МАТЕМАТИКА

УДК 517.978.4

© *А. С. Банников*

УКЛОНЕНИЕ ОТ ГРУППЫ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается дифференциальная игра группы преследователей и одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников. Получены достаточные условия уклонения от встречи в классе позиционных контрстратегий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, позиционная контрстратегия, уклонение от встречи.

Введение

Рассматривается задача уклонения из заданного начального состояния в дифференциальной игре второго порядка между группой преследователей и одним убегающим. В стационарном случае ($a(t) \equiv 1$) достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения при равных динамических возможностях игроков были получены в [1], а в случае контрольного примера Понтрягина — в [2].

В настоящей работе приводятся достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения от группы преследователей в нестационарном случае и равенстве возможностей игроков. Работа примыкает к исследованиям [3, 4].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$-го лица: n преследователей и одного убегающего. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$ имеет вид:
$$\ddot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad u_i \in U.$$
Закон движения убегающего E имеет вид:
$$\ddot{y}(t) = a(t)v(t), \quad v \in U,$$
причем в начальный момент $x_i(t_0) = x_i^0$, $\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0$,
$$y(t_0) = y^0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0, \quad x_i^0 \neq y^0, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Здесь x_i, y, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{int} U$; $a(t)$ — ограниченная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t, $a(t) \neq 0$ почти всюду на $[t_0, +\infty)$. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, z(t_0))$, где
$$z(t) = (z_1(t), \dot{z}_1(t), \ldots, z_n(t), \dot{z}_n(t)), \quad z_i(t) = x_i(t) - y(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определение 1. *Позиционной контрстратегией* V убегающего E назовем измеримое отображение
$$[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^{2nk} \times U^n \to U.$$
Тогда при заданных управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i, $i = 1, \ldots, n$ стратегия V определяет управление $v(t) = V(t, z(t), u_1(t), \ldots, u_n(t))$, которое будет измеримой функцией.

Определение 2. В дифференциальной игре $\Gamma(n, z(t_0))$ из начального состояния $z(t_0)$ *разрешима локальная задача уклонения*, если для любых измеримых функций

$$u_i(t), \quad t \geqslant t_0, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \ldots, n$$

существует стратегия V убегающего E такая, что $z_i(t) \neq 0$ для всех $t \geqslant t_0$, $i = 1, \ldots, n$.

Считаем, что управления преследователей формируются на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры.

§ 2. Достаточные условия уклонения от группы

Теорема 1. *Пусть* $0 \notin \operatorname{co}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dot{z}_i^0\right\}$, *тогда в игре* $\Gamma(n, z(t_0))$ *из начального состояния* $z(t_0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Доказательство. Пусть $0 \notin \operatorname{co}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \dot{z}_i^0\right\}$. На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существует единичный вектор p и число $\varepsilon > 0$, такие, что

$$\max_{i=1,\ldots,n} (\dot{z}_i^0, p) \leqslant -2\varepsilon. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$|U| = \max_{z \in U} \|z\|, \qquad c = \operatorname*{ess\,sup}_{t \geqslant t_0} |a(t)|,$$

$$C(U, p) = \max_{u \in U} (u, p), \quad p \in \mathbb{R}^k, \qquad (u, p) = \sum_{i=1}^{k} u_i p_i,$$

$$\delta = \min\{1, \varepsilon, \sqrt{\eta(t_0)}\}, \qquad \eta(t) = \min_{i=1,\ldots,n} \|z_i(t)\|.$$

1. Пусть $\max\limits_{i=1,\ldots,n} (z_i^0, p) \leqslant 0$. Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad v_p(t) = \begin{cases} v_p, & a(t) \geqslant 0, \\ v_{-p}, & a(t) < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $v_p, v_{-p} \in U$ — такие, что $(v_p, p) = C(U, p)$, $(v_{-p}, -p) = C(U, -p)$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$

$$(z_i(t), p) = (z_i^0, p) + (t - t_0)(\dot{z}_i^0, p) + \int_{t_0}^{t} (t - s) a(s) (u_i(s) - v_p(t), p) \, ds \leqslant -2\varepsilon(t - t_0) < 0$$

при $t > t_0$, откуда следует возможность уклонения из начального состояния $z(t_0)$.

2. Предположим, что $(z_1^0, p) > 0$ и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для любого $i = 2, \ldots, n$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи уклонения для такого начального состояния $z(t_0)$. Пусть $K = \min\{1, \frac{1}{|U| c}\}$, $\tau_1 = K \frac{\delta}{4}$, $\delta_1 = K \frac{\delta^2}{4} < \eta(t_0)$. Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \backslash [t_1, t_1 + \delta_1),$$

где t_1 — либо первый момент, в который впервые выполняется равенство $\|z_1(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_1(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$, и если $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом.

При так выбранном управлении убегающего преследователь P_i, $i = 2, \ldots, n$ не влияет на ход игры. Действительно, при любых управлениях $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$

$$(\dot{z}_i(t), p) = (\dot{z}_i(t_0), p) + \int_{t_0}^{t} a(s) \big((u_i(s), p) - (v(s), p) \big) \leqslant -2\delta + 2c|U|\tau_1 < -\delta, \quad t \geqslant t_0. \tag{2.3}$$

Поэтому

$$(z_i(t),p)=(z_i(t_0),p)+\int_{t_0}^{t}(\dot z_i(s),p)\,ds<(z_i(t_0),p)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_0,\quad i\neq 1. \tag{2.4}$$

Значит, при $t\geqslant t_0$ $\|z_i(t)\|\neq 0$, $i\neq 1$.

Заметим также, что в момент $t=t_1$ $\|z_1(t_1)\|=\delta_1$, поэтому при любых управлениях $u_1(t)$ и $v(t)$ на отрезке $[t_1,t_1+\tau_1]$

$$(z_1(t_1+\tau_1),p)=(z_1(t_1),p)+\int_{t_1}^{t_1+\tau_1}(\dot z_1(s),p)\,ds<\delta_1-\delta\tau_1=0. \tag{2.5}$$

Следовательно, в момент $t=t_1+\tau_1$ состояние дифференциальной игры соответствует рассмотренному выше случаю 1:

$$\begin{aligned}&(\dot z_i(t_1+\tau_1),p)<-\delta,\\ &(z_i(t_1+\tau_1),p)<0,\quad i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Таким образом, если по любому управлению $u_1(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\tau_1)$ такое, что $\|z_1(t)\|\neq 0$ при $t\in[t_1,t_1+\tau_1]$, то разрешимость локальной задачи уклонения для начального состояния $z(t_0)$ в случае 2 будет доказана.

Предположим, что

$$(z_1(t_1),\dot z_1(t_1))=-\|z_1(t_1)\|\,\|\dot z_1(t_1)\|. \tag{2.6}$$

Векторы $z_1(t_1)$ и $\dot z_1(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует единичный вектор ψ такой, что

$$(\psi,z_1(t_1))=(\psi,\dot z_1(t_1))=0. \tag{2.7}$$

Пусть $\varepsilon_1\in(0,\tau_1)$ — некоторое число такое, что при произвольных $u_1(s),v(s)$, $s\in[t_1,t_1+\varepsilon_1]$ справедливо неравенство $(z_1(s),p)>0$. На отрезке $[t_1,t_1+\varepsilon_1]$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi,v(s))=\begin{cases}C(U,\psi), & (\psi,u_1(s))\leqslant 0,\\ -C(U,-\psi), & (\psi,u_1(s))>0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Покажем, что существует $\gamma_1\in(0,\varepsilon_1)$ такое, что

$$(z_1(t_1+\gamma_1),\dot z_1(t_1+\gamma_1))\neq-\|z_1(t_1+\gamma_1)\|\,\|\dot z_1(t_1+\gamma_1)\|. \tag{2.9}$$

При $t\geqslant t_1$ рассмотрим функции

$$\begin{aligned}f_1(t)&=(\psi,z_1(t))=\int_{t_1}^{t}(t-s)a(s)(\psi,u_1(s)-v(s))\,ds,\\ f_2(t)&=(\psi,\dot z_1(t))=\int_{t_1}^{t}a(s)(\psi,u_1(s)-v(s))\,ds.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_1+\varepsilon_1$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot f_1(t)&=f_2(t),\\ \dot f_2(t)&=a(t)(\psi,u_1(t)-v(t)),\end{aligned} \tag{2.11}$$

причем $f_1(t_1)=f_2(t_2)=0$.

Так как $0\in\operatorname{int}U$, то $C(U,q)>0$ при любом $q\neq 0$. Поэтому $|a(t)(\psi,u_1(t)-v(t))|>0$ почти всюду на $[t_1,t_1+\varepsilon_1]$, и $f_2(t)\not\equiv 0$ на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subset[t_1,t_1+\varepsilon_1]$, $\alpha<\beta$. Значит, множество $G=\{t\in(t_1,t_1+\varepsilon_1)\,|\,f_2(t)\neq 0\}$ — непустое открытое множество. Поэтому $G=\bigcup\limits_j(\alpha_j,\beta_j)$, где $\{(\alpha_j,\beta_j)\}$ — взаимно непересекающаяся, не более чем счетная система интервалов.

Пусть $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$ — некоторый интервал из этой системы. Тогда

$$f_2(\alpha_{j_0}) = f_2(\beta_{j_0}) = 0, \quad \dot{f}_2(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

Если $f_1(\alpha_{j_0}) \neq 0$, то соотношение (2.9) выполнено при $t_1 + \gamma_1 = \alpha_{j_0}$. Если же $f_1(\alpha_{j_0}) = 0$, тогда

$$\dot{f}_1(t) = f_2(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

Поэтому $f_1(t)f_2(t) > 0$ на $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$. Значит, при $t_1 + \gamma_1 = \tau$, где τ — некоторое произвольно выбранное число из интервала $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$, имеет место соотношение (2.9).

Итак, управление $v(s)$ при $s \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1]$ выбирается в соответствии с правилом (2.8). Тогда

$$\|z_1(t)\| \neq 0, \quad t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1],$$

и в некоторый момент $t = t_1 + \gamma_1$ будет выполнено соотношение (2.9).

Если

$$(z_1(t_1), \dot{z}_1(t_1) \neq -\|z_1(t_1)\| \, \|\dot{z}_1(t_1)\|, \tag{2.12}$$

то полагаем $\gamma_1 = 0$. Заметим, что $(z_1(t_1 + \gamma_1), p) > 0$ и $(\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1), p) < -\delta$, поэтому из неравенства (2.9) следует линейная независимость векторов $z_1(t_1 + \gamma_1)$ и $\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1)$. Далее при всех $s \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1)$ положим $v(s) = u_1(s)$. Тогда

$$z_1(t) = z_1(t_1 + \gamma_1) + (t - t_1 - \gamma_1)\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1) \tag{2.13}$$

при $t_1 + \gamma_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \tau_1$, следовательно, $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1]$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_1(s) \in U$ можно построить такую измеримую функцию

$$v(s) = V(s, z(s), u_1(s), \ldots, u_n(s)), \quad v(s) \in U, \quad s \in [t_1, t_1 + \tau_1),$$

что $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$. Разрешимость локальной задачи уклонения в случае 2 доказана.

3. Пусть $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in I' = \{1, \ldots, s\}$, $s \leqslant n$, и $(z_i^0, p) \leqslant 0$ для $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash I'$. В процессе построения маневра уклонения определим такие числа τ_j, δ_j, $j = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \leqslant s$, что

$$\tau_j > \tau_{j+1}, \quad \delta_j > \delta_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, N_1 - 1,$$

причем если в момент $t' > t_0$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, s\}$ выполняется равенство $\|z_i(t')\| = \delta_j$ и $(z_i(t'), p) > 0$, то $(z_i(t' + \tau_j), p) < 0$ для любых управлений $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$.

Момент времени $t_i > t_0$, когда впервые выполняется равенство $\eta(t) = \delta_i$ и существует номер $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ такой, что $\|z_\ell(t_i)\| = \delta_i$, $(z_\ell(t_i), p) > 0$, назовем моментом i-го сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходит их сближение с убегающим.

Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \backslash T, \quad T = \bigcup_{i=1,\ldots,N_1} [t_i, t_i + \tau_i), \tag{2.14}$$

При $t = t_0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\tau_1^i = K\frac{\delta}{2^{i+1}}, \quad \delta_1^i = \delta\tau_1^i = K\frac{\delta^2}{2^{i+1}}. \tag{2.15}$$

Числа τ_i, $i = 1, \ldots, N_1$ будут определены так, что $\tau_i \leqslant \tau_1^i$, $i = 1, \ldots, N_1$, поэтому

$$\sum_{i=1,\ldots,N_1} \tau_i < \xi_1 = K\frac{\delta}{2} \leqslant \frac{\delta}{2|U|c}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i=1,\ldots,n$ на $[t_0,t]$ и $v(s)$ на $[t_0,t]\cap T$ справедливы неравенства

$$(\dot z_i(t),p)=(\dot z_i^0,p)+\int_{[t_0,t]\cap T} a(s)(u_i(s)-v(s),p)\,ds+\int_{[t_0,t]\setminus T} a(s)(u_i(s)-v_p(t),p)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant -2\delta+2|U|c\mu(T)<-2\delta+2|U|c\xi_1\leqslant-\delta,\quad t\in[t_0,+\infty),\quad i=1,\ldots,n. \quad (2.16)$$

Поэтому $(z_i(t'+\tau),p)=(z_i(t'),p)+\int_{t'}^{t'+\tau}(\dot z_i(s),p)\,ds<(z_i(t'),p)$, $t'\geqslant t_0$, $\tau>0$. Это означает, что сближение с преследователем $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus I'$ не наступит. Не ограничивая общности, считаем далее, что $N_1=n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем.

Заметим также, если в момент $t=t'$ для некоторого $i\in\{1,\ldots,n\}$ выполняются соотношения

$$\|z_i(t')\|=\delta_1^i,\quad (z_i(t'),p)>0,$$

то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t',t'+\tau_1^i]$ получаем

$$(z_i(t'+\tau_i^i),p)=(z_i(t'),p)+\int_{t'}^{t'+\tau_1^i}(\dot z_i(s),p)\,ds<\delta_1^i-\delta\tau_1^i=0. \quad (2.17)$$

Положим $\tau_1=\tau_1^1$, $\delta_1=\delta_1^1$. Тогда $t_1>t_0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t=t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\|=\delta_i$, $(z_i(t_i),p)>0$, определены число τ_i и монотонно убывающие последовательности положительных чисел $\{\tau_i^\ell\}_{\ell=i}^\infty$, $\{\delta_i^\ell\}_{\ell=i}^\infty$.

Допустим, что $(z_i(t_i),\dot z_i(t_i))=-\|z_i(t_i)\|\,\|\dot z_i(t_i)\|$. Существует число $\varepsilon_i\in(0,\tau_i)$ такое, что при произвольных $u_\ell(s)$, $\ell=1,\ldots,n$ $v(s)$, $s\in[t_i,t_i+\varepsilon_i]$ справедливы неравенства

$$\min_{\tau\in[0,\varepsilon_i]}\|z_\ell(t_i+\tau)\|>\delta_i^{i+1},\quad (z_i(s),p)>0. \quad (2.18)$$

Векторы $z_i(t_i)$, $\dot z_i(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует единичный вектор ψ_i такой, что

$$(\psi_i,z_i(t_i))=(\psi_i,\dot z_i(t_i))=0.$$

На отрезке $[t_i,t_i+\varepsilon_i]$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi_i,v(s))=\begin{cases} C(U,\psi_i), & (\psi_i,u_i(s))\leqslant 0,\\ -C(U,-\psi_i), & (\psi_i,u_i(s))>0.\end{cases} \quad (2.19)$$

Тогда существует число $\gamma_i\in(0,\varepsilon_i)$ такое, что

$$(z_i(t_i+\gamma_i),\dot z_i(t_i+\gamma_i))\neq-\|z_i(t_i+\gamma_i)\|\,\|\dot z_i(t_i+\gamma_i)\|.$$

Из (2.18) и неравенства $(\dot z_i(t_i+\gamma_i),p)<-\delta$ следует линейная независимость векторов $z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$. Если же $(z_i(t_i),\dot z_i(t_i))\neq-\|z_i(t_i)\|\,\|\dot z_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i=0$.

Следуя рассуждениям, проведенным в случае 2, управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако, если $i<n$, то на $[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)$ возможны сближения с преследователями $i+1,\ldots,n$. Поэтому

$$v(s)=u_i(s),\quad s\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)\setminus\bigcup_{j=i+1,\ldots,n}[t_j,t_j+\tau_j),$$

если $i<n$, и

$$v(s)=u_n(s),\quad [t_n+\gamma_n,t_n+\tau_n).$$

Предположим, что $i<n$ и $t_\ell\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i)$, $\ell=i+1,\ldots,n$. Убегающий будет сближаться с преследователями $P_{i+1},\ldots,P_n$ настолько близко и обходить их за столь малое время, чтобы

для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i+\tau), \dot z_i(t_i+\tau)) \neq -\|z_i(t_i+\tau)\| \, \|\dot z_i(t_i+\tau)\|, \quad \tau \in [\gamma_i, \tau_i], \tag{2.20}$$

$$\min_{t\in[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]} \|z_i(t)\| \geqslant \alpha_i, \tag{2.21}$$

$$\alpha_i > \delta_{i+1}. \tag{2.22}$$

Из (2.22) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(t_i+\gamma_i+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^1$ прямую, проходящую через точки $z_i(t_i+\gamma_i) + \tau\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$. На основании линейной независимости векторов $z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ заключаем, что при любом τ векторы $z_i(t_i+\gamma_i)+\tau\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ и $\dot z_i(t_i+\gamma_i)$ линейно независимы. Поэтому для любого τ функция

$$f(\tau) = \min_{x\in H_i(t_i+\gamma_i+\tau)} \|x\| > 0. \tag{2.23}$$

$$\Big(f(\tau) = \frac{\|\big((1-\tau)\|b\|^2-(a,b)\big)\big(a+(\tau-1)b\big)+\|a+b\|^2 b\|}{\|a+b\|^2}, \quad a = z_i(t_i+\gamma_i), \quad b = \dot z_i(t_i+\gamma_i)\Big)$$

Кроме того, функция $f(\tau)$ непрерывна. В момент $t = t_i+\gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min_{\tau\in[0,\tau_i-\gamma_i]} f(\tau). \tag{2.24}$$

Если $v(s) = u_i(s)$ при $s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$, то соответствующая траектория

$$z_i^\circ t = z_i(t_i+\gamma_i) + (t-t_i-\gamma_i)\dot z_i(t_i+\gamma_i)$$

и

$$\dot z_i^\circ(t) = \dot z_i(t_i+\gamma_i), \quad t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i].$$

Ясно, что для любого $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$

$$\|z_i^\circ(t)\| \geqslant \beta_i, \quad \|\dot z_i^\circ(t)\| \geqslant \beta_i. \tag{2.25}$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i+\gamma_i, t_i+\gamma_i)$ задана такая конечная система полуинтервалов $[t^r, t^r+\tau^r)$, $r = 1,\ldots,\ell$, $\ell \geqslant 1$, что

$$\mu(\bigcup_{r=1,\ldots,l} [t^r, t^r+\tau^r)) < \xi_{i+1}, \tag{2.26}$$

$$\xi_i = K\frac{\beta_i}{4} \tag{2.27}$$

Покажем, что если

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i) \setminus \bigcup_{r=1,\ldots,\ell} [t^r, t^r+\tau^r),$$

управление $v(s)$ на множестве $\bigcup\limits_{r=1,\ldots,\ell} [t^r, t^r+\tau^r)$ и управление $u_i(s)$ на отрезке $[t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ выбирается произвольным образом, то соответствующая траектория $z_i^\ell(t)$, $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$ такова, что

$$\|z_i^\ell(t) - z_i^\circ(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.28}$$

$$\|\dot z_i^\ell(t) - \dot z_i^\circ(t)\| \leqslant \frac{\beta_i}{2}, \tag{2.29}$$

Действительно, при $t \in [t_i+\gamma_i, t_i+\tau_i]$

$$\|\dot z^\ell(t)-\dot z^\circ(t)\| \leqslant 2|U|c\mu\Big([t_i+\gamma_i,t]\cap\bigcup_{r=1,\dots,\ell}[t^r,t^r+\tau^r)\Big)<2|U|c\xi_{i+1}\leqslant\frac{\beta_i}{2},$$

$$\|z^\ell(t)-z^\circ(t)\|\leqslant 2|U|c\int_{t_i+\gamma_i}^{t}\mu\Big([t_i+\gamma_i,s]\cap\bigcup_{r=1,\dots,\ell}[t^r,t^r+\tau^r)\Big)\,ds<2|U|c\xi_{i+1}\tau_i\leqslant\frac{\beta_i}{2},$$

так как $\tau_i\leqslant\tau_1^i\leqslant K\dfrac{\delta}{4}<1$.

Покажем теперь, что для любого $\tau\in[\gamma_i,\tau_i]$

$$(z_i^\ell(t_i+\tau),\dot z_i^\ell(t_i+\tau))\neq-\|z_i^\ell(t_i+\tau)\|\,\|\dot z_i^\ell(t_i+\tau)\|. \tag{2.30}$$

Предположим противное: существуют

$$\tau_0\in[\gamma_i,\tau_i],\quad q\in\mathbb{R}^1,\quad q>0$$

такие, что $z_i^\ell(t_i+\tau_0)=-q\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0)$. В силу неравенств (2.28), (2.29) получаем, что

$$\min_{t\in[t_i+\gamma_i,t_i+\tau_i]}\|z_i^\ell(t)\|\geqslant\frac{\beta_i}{2}, \tag{2.31}$$

$$z_i^\circ(t_i+\tau_0)\in z_i^\ell(t_i+\tau_0)+\frac{\beta_i}{2}S,\quad \dot z_i^\circ(t_i+\tau_0)\in\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0)+\frac{\beta_i}{2}S, \tag{2.32}$$

то есть векторы $z_i^\circ(t_i+\tau_0)$, $\dot z_i^\circ(t_i+\tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^\circ(t_i+\tau_0)=z_i^\ell(t_i+\tau_0)+x,\quad \dot z_i^\circ(t_i+\tau_0)=\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0)+y,$$

где x, $y\in\frac{\beta_i}{2}S$, $S\subset\mathbb{R}^n$ — шар радиуса 1 с центром в нуле. Пусть

$$\Sigma=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2\mid\alpha_1+\alpha_2=1\}.$$

Согласно (2.24)

$$\min_{\alpha\in\Sigma}\|\alpha_1(z_i^\ell(t_i+\tau_0)+x)+\alpha_2(\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0)+y)\|\geqslant\beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^*=\frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^*=\frac{q}{1+q}$

$$\|\alpha_1^*(z_i^\ell(t_i+\tau_0)+x)+\alpha_2^*(\dot z_i^\ell(t_i+\tau_0)+y)\|=\|\alpha_1^*x+\alpha_2^*y\|\leqslant\frac{\beta_i}{2}.$$

Следовательно, неравенство (2.30) выполнено для любого $\tau\in[\gamma_i,\tau_i]$.

В момент $t=t_i+\gamma_i$ по ξ_{i+1} определим последовательность $\{\tau_{i+1}^\ell\}_{\ell=i+1}^\infty$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+1}=\min\{\tau_i^{i+1},\frac{\xi_{i+1}}{2}\},\quad \tau_{i+1}^{i+k}=\frac{\tau_{i+1}^{i+1}}{2^{k-1}},\quad k\geqslant2.$$

Понятно, что

$$\sum_{k=1}^{n-i}\tau_{i+1}^{i+k}<\xi_{i+1}.$$

По этой последовательности строим последовательность

$$\{\delta_{i+1}^{i+k}\}_{k=1}^\infty,\quad \delta_{i+1}^{i+k}=\delta\tau_{i+1}^{i+k}.$$

Положим $\delta_{i+1}=\delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1}=\tau_{i+1}^{i+1}$. Нетрудно видеть, что $\delta_{i+1}\leqslant\tau_{i+1}^{i+1}\leqslant\frac{\beta_i}{8}$. Учитывая (2.31), убеждаемся в справедливости неравенств (2.21), (2.22).

Итак, управление $v(s)$ при $s \in [t_i, t_i + \gamma_i]$ выбираем из соотношений (2.19) и

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{p=i+1,\ldots,n} [t_p, t_p + \tau_p),$$

если $i < n$,

$$v(s) = u_n(s), s \in [t_n + \gamma_n, t_n + \tau_n).$$

Тогда $\|z_i(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ и $(z_i(t), p) < 0$ при $t \geqslant t_i + \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Отметим, что сближения преследователей с убегающим могут наступать не позже момента

$$t_0 + \frac{\max\limits_{i=1,\ldots,n} (z_i^0, p)}{\delta}.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокопович П. В., Чикрий А. А. Одна дифференциальная игра убегания // ДАН УССР. — 1989. — № 1. — С. 71–74.
2. Чикрий А. А., Прокопович П. В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 998–1003.
3. Банников А. С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 3–11.
4. Благодатских А. И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — Вып. 1. — С. 17–24.

Поступила в редакцию 23.11.09

A. S. Bannikov

Evasion from group of non-stationary inertial objects

Differential game of group of persecutors and one evader is considered under equal dynamic possibilities of all players. Sufficient conditions of evasion in a counter-strategy class are received.

Keywords: differential game, position counterstrategy, evasion.

Mathematical Subject Classifications: 49N75

Банников Александр Сергеевич, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: bannikov_a_s@mail.ru