавторами (см., например, [13]) посвящен случаю, когда укороченная задача не является однозначно разрешимой, а оператор $\mathcal{F}$ имеет «подлинейный» рост:

$$\lim_{\|x\|_{\mathbf{D}}\to\infty}\frac{\|\mathcal{F}x\|_{\mathbf{L}}}{\|x\|_{\mathbf{D}}}=0.$$

Уравнение вида

$$\dot{x}(t)=(\mathcal{F}x)(t)\stackrel{\text{def}}{=}f(t,(\mathcal{S}_h x)(t),(\mathcal{S}_g\dot{x})(t))$$

появилось при описании некоторых прикладных задач. Оно не укладывается в рамки упомянутых выше исследований, так как оператор $\mathcal{F}:\mathbf{AC}^n\to\mathbf{L}^n$ не обладает свойством полной непрерывности. В работе [15] предложено понятие «приводимости». А именно уравнение $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$ называется приводимым (к виду $\mathcal{L}x=\mathcal{F}_0x$), если существует такой вполне непрерывный оператор $\mathcal{F}_0:\mathbf{D}\to\mathbf{B}$, что множества всех решений уравнений $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$ и $\mathcal{L}x=\mathcal{F}_0x$ совпадают. Таким образом, в случае приводимости задачу $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$, $lx=\alpha$ можно заменить на эквивалентную $\mathcal{L}x=\mathcal{F}_0x$, $lx=\alpha$. При этом явное представление оператора $\mathcal{F}_0$ не требуется, если по виду исходной задачи можно построить необходимые априорные оценки. Такого рода ситуации приведены в [15]. Уравнение $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$ приводимо тогда и только тогда, когда множество всех решений таково, что каждая его ограниченная замкнутая часть компактна [9]. Следует подчеркнуть, что приводимость необходима для корректной разрешимости задачи $\mathcal{L}x=\mathcal{F}x$, $lx=\alpha$, а корректная разрешимость краевой задачи при каком-либо $l:\mathbf{D}\to\mathbb{R}^n$ достаточна для приводимости уравнения. Попыткам развить учение о приводимости посвящена работа Ю. В. Непомнящих [16].

Условие полной непрерывности оператора $\mathcal{F}$ нарушено также для уравнения с «авторегулированием»

$$\dot{x}(t)=(\mathcal{F}x)(t)\stackrel{\text{def}}{=}f(t,(\mathcal{H}x)(t)),\quad t\in[a,b],$$

где

$$(\mathcal{H}x)(t)=\begin{cases}x[h(t,x(t))], & \text{если } h(t,x(t))\geqslant a,\\ \varphi[h(t,x(t))], & \text{если } h(t,x(t))<a,\end{cases}$$

$h(\cdot,\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ заданы, $h(t,x)\leqslant t$ для всех $t\in[a,b]$ и всех $x\in\mathbb{R}^1$.

В последнем случае оператор $\mathcal{F}$ не является, вообще говоря, даже непрерывным. У таких уравнений были обнаружены неожиданные особенности, исключающие применение традиционных методов. Например, в случае вольтеррова оператора $\mathcal{F}$ решение задачи Коши может не быть продолжаемым (в отличие от изучавшихся ранее уравнений $\dot{x}=\mathcal{F}x$ с вполне непрерывным $\mathcal{F}$). Более того, никакая гладкость функций f, h и φ не гарантирует единственность решения задачи Коши и даже локальную разрешимость этой задачи ... Признаки приводимости для уравнений с авторегулируемым запаздыванием получены, в частности, в кандидатской диссертации М. Б. Ермолаева [17] и докторской диссертации Е. С. Жуковского [18].

Лейтмотивом приложений общей теории является выбор пространства, адекватного рассматриваемой задаче. Конечно, идея целесообразного выбора пространства (например, среди различных лебеговых) не нова. Но выбор пространства $\mathbf{D}\cong\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n$ позволяет на основе теории уравнений в этом пространстве непосредственно использовать классические схемы при решении конкретных задач.

Как уже было подчеркнуто выше, значение теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения не ограничивается тем, что она устанавливает единство широких классов уравнений и позволяет изучать эти классы, непосредственно опираясь на стандартные теоремы анализа. Эта теория убедительно настаивает на новых подходах к решению ряда классических и новых задач. В качестве подтверждения сказанного ограничимся следующими вопросами.

§ 5. Асимптотическое поведение решений. Краевые задачи «на полуоси»

Если элементы $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbf{D} \cong \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ обладают какими-нибудь специфическими особенностями, например $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}x = f$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ однозначно разрешима какая-нибудь краевая задача (9), то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Это следует из приводимой ниже теоремы.

Теорема 3 (bis). *Пусть $\mathcal{W} : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$ — оператор Грина модельной краевой задачи и U — фундаментальная матрица модельного уравнения $\mathcal{L}_0 x = 0$. Пусть, далее, оператор $\mathcal{L}$, действующий из $\mathbf{D}$ в $\mathbf{B}$, ограничен, $\mathcal{G}$ — оператор Грина краевой задачи $\mathcal{L}x = f$, $lx = 0$ и X — фундаментальная матрица уравнения $\mathcal{L}x = 0$. Тогда для выполнения равенства*

$$\mathcal{W}\mathbf{B} + \mathcal{U}\mathbb{R}^n = \mathcal{G}\mathbf{B} + \mathcal{X}\mathbb{R}^n \tag{16}$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{L}\mathcal{W}$ имел ограниченный обратный $\mathcal{L}\mathcal{W}^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

Следствие. *Если оператор $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ ограничен и выполнено неравенство* (13), *то выполнено равенство* (16).

В случае равенства (16) (совпадения пространства решений модельного и исследуемого уравнений) мы говорим, что уравнение $\mathcal{L}x = f$ обладает свойством $\mathbf{D}$ или, короче, уравнение $\mathbf{D}$-устойчиво.

Отметим связь понятия $\mathbf{D}$-устойчивости с работами Х. Л. Массеры и Х. Х. Шеффера о допустимости пар пространств [19] и работами Е. А. Барбашина о сохранении свойств решений при накоплении возмущений [20]. Не останавливаясь на возможных применениях $\mathbf{D}$-свойства для изучения различных асимптотических свойств решений уравнений, ограничимся здесь некоторыми обобщениями классических понятий устойчивости и стабилизируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

5.1. Устойчивость решений уравнений с вольтерровым оператором. Пусть модельное уравнение $\mathcal{L}_0 x = z$ и пространство $\mathbf{B}$ выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Например, $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$. Тогда, положив $\mathcal{L}_0 x \overset{\text{def}}{=} \dot{x} + x = z$, принимаем в качестве $\mathbf{B}$ пространство $\mathbf{L}_\infty$ измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbf{D}$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathcal{W}z)(t) + U(t)\alpha = \int_0^t e^{-(t-s)} z(s)\, ds + \alpha e^{-t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbf{B}.$$

Эти решения ограничены $\left(\sup\limits_{t \geqslant 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty\right)$ и их производная $\dot{x} = -x + z$ принадлежит пространству $\mathbf{L}_\infty$.

$\mathbf{D}$-устойчивость при соответствующем выборе пространства $\mathbf{D}$ (модельного уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ и пространства $\mathbf{B}$) гарантирует ту или иную устойчивость в классическом смысле. Следует подчеркнуть при этом, что в силу теоремы 3 (bis) критерием $\mathbf{D}$-устойчивости является существование ограниченного обратного оператора $(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, который записывается в явном виде. $\mathbf{D}$-устойчивость гарантируется оценкой (13). Выбор модельной задачи и установление оценки (13) получили название W-метода. Этот метод распространяется на квазилинейные уравнения, где устанавливается «локальная» (в окрестности данного решения) $\mathbf{D}$-устойчивость. Эффективность W-метода иллюстрируется примерами в [1, 9, 21, 23, 24].

Обратимость оператора $\mathcal{L}\mathcal{W} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ необходима и достаточна для $\mathbf{D}$-устойчивости, но мы обычно ограничиваемся признаком обратимости в виде оценки (13). Модельных уравнений с данными асимптотическими свойствами решений много и произвольность выбора уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ не обеспечивает для всех допустимых $\mathcal{L}_0$ одинаково хорошие признаки $\mathbf{D}$-устойчивости. Это позволяет ряду критиков высказывать сомнения по поводу эффективности

W-метода. Однако, фиксируя модельное уравнение, мы можем попытаться улучшить результат, применяя W-метод к некоторому уравнению, эквивалентному данному (эквивалентность здесь понимаем как наличие взаимно-однозначного соответствия между решениями преобразованного и данного уравнений). Например (см. [23, 24]), с помощью W-метода удается доказать критерий экспоненциальной устойчивости уравнения $\dot{x} = Ax + f$ с постоянной матрицей A в терминах собственных чисел этой матрицы. Или, например (см., [21]), получить аналоги знаменитого признака экспоненциальной устойчивости А. Д. Мышкиса (см. [4, 22]) для уравнения

$$\dot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = \nu(t), \quad t \in [0,\infty), \quad x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } \xi < 0,$$

где $p(t) > 0$ почти всюду на $[0,\infty)$, в виде неравенства

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \geqslant 0} \int_{h^+(t)}^{t} p(s)\,ds < 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

или в виде неравенств

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \geqslant 0} \int_{h^+(t)}^{t} p(s)\,ds < \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname*{vrai\,inf}_{t \geqslant 0} \int_{h^+(t)}^{t} p(s)\,ds > \frac{1}{2},$$

где $h^+(t) = \max\{h(t), 0\}$.

Применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям понятие $\mathbf{D}$-устойчивости является естественным обобщением классических понятий устойчивости. Исследования по $\mathbf{D}$-устойчивости систематизированы в монографии [23], переведенной издательством «Taylor and Francis» на английский язык [24]. Такое обобщение позволяет упростить доказательство некоторых классических теорем и распространить их на широкие классы уравнений с обыкновенными производными. Докторская диссертация П. М. Симонова [25] посвящена применению теории $\mathbf{D}$-устойчивости к исследованию динамических моделей.

5.2. Краевые задачи на полуоси. Задача о стабилизации решений. Краевые задачи на полуоси можно изучать, используя соответствующие пространства $\mathbf{D} \cong \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$. Например, задача

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + \int_0^t d_sR(t,s)\,x(s), \quad t \in [0,\infty),$$

$$\ell x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} x(t) = \beta$$

(к такой задаче сводятся, в частности, некоторые вопросы стабилизации решений) оказывается фредгольмовой в соответствующем пространстве $\mathbf{D} \cong \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$. Такое пространство порождается, например, модельным уравнением $\mathcal{L}_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = z$ и пространством $\mathbf{B}$ функций $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, для которых существует $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t \|z(s)\|_{\mathbb{R}_n}\,ds$. Элементы $x \in \mathbf{D}$ здесь определяются равенством $x(t) \int_0^t z(s)\,ds + \alpha$, где $z \in \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B} = \mathbf{L}_1$ — пространство суммируемых функций $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$. Если матрица $R(t,s)$ гарантирует оператору $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ нетеровость индекса n, то к сформулированной задаче применима общая теория краевых задач, изложенная в [2, 9].

Рассмотрим задачу о стабилизации решения x уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ к заданной функции φ. Эту задачу запишем в виде

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}x, \quad \lim_{t\to\infty} (x(t) - \varphi(t)) = 0,$$

где $\mathcal{L}$ — линейный, $\mathcal{F}$ — нелинейный операторы, определенные на некотором множестве функций $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$. С помощью подстановки $y = x - \varphi$ эта задача сводится к «краевой задаче на полуоси»:

$$\mathcal{L}y = \mathcal{F}_1 y, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Пример 1. «Предельная» краевая задача

$$(\mathcal{L}x)(t) \overset{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + p(t)(S_h x)(t) = f(t), \quad t \geqslant 0,$$

$$\ell x \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty} x(t) = \beta,$$

где функции $p,\ h : [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$ измеримы, причем p локально суммируема, а $h(t) \leqslant t$ при всех $t \geqslant 0$, однозначно разрешима при любых $f \in \mathbf{L}_1$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{b\geqslant 0} \left\{ \operatorname*{vrai\,inf}_{t\geqslant b} h(t) \right\} = \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |p(s)|\, ds < \infty.$$

§ 6. Вариационное исчисление

Общая теория функционально-дифференциальных уравнений позволяет предложить новый эффективный подход к задачам вариационного исчисления, при котором удается обойти ряд трудностей, возникающих при подходе классическом [26].

Задача

$$\mathcal{I}(x) \to \min, \quad lx \overset{\text{def}}{=} \operatorname{col}\{l^1 x, \ldots, l^n x\} = \alpha \tag{17}$$

о минимуме функционала

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b f(s, (\mathcal{T}_1 x)(s), \ldots, (\mathcal{T}_\mu x)(s))\, ds$$

с линейными ограничениями $lx = \alpha$ рассматривается в банаховом пространстве $\mathbf{D}$ функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, изоморфном прямому произведению $\mathbf{L}_2 \times \mathbb{R}^n$, где $\mathbf{L}_2$ — пространство суммируемых с квадратом функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, $\|z\|_{\mathbf{L}_2} = \left\{ \int_a^b z^2(s)\, ds \right\}^{1/2}$. Предполагаются ограниченными линейные операторы $\mathcal{T}_i : \mathbf{D} \to \mathbf{L}_2$ и линейные функционалы l^i на $\mathbf{D}$.

Путем W-подстановки (12) строится вспомогательный функционал $\mathcal{I}_1(z) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{I}(\mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha)$ в пространстве $\mathbf{L}_2$. Точки минимума $x_0 \in \mathbf{D}$ задачи (17) и точки минимума $z_0 \in \mathbf{L}_2$ функционала $\mathcal{I}_1(z)$ оказываются взаимно-однозначно связанными равенствами $x_0 = \mathcal{W}z_0 + \mathcal{U}\alpha$, $z_0 = \mathcal{L}_0 x_0$, $\alpha = lx$. Таким образом, задача (17) об условном минимуме в пространстве $\mathbf{D}$ сводится к задаче о безусловном минимуме функционала $\mathcal{I}_1(z)$ в очень удобном для исследования пространстве $\mathbf{L}_2$.

6.1. Квадратичный функционал. Для квадратичного функционала

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m (\mathcal{T}_{1i} x)(s)(\mathcal{T}_{2i} x)(s) \right] + (\mathcal{T}_0 x)(s) \right\} ds$$

в пространстве $\mathbf{D} \cong \mathbf{L}_2 \times \mathbb{R}^n$ задача $\mathcal{I}(x) \to \min$, $lx = \alpha$, как сказано выше, сводится к задаче о безусловном минимуме функционала $\mathcal{I}_1(z) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{I}(\mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha)$ в пространстве $\mathbf{L}_2$. Следуя методике, предложенной в [27] для решения последней задачи, определим оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$ и функцию $f \in \mathbf{L}_2$ равенствами

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\mathcal{Q}_{1i}^* \mathcal{Q}_{2i} + \mathcal{Q}_{2i}^* \mathcal{Q}_{1i} \right), \quad f = -\mathcal{Q}_0^*(1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\mathcal{Q}_{1i}^* \mathcal{T}_{2i} + \mathcal{Q}_{2i}^* \mathcal{T}_{1i} \right) u.$$

Здесь $\mathcal{Q}_{ji} = \mathcal{T}_{ji}\mathcal{W}$, $j = 1,2$, $i = 1,\ldots,m$, $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{T}_0 \mathcal{W}$, $\mathcal{Q}_{ji}^*$ ($\mathcal{Q}_0^*$) — оператор, сопряженный к оператору $\mathcal{Q}_{ji} : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$ ($\mathcal{Q}_0 : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$), u — решение полуоднородной модельной задачи $\mathcal{L}_0 x = 0$, $lx = \alpha$.

В [9, 27, 28] приводится доказательство следующего критерия.

Минимум функционала $\mathcal{I}_1(z)$ достигается в точке z_0 тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{H}$ положительно определен, а точка z_0 удовлетворяет уравнению $\mathcal{H}z = f$.

Пример 2. Упругая линия нагруженной балки, согласно вариационному принципу, доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b \Big\{\varphi(s)x''^2(s) - q(s)x(s)\Big\}\,ds$$

с краевыми условиями $x(\tau_i) = 0$, $i = 1,\ldots,N$, где τ_i — точки опоры, $\varphi = \dfrac{EI}{2}$, E — модуль упругости материала, I — момент инерции поперечного сечения балки, $q(s)$ — удельная нагрузка.

Рассмотрим балку, покоящуюся на двух опорах в концах балки ($\tau_1 = a$, $\tau_2 = b$). Положим $\mathcal{T}_{11}x = x''$, $\mathcal{T}_{21}x = \varphi x''$ и в качестве модельной возьмем задачу $\varphi x'' = z$, $x(a) = x(b) = 0$. Тогда

$$(\mathcal{W}z)(t) = \int_a^b \frac{G(t,s)}{\varphi(s)} z(s)ds, \quad G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(a-s)(t-b)}{b-a} & \text{при } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ \dfrac{(a-t)(b-s)}{b-a} & \text{при } a \leqslant t < s \leqslant b, \end{cases}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина задачи $x'' = z$, $x(a) = x(b) = 0$.

Таким образом, имеем:

$$\mathcal{H}z = \varphi z, \quad f(t) = \int_a^b G(s,t)q(s)\,ds = \int_a^b G(t,s)q(s)\,ds, \quad z_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\int_a^b G(t,s)q(s)\,ds,$$

и упругая линия $x(t)$ определяется равенством

$$x(t) = \int_a^b \frac{G(t,s)}{\varphi(s)} \int_a^b G(t,\xi)q(\xi)\,d\xi\,ds.$$

Отметим, что здесь и ниже не требуется, в отличие от классической теории, дифференцируемость функции φ.

Случай трех и более опор рассмотрен в [28].

Пример 3. Критические обороты вращения вала. Упругая линия $x(t)$ круглого вала при числе оборотов n доставляет минимум функционалу

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}\int_a^b \Big\{\varphi(s)x''^2(s)) - n^2 r(s)x^2(s)\Big\}\,ds$$

с краевыми условиями $x(\tau_i) = 0$, $i = 1,\ldots,N$, где τ_i — точки опоры. Здесь $\varphi = EI$ и $r(s)$ — распределенная масса вала. Если $x(t) \equiv 0$, то вал спокойно вращается, если же $x(t) \not\equiv 0$, то вал начинает трясти. Число оборотов n при этом называют критическим числом оборотов.

Таким образом, точки спектра положительно определенного оператора $\mathcal{H}$ однозначно определяют число критических оборотов.

Рассмотрим случай двухопорного вала ($\tau_1 = a$, $\tau_2 = b$). Воспользуемся модельной задачей из предыдущего примера и положим $\mathcal{T}_{11}x = x''$, $\mathcal{T}_{21}x = \varphi x''$, $\mathcal{T}_{12}x = -\mathcal{T}_{22}x = n\sqrt{r}x$. Тогда $\mathcal{H} = z - n^2 r\mathcal{W}^*\mathcal{W}$. Условие $\|n^2 r\mathcal{W}^*\mathcal{W}\|_{\mathbf{L}_2\to\mathbf{L}_2} < 1$ гарантирует положительную определенность оператора $\mathcal{H}$ и единственность решения уравнения $\mathcal{H}z = 0$ [29].

6.2. Переопределенная задача. Если задача $\mathcal{I}(x) \to \min$, $l^i x = \alpha^i$, $i = 1,\ldots,N$ рассматривается в пространстве $\mathbf{D} \cong \mathbf{L}_2 \times \mathbb{R}^n$, причем $N > n$, то функционал может не достигать минимума: пространство, порождаемое модельной задачей, оказывается слишком узким. В этом случае можно воспользоваться методом множителей Лагранжа. А именно выбирается n краевых условий (без ограничения общности можно выбрать первые $l^1,\ldots,l^n$).

Далее с помощью W-подстановки вопрос сводится к задаче $\mathcal{I}_1(z) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{I}(\mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha) \to \min$, $\lambda^i z \overset{\text{def}}{=} l^{n+i}\mathcal{W}z = \beta^i$, где $\beta^i = \alpha^{n+i} - l^{n+i}\mathcal{U}\alpha$, $i = 1, \ldots, N-n$, в пространстве $\mathbf{L}_2$. Последняя задача решается методом множителей Лагранжа.

6.3. Некоторые априорные неравенства. Пусть на пространстве $\mathbf{D} \cong \mathbf{L}_2 \times \mathbb{R}^2$ функционал

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^m (\mathcal{T}_{1i}x)(s)(\mathcal{T}_{2i}x)(s)\,ds$$

с однородными краевыми условиями достигает своего минимума в точке $x(t) \equiv 0$. Тогда будет выполняться неравенство $\mathcal{I}(x) > 0$ на множестве $\mathbf{D}_0 = \{x \in \mathbf{D} : lx = 0, x(t) \not\equiv 0\}$.

Пример 4. Функционал

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b \left(\dot{x}^2(s) - p(s)x^2(s)\right)\,ds, \quad p(t) \geqslant 0,$$

с краевыми условиями $x(a) = x(b) = 0$ достигает минимума тогда и только тогда, когда решение задачи Коши $\ddot{x} + p(t)x = 0$, $x(a) = 0$, $\dot{x}(a) = 1$ не имеет нулей на $(a, b]$ (критерий Якоби). Поэтому положительность решения задачи Коши необходима и достаточна для справедливости неравенства $\displaystyle\int_a^b \ddot{x}^2(s)\,ds > \int_a^b p(s)x^2(s)\,ds$ на множестве $\mathbf{D}_0$.

Напомним, что оценка $\displaystyle\int_a^b p(s)\,ds \leqslant 4/(b-a)$ гарантирует положительность на $(a, b]$ решения задачи Коши.

Пример 5. Обратимся к функционалу

$$\mathcal{I}(x) = \int_a^b \left(\ddot{x}^2(s) - p^2(s)x^2(s)\right)\,ds$$

на множестве $\mathbf{D}_0 = \{x \in \mathbf{D} : x(a) = x(b) = 0,\ x(t) \not\equiv 0\}$. В качестве модельной задачи выберем $\ddot{x} = z$, $x(a) = x(b) = 0$. Здесь $x(t) = (\mathcal{W}r)(t) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_a^b W(t,s)r(s)\,ds$, где

$$W(t,s) = \frac{1}{b-a}\begin{cases}(s-a)(b-t), & \text{если } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b,\\ (t-a)(b-s), & \text{если } a \leqslant t < s \leqslant b.\end{cases}$$

Таким образом, $\mathcal{H}z = z - \mathcal{K}z$, где $(\mathcal{K}z)(t) = (p^2\mathcal{W}^2 z)(t)$. Самосопряженный вполне непрерывный оператор $\mathcal{K} : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$ изотонен. Поэтому [9] оценка $\|\mathcal{K}\|_{\mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2} < 1$ справедлива тогда и только тогда, когда существует почти всюду положительный элемент $\nu \in \mathbf{L}_2$ такой, что выполнено неравенство $\nu(t) \geqslant (\mathcal{K}\nu)(t)$. Положив $\nu(t) = \sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-a)$, получим, что при $p^2(t) < \dfrac{\pi^2}{(b-a)^2}$ функционал $\mathcal{I}(x)$ достигает минимума и, следовательно, на множестве $\mathbf{D}_0$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_a^b \ddot{x}^2(s)\,ds > \int_a^b p^2(s)x^2(s)\,ds$.

Интересное обсуждение затронутых здесь вопросов заинтересованный читатель найдет в классической монографии Э. Беккенбаха и Р. Беллмана [30].

§ 7. Сингулярные задачи

Неудачный выбор множества, в котором следует искать решение задачи, может вызвать серьезные осложнения: задача может быть «сингулярной» (для которой неприменимы стандартные методы) в одном пространстве и регулярной в другом.

Так, например, сингулярная в пространстве $\mathbf{W}_1^2$ (функций $x:[0,1]\to\mathbb{R}^1$ с абсолютно непрерывными производными $\dot{x}$) задача

$$(\mathcal{L}x)(t)\overset{\text{def}}{=}\ddot{x}(t)+\frac{k}{t}\dot{x}(t)+p(t)x(t)=f,\quad t\in[0,1],\quad p\in\mathbf{L}^1,$$

$$\dot{x}(0)=0,\quad x(1)=\alpha$$

оказывается [9] регулярной в пространстве

$$\mathbf{D}=\{x\in\mathbf{W}_1^2:\dot{x}(0)=0\},\quad \mathbf{D}\cong\mathbf{L}^1\times\mathbb{R}^1,$$

где в качестве модельного уравнения, определяющего изоморфизм, выбрано интегрируемое в явном виде уравнение $(\mathcal{L}_0x)(t)\overset{\text{def}}{=}\ddot{x}(t)+\dfrac{k}{t}\dot{x}(t)=z(t)$.

Другой пример: уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t)\overset{\text{def}}{=}t(1-t)\ddot{x}(t)+q(t)\dot{x}(t)+p(t)x(t)=f(t),\quad t\in[0,1],$$

с суммируемыми p и q может не иметь решений в традиционном для уравнений второго порядка пространстве функций $\mathbf{W}_1^2\cong\mathbf{L}^1\times\mathbb{R}^2$. Однако это уравнение оказывается регулярным (удовлетворяющим требованиям общей теории) в пространстве $\mathbf{D}$, состоящем из таких функций $x:[0,1]\to\mathbb{R}$, что
1) x абсолютно непрерывна на $[0,1]$;
2) ее производная $\dot{x}$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a',b']\subset[0,1]$, $0<a'<b'<1$;
3) произведение $t(1-t)\cdot\ddot{x}(t)$ суммируемо на $[0,1]$.

§ 8. Конечномерные расширения пространства абсолютно непрерывных функций и их применения

Зафиксируем систему m точек t_i ($a<t_1<\ldots<t_m<b$) и через $\mathbf{DS}(m)$ обозначим линейное многообразие кусочно абсолютно непрерывных функций $y:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$y(t)=\int_a^t\dot{y}(s)\,ds+y(a)+\sum_{k=1}^m\chi_{[t_k,b]}(t)\Delta y(t_k),$$

где $\Delta y(t_k)=y(t_k)-y(t_k-0)$, $\chi_{[t_k,b]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k,b]$. Если

$$\|y\|_{\mathbf{DS}(m)}=\|\dot{y}\|_{\mathbf{L}^n}+\|\Delta y\|_{\mathbb{R}^{n+nm}}\quad(\Delta y=\operatorname{col}\{y(a),y(t_1),\ldots,y(t_m)\}),$$

то $\mathbf{DS}(m)$ — банахово пространство, $\mathbf{DS}(m)\cong\mathbf{L}^n\times\mathbb{R}^{n+nm}$ и к уравнениям в этом пространстве применима общая теория. Пространство $\mathbf{DS}(m)$ является конечномерным расширением пространства $\mathbf{AC}^n\cong\mathbf{L}^n\times\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывных функций. Такое расширение было предложено А. В. Анохиным [31] в связи с исследованием импульсных систем и нашло применение в различных ситуациях. Например, при изучении свойств функции Грина $G(t,s)$ линейной краевой задачи $\mathcal{L}x=f$, $lx=0$, где «сечение» $g(t)=G(t,s)$ при фиксированном $s\in[a,b]$ оказывается решением «расширенной» краевой задачи

$$\mathcal{L}y=0,\quad ly=0,\quad \Delta y(s)=1$$

в пространстве $\mathbf{DS}(1)$. Если та или иная задача (например, вариационная или краевая) не имеет решения в пространстве $\mathbf{D}\cong\mathbf{L}^n\times\mathbb{R}^n$, то соответствующее расширение задачи в пространстве $\mathbf{DS}(m)\cong\mathbf{L}^n\times\mathbb{R}^{n+nm}$ иногда приобретает содержательное решение.

Элементы пространства $\mathbf{BV}^n$ функций $y:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ограниченной вариации представляют собой сумму абсолютно непрерывной функции, функции скачков и «сингулярной» составляющей — непрерывной функции, производная которой равна нулю почти всюду. Таким образом, пространство $\mathbf{DS}(m)$ можно рассматривать как некоторый специальный случай подпространства из $\mathbf{BV}^n$. Изучение уравнений в пространстве $\mathbf{DS}(m)$ не требует привлечения δ-функций Дирака. Это обстоятельство определяет одно из преимуществ в применениях пространства $\mathbf{DS}(m)$ сравнительно с пространством функций ограниченной вариации. Такое преимущество использовано, в частности, в следующем параграфе и при установлении знакоопределенности функции Грина [9].

Рассмотрим в качестве примера задачу управления:

$$\mathcal{L}y = \mathcal{F}u + g, \quad y(a) = \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad ly = \beta \in \mathbb{R}^N. \tag{18}$$

Здесь $\mathcal{L} : \mathbf{DS}(m) \to \mathbf{L}^n$ и $\mathcal{F} : \mathbf{L}_2^r \to \mathbf{L}^n$ — линейные ограниченные операторы, $\mathbf{L}_2^r$ — пространство функций (управлений $u : [a, b] \to \mathbb{R}^r$), суммируемых с квадратом. Линейный ограниченный вектор-функционал $l : \mathbf{DS}(m) \to \mathbb{R}^N$ задает цель управления (траектория исследуемой системы с заданным начальным значением α под действием управления u и последовательности управляющих импульсов $\Delta y(t_k)$ должна удовлетворять условию $ly = \beta$). Например, в случае

$$ly = \mathrm{col}\left\{ y(b), \sum_{k=1}^{m} \Delta y(t_k) \right\}, \quad \beta = \mathrm{col}\{\beta_1, \ldots, \beta_n, 0\},$$

цель управления — перевести систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние и при этом соблюсти баланс скачков (сумма всех скачков равна нулю). В условиях теоремы 2 размерность пространства решений однородной системы $\mathcal{L}y = 0$ равна $n + nm$. Используя теоремы о структуре общего решения и о представлении решений неоднородной системы $\mathcal{L}y = f$, удается свести условия разрешимости задачи (18) к условиям разрешимости некоторой специальной линейной алгебраической системы, параметры которой строятся по параметрам исходной задачи с помощью специальных алгоритмов с гарантированной точностью. Получение окончательного вывода о разрешимости задачи (18), а также построение управлений и соответствующих траекторий требуют применения доказательного вычислительного эксперимента, основы которого изложены в [32].

§ 9. Задача управления и доказательный вычислительный эксперимент

Теория линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения позволяет с единой точки зрения рассматривать задачи управления для широкого класса систем управления и предлагать для их исследования методы и алгоритмы, допускающие эффективную компьютерную реализацию. Заметим, что направление, связанное с компьютерными технологиями исследования различных классов операторных уравнений в функциональных пространствах, активно развивается в последние двадцать лет (см. [9, 32], а также основополагающие работы Е. Каучера и В. Миранкера и другие работы, цитированные в гл. VI монографии [9]).

Пусть система управления описывается уравнением

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ и линейным ограниченным оператором $\mathcal{F}$, действующим из гильбертова пространства $\mathbf{H}$ (пространства управлений u) в банахово пространство $\mathbf{B}$. Зафиксируем изоморфизм $\mathbf{D} \cong \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{J} = \{\Lambda, \mathcal{Y}\} : \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{D}, \quad x = \Lambda z + \mathcal{Y}\beta, \quad z \in \mathbf{B}, \beta \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{J}^{-1} = [\delta, r] : \mathbf{D} \to \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n, \{z, \beta\} = \mathcal{J}^{-1}x = \{\delta x, rx\}, x \in \mathbf{D}.$$

Будем предполагать, что «главная краевая задача»

$$\mathcal{L}x = f, \quad rx = \alpha$$

однозначно разрешима для любых $f \in \mathbf{B}$ и $\alpha \in \mathbb{R}^n$. В этом случае решение задачи имеет вид $x = \mathcal{G}f + X\alpha$, где $\mathcal{G}$ — оператор Грина, X — фундаментальный вектор. Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f, \quad rx = \alpha, \quad \ell x = \beta. \tag{19}$$

Здесь линейный ограниченный вектор-функционал $\ell = \operatorname{col}\{\ell_1, \dots, \ell_N\}$, $\ell : \mathbf{D} \to \mathbb{R}^N$ задает цель управления (требуется найти такое управление u, при котором решение главной краевой задачи $\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f$, $rx = \alpha$ удовлетворяет условию $\ell x = \beta$). Задача (19) охватывает широкий класс задач управления.

Для того чтобы сформулировать критерий разрешимости задачи (19), заметим, что равенство $\lambda_i u = \ell_i \mathcal{G}\mathcal{F}u$ определяет линейный ограниченный функционал $\lambda_i : \mathbf{H} \to \mathbb{R}^1$. Обозначим тем же символом λ_i элемент пространства $\mathbf{H}$, который порождает функционал λ_i, то есть $\lambda_i u = \langle \lambda_i, u \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbf{H}$.

Теорема 4 ([33]). *Задача* (19) *разрешима для любых* $f \in \mathbf{B}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ *тогда и только тогда, когда обратима матрица* $\varGamma = \big\{\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle\big\}_{i,j=1,\dots,N}$.

Идея конструктивного исследования задачи (19) с применением современных компьютерных систем (Computer Algebra Systems) основана на том, что свойство обратимости матрицы $\varGamma$, как грубое свойство, может быть установлено, если удастся построить такую обратимую матрицу $\widetilde{\varGamma}$, что

$$\|\varGamma - \widetilde{\varGamma}\| < 1 \Big/ \|\widetilde{\varGamma}^{-1}\| \,. \tag{20}$$

Эффективная проверка этого неравенства требует аппроксимации элементов $\lambda_i \in \mathbf{H}$. При этом из определения $\lambda_i \in \mathbf{H}$ следует, что для его аппроксимации целесообразно воспользоваться аппроксимациями $\tilde{\ell}_i$, $\widetilde{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ операторов ℓ_i, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ соответственно. Конкретные схемы аппроксимации определяются спецификой пространств $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и самих операторов. Рассмотрим в качестве примера случай, когда $\mathbf{D} = \mathbf{AC}^n$, $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2^r$ — пространство функций (управлений $u : [a,b] \to \mathbb{R}^r$), суммируемых с квадратом:

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - \int_a^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A(t)x(a), \quad (\mathcal{F}u)(t) = F(t)u(t),$$

$$\ell_i x \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \varphi_i(s)\dot{x}(s)\,ds + \phi_i x(a), \quad i = 1, \dots, n.$$

В этом случае (при естественных предположениях относительно K, A, F, φ_i, ϕ_i) для λ_i имеем представление

$$\lambda_i(t) = \int_t^b \varphi_i(s)P(s,t)\,ds\,F(t),$$

где $P(t,s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,s)$.

Компьютерная технология, ориентированная на установление разрешимости задачи (19), представляет собой доказательный вычислительный эксперимент [9, 32, 34], который содержит следующие основные этапы:

1) аппроксимация исходной задачи в классах так называемых вычислимых операторов, допускающих осуществление вычислительных процедур с гарантированной точностью,
2) построение элементов матрицы $\tilde{\varGamma}$,
3) исследование $\tilde{\varGamma}$ на обратимость,
4) проверка неравенства (20).

В случае невыполнения неравенства (20) приходится возвращаться к пункту 1), строить более точную аппроксимацию исходной задачи и повторять пункты 2) – 4). Условия, при которых вычислительный эксперимент оказывается (теоретически) успешным, формулируются для конкретных пространств, операторов и схем аппроксимации (см. [32]).

Отметим, что прикладные задачи управления, допускающие запись в общей форме (19), возникают, в частности, в математической экономике. К таким задачам относятся, например, задача управления инструментами деятельности коммерческого банка [35] и задача о построении программы инвестирования многоотраслевого производственного комплекса с привлечением банковских кредитов [36, 37]. В этих задачах различные режимы управления (в том числе импульсные) имеют естественный содержательный смысл.

Остановимся на одной из таких задач более подробно. По смыслу задачи удобно считать, что $a=0$, $b=T$. Пусть динамика многоотраслевой (многопродуктовой) системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t)=(\mathcal{T}x)(t)+f(t),\quad t\in[0,T]. \tag{21}$$

Здесь $\mathcal{T}$ — линейный оператор, действующий из пространства $\mathbf{AC}^n$ абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{L}^n$ суммируемых функций $z:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ по правилу

$$(\mathcal{T}x)(t)=\int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds+A(t)x(0),$$

где элементы $n\times n$-матрицы $K(t,s)$ измеримы и имеют суммируемую на $[0,T]$ мажоранту по t, элементы $n\times n$-матрицы $A(t)$ суммируемы на $[0,T]$. Оператор $\mathcal{T}$ моделирует влияние производственных накоплений на динамику фазовой переменной x, $f(t)$ — заданную интенсивность внешних инвестиций. Модель (21) охватывает случаи систем с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием. В (21) формально отсутствуют управляющие воздействия и единственная траектория $x^0(t)$, соответствующая заданному начальному состоянию

$$x(0)=\alpha, \tag{22}$$

определяется равенством

$$x^0(t)=X(t)\alpha+\int_0^t C(t,s)x(s)\,ds,$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x}=\mathcal{T}x$, $C(t,s)$ — матрица Коши [2, 9]. Метод приближенного построения $C(t,s)$ с гарантированной оценкой точности описан в работе [38]. Возможности управления системой связаны с ее рассмотрением в более широком пространстве — конечномерном расширении пространства $\mathbf{AC}^n$.

Определим пространство $\mathbf{D}$ как пространство $\mathbf{DS}[0,t_1,\dots,t_m,T]$ (сокращенно $\mathbf{DS}(m)$) кусочно абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ с суммируемой производной, представимых в виде

$$x(t)=\int_0^t \dot{x}(s)\,ds+x(0)+\sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,T]}\Delta x(t_k).$$

Здесь $0<t_1<\ldots<t_m<T$ — фиксированная система точек, $\Delta x(t_k)=x(t_k)-x(t_k-0)$, $\chi_{[t_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k,T]$. В этом случае $\mathbf{D}\cong\mathbf{L}^n\times\mathbb{R}^{n+mn}$. Переход к пространству $\mathbf{DS}[0,t_1,\dots,t_m,T]$ требует расширения оператора $\mathcal{T}:\mathbf{AC}^n\to\mathbf{L}^n$ с сохранением непрерывности относительно обычных норм в этих пространствах до оператора $\widetilde{\mathcal{T}}$, действующего из $\mathbf{DS}[0,t_1,\dots,t_m,T]$ в $\mathbf{L}^n$. Всякое такое линейное расширение представимо в виде

$$(\widetilde{\mathcal{T}}x)(t)=\int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds+A(t)x(0)+\sum_{k=1}^m A_k(t)\Delta x(t_k),$$

где элементы $n\times n$-матриц $A_1(t),\dots,A_m(t)$ суммируемы. Для операторов

$$(\mathcal{T}x)(t)=B(t)x(t),\quad (\mathcal{T}x)(t)=\begin{cases}B(t)x(t-\tau), & t\geqslant\tau>0,\\ 0, & t<\tau;\end{cases}$$

$$(\mathcal{T}x)(t)=\begin{cases}B(t)x[h(t)], & h(t)\in[0,T],\\ 0, & h(t)\notin[0,T],\end{cases}$$

существуют «естественные» расширения $\widetilde{\mathcal{T}} : \mathbf{DS}[0, t_1, \dots, t_m, T] \to \mathbf{L}^n$, для которых мы сохраняем то же обозначение $\mathcal{T}$. В частности, если для $x \in \mathbf{AC}^n$ оператор $\mathcal{T}$ определен равенством $(\mathcal{T}x)(t) = B(t)\int\limits_0^t \dot{x}(s)ds + B(t)x(0)$, то для $x(t) = \int\limits_0^t \dot{x}(s)ds + x(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,T]}(t)\Delta x(t_k)$ имеем

$$(\widetilde{\mathcal{T}}x)(t) = B(t)\int_0^t \dot{x}(s)\,ds + B(t)x(0) + \sum_{k=1}^m B(t)\chi_{[t_k,T]}(t)\Delta x(t_k).$$

Содержательный смысл параметров $\Delta x(t_k)$, используемых в качестве управляющих параметров, означает возможность скачкообразного изменения состояния системы (21) в предписанные моменты времени t_k. Без ограничения общности будем далее считать, что $t_k = k$ и $T = m + 1$. В рассматриваемой здесь задаче мы ограничимся следующей интерпретацией скачков Δx. Положительный скачок компоненты x_i в момент времени t_1 является результатом получения кредита на соответствующую сумму. Взятый кредит i-я отрасль возвращает за время $T - 2$ с учетом ставки процента r_i, выбрав подходящий план возврата кредита: $\gamma_{i,k-1}\Delta x_i(t_1)$ в конце k-го года ($0 \leqslant \gamma_{i,k} \leqslant 1$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m-1$, $\sum\limits_{k=1}^{m-1} \gamma_{i,k} = 1$). Таким образом, скачки $\Delta x_i(t_k)$, $k = 2, \dots, m$, отрицательны и соответствуют возврату кредитов с учетом ставки процента r_i :

$$\Delta x_i(t_k) = -(1 + r_i)^{k-1} \cdot \gamma_{i,k-1} \cdot \Delta x_i(t_1), \quad k = 2, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n. \tag{23}$$

Сформулируем цель управления. Пусть система показателей функционирования системы (21) задана с помощью линейных ограниченных функционалов

$$\ell_j : \mathbf{AC}^n \to \mathbb{R}^1, \quad j = 1, \dots, q.$$

При отсутствии кредитования эти показатели составляют значения $\ell_1 x_0, \ \dots, \ \ell_q x_0$. Будем считать, что на пространстве $\mathbf{DS}[0, t_1, \dots, t_m, T]$ естественным образом определены расширения функционалов ℓ_j, и сохраним для них те же обозначения. Примером таких функционалов могут служить интегральные функционалы, описывающие интегральный дисконтированный выпуск по отдельным отраслям:

$$\ell_j x = \int_0^T \exp(-\nu_j t) x_j(t)\,dt.$$

Таким образом, целью управления является достижение на траекториях системы (21) из пространства $\mathbf{DS}[0, t_1, \dots, t_m, T]$ значений показателей $\ell_j x$, превышающих «базовые» значения $\ell_j x_0$ в $(1 + \rho_j)$ раз:

$$\ell_j x = (1 + \rho_j)\ell_j x_0, \quad j = 1, \dots, q \tag{24}$$

(числа $\rho_j > 0$, $j = 1, \dots, q$ заданы).

Таким образом, задачу о достижимости заданных показателей можно сформулировать как задачу о существовании таких объемов $\Delta x_i(t_1)$, при которых соответствующая траектория системы (21), определяемая условиями (22), (23), удовлетворяет условиям (24).

§ 10. Стохастические уравнения

Стохастическое функционально-дифференциальное уравнение имеет вид

$$dx = F(x)dZ, \tag{25}$$

где $Z = Z(t)$ — произвольный семимартингал (см., например, [39]). Это уравнение невозможно изучать в рамках теории уравнения (1), однако оно идеально вписывается в более общую схему,

МАТЕМАТИКА 2009. Вып. 1

рассмотренную в § 2. При этом изоморфизм, определяющий пространство решений, задается равенством (см., например, [39])

$$x(t) = \int_0^t H(s)\,dZ(s) + \alpha.$$

Однако некомпактность ограниченных множеств решений стохастических уравнений не позволяет непосредственно распространить утверждения о приводимости для уравнения (25). Тем не менее общие схемы теории приводимости работают, если полную непрерывность операторов заменить на свойства локальности (по случайной переменной) и плотности. Это показано А. В. Поносовым в ряде работ (см., например, [9] и приведённые там ссылки). Таким образом, возникает идея «стохастической приводимости», играющая важную роль в исследованиях нелинейных стохастических уравнений.

W-метод, описанный в п. 5, также применим в теории устойчивости решений уравнения (25) (см., например, недавние работы [39–41]). В частности, в случае линейного стохастического уравнения этот метод может быть схематически описан следующим образом. Прежде всего устанавливается связь между исследуемым асимптотическим свойством решений (например, устойчивостью по Ляпунову в обычном смысле) и $\mathbf{D}$-устойчивостью в смысле п. 5.1. Затем свойство $\mathbf{D}$-устойчивости проверяется с помощью выбора более простого («модельного») уравнения, которое обладает требуемым свойством. Как и в 5.1, это уравнение определяет специальное преобразование, которое, будучи применённым к первоначальному уравнению, даёт уравнение вида $x - \Theta x = f$. Если последнее разрешимо (например, если $\|\Theta\| < 1$), то $\mathbf{D}$-устойчивость, а значит и исследуемое асимптотическое свойство решений установлены.

Как показано в работах [39–41], W-метод эффективен для изучения практически всех видов стохастической устойчивости. Этот метод является особенно полезным для линейных дифференциальных уравнений, но во многих ситуациях эта идея может оказаться плодотворной и в нелинейном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В. Пермский Семинар по функционально-дифференциальным уравнениям. (Очерк основных этапов становления и развития) // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2003. — Т. 9. — Вып. 2 (18). — С. 90–95.

2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.

3. Hale J. Theory of functional differential equations. — New York e.a.: Springer–Verlag, 1977. — 365 pp.

4. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.

5. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

6. Азбелев Н. В., Бердникова М. П., Рахматуллина Л. Ф. Интегральные уравнения с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 192. — № 3. — С. 479–482.

7. Максимов В. П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 192. — № 4. — С. 601–606.

8. Rakhmatullina L. F. On the integral representation of the Green operator // Funct. Different. Equat. — 2004. — V. 11. — № 3–4. — P. 475–483.

9. Азбелев Н. В., Максимов В. П, Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. — 384 с.

10. Азбелев Н. В. Как это было (об основных этапах развития современной теории функционально-дифференциальных уравнений) // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2003. — Т. 9. — Вып. 1 (17). — С. 1–40.

11. Азбелев Н. В. Две гипотезы в теории линейных функционально-дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. — 1986. — Т. 41. — № 4. — С. 210–211.

12. Чистяков А. В. Патологический контрпример к гипотезе о нефредгольмовости в алгебрах операторов взвешенного сдвига // Известия вузов. Математика. — 1995. — № 10. — С. 76–86.

13. Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач // Известия вузов. Математика. — 1996. — № 11. — С. 3–7.

14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Иностранная литература, 1962. — 896 с.

15. Азбелев Н. В. О нелинейных функционально-дифференциальных уравнениях // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 11. — С. 1923–1932.

16. Непомнящих Ю. В. О понятии приводимости функционально-дифференциальных уравнений // Нелин. анализ и нелин. дифференц. уравнения / Под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. — М.: Физматлит, 2003. — С. 305–316.

17. Ермолаев М. Б. Устойчивость решений существенно нелинейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-матем. наук / УдГУ. — Ижевск, 1995. — 104 с.

18. Жуковский Е. С. Эволюционные функционально-дифференциальные уравнения: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. — Екатеринбург, 2006. —301 с.

19. Массера Х. Л., Шеффер Х. Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.

20. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.

21. Alves M. J., Chistyakov A. V., Simonov P. M. On sufficient condition of stability for the first order differential equation with retarded argument // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — Tbilisi: Publishing House GCI, 2002. — V. 26. — P. 31–42.

22. Мышкис А. Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. — 1951. — Т. 28 (70). — № 3. — С. 641–658.

23. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. — 230 с.

24. Azbelev N. V., Simonov P. M. Stability of differential equations with aftereffect. — London and New York: Taylor and Francis, 2002. — xvii p. + 222 p.

25. Симонов П.М. Метод элементарных моделей в динамических системах с запаздыванием: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук / Перм. ун-т. — Пермь, 2002. — 291 с.

26. Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. Экстремумы функционалов с отклоняющимися аргументами. — М.: МАИ, 1979. — 54 с.

27. Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — Tbilisi: Publishing House GCI, 1996. — V. 8. — P. 1–102.

28. Азбелев Н. В., Култышев С. Ю., Цалюк В. З. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — 124 с.

29. Бочкарев Г. П. Критические обороты вала // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. — Рязань: Изд-во Рязан. гос. пед. ун-та, 2005. — № 9. — С. 129–133.

30. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965. — 276 с.

31. Анохин А. В. О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 286. — №5. — С. 1037–1040.

32. Румянцев А. Н. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач. — Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1999. — 172 с.

33. Максимов В. П. Об одной абстрактной задаче управления // Совр. методы теории функций и смежн. пробл.: Материалы конф. / Ворон. гос. ун-т. — Воронеж, 2005. — С. 154.

34. Максимов В. П. Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений // Соросовский образовательный журнал. — 1999. — №3. — С. 121–126.

35. Колчанов А. П., Румянцев А. Н. Задача оптимального управления финансовыми ресурсами коммерческого банка и конструктивный метод ее решения // Вестник Нижегородского ун-та. Серия «Матем. моделир. и оптимальное управление» / Нижегородский гос. ун-т. — Н. Новгород, 2005. — № 2 (29). — С. 124–131.

36. Максимов П. В. Моделирование и вычислительный эксперимент в задаче банковского кредитования программы развития многоотраслевой производственной системы // Совр. пробл. прикл. мат. и мат. моделир.: Тез. докл. междунар. конф. / Ворон. гос. ун-т. — Воронеж, 2005. — С. 139.

37. Максимов В. П., Фадеева Л. Н. К задаче о достижимости показателей экономического развития // Развитие экономико-математического моделирования: Сб. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. — С. 61–70.

38. Munembe J. S. P., Rumyantsev A. N. A computer-oriented method of constructing the Cauchy matrix with a guaranteed accuracy for a class of linear functional differential systems // Вестник ПГТУ. Функц.-дифференц. уравнения / Перм. гос. техн. ун-т. — Пермь, 1997. — № 4. — С. 121–129.

39. Кадиев Р. И., Поносов А. В. Метод Н.В. Азбелева в теории стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2006. — Т. 12. — Вып. 1 (25). — С. 57–88.

40. Kadiev R., Ponosov A. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron. J. Diff. Eqns. — 2004. — V. 2004. — №92. — P. 1–36.

41. Kadiev R., Ponosov A. Relation between stability and admissibility for stochastic linear functional differential equations // Funct. Different. Equat. — 2005. — V. 12. — № 1–2. — P. 209–244.

Поступила в редакцию 15.09.08

N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov
Functional differential equations and applications

A survey of the theory of functional differential equations developed by participants of the Perm Seminar is presented. Examples of new approaches to some classical problems are demonstrated.

Keywords: functional differential equations, boundary value problems, variational problems, asymptotical behavior of solutions.

Mathematical Subject Classifications: 34K05, 34K10, 34K20, 34K30, 34K35, 34K50

Максимов Владимир Петрович, д. ф.-м. н., профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15 (корп. 12), E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Симонов Петр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15 (корп. 12), E-mail: simonov@econ.psu.ru