ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 517.977.1 + 517.926

© *В. А. Зайцев*

СОГЛАСОВАННОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается линейная стационарная управляемая система с наблюдателем. Исследуется свойство согласованности этой системы в случае, когда коэффициенты имеют специальный вид, при котором условие согласованности является достаточным условием глобальной управляемости спектра собственных значений замкнутой системы. Установлено, что для систем специального вида необходимое условие согласованности не является достаточным для размерностей больших чем 5. Найдено новое достаточное условие согласованности для таких систем.

Ключевые слова: управляемая система, неполная обратная связь, согласованность, управление спектром.

Введение

Настоящая статья продолжает исследования [1]. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x,u,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

$A \in M_n$, $B \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$, ($M_{n,m}$ — это пространство вещественных $n \times m$-матриц, $M_n := M_{n,n}$), $*$ означает операцию транспонирования матрицы (или вектора). Управление в системе (1) строится по принципу линейной неполной обратной связи и имеет вид $u = Uy$, $U \in M_{m,k}$ — постоянная матрица. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

В работе [1] исследовалось свойство согласованности системы (1) в связи с задачей о глобальном управлении спектром собственных значений матрицы системы (2) (или просто спектром системы (2)). Говорят, что *спектр системы* (2) *глобально управляем*, если для любого многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ найдется матрица $U \in M_{m,k}$, такая что $\chi(A + BUC^*; \lambda) = p(\lambda)$ (здесь $\chi(F;\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы F). Согласованность системы (1) означает полную управляемость «большой системы» [1, теорема 3]

$$\dot{z} = Pz + Qv, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^{mk},$$

где $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{n^2}$, $I \in M_n$ — единичная матрица, $Q = B \otimes C \in M_{n^2,mk}$, $\otimes$ — прямое произведение матриц [2, с. 235].

Предположим, что коэффициенты системы (1) имеют специальный вид: матрица A имеет форму Хессенберга, первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю ($p \in \{1,\ldots,n\}$), то есть

$$\begin{gathered} A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1,n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \\ B = \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{is}\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,k}; \\ b_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,p-1}, \quad j = \overline{1,m}; \quad c_{is} = 0, \quad i = \overline{p+1,n}, \quad s = \overline{1,k}; \quad p \in \{1,\ldots,n\}. \end{gathered} \tag{3}$$

В работе [1] было доказано (теорема 10), что если коэффициенты системы (1) имеют вид (3), то спектр системы (2) глобально управляем тогда и только тогда, когда матрицы

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{4}$$

линейно независимы. Было также доказано [1, теорема 7], что если матрица A — циклическая (то есть характеристический многочлен $\chi(A;\lambda)$ матрицы A совпадает с минимальным аннулирующим многочленом $\psi(A;\lambda)$ матрицы A), а B и C — произвольные, то из согласованности системы (1) следует линейная независимость матриц (4). Поскольку матрица Хессенберга является циклической, то для системы (1), (3) имеет место утверждение [1, теорема 13]:

Утверждение 1. *Пусть дана система* (1) *с матрицами* (3). *Пусть даны следующие утверждения:*
(a) *система* (1) *согласованна;*
(b) *матрицы* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы;*
(c) *спектр системы* (2) *глобально управляем.*
Имеет место следующая цепочка импликаций:
$(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c)$.

На вопрос о справедливости импликации $(b) \Longrightarrow (a)$ был дан следующий ответ. Если $n < 6$, то утверждение $(b) \Longrightarrow (a)$ верно [1, теорема 12]. Если $n = 6$, то утверждение $(b) \Longrightarrow (a)$ в общем случае неверно, то есть существуют матрицы A, B, C вида (3), такие, что матрицы (4) линейно независимы, но система (1) не является согласованной [1, пример 5]. В настоящей работе доказано, что утверждение $(b) \Longrightarrow (a)$ в общем случае неверно для любого $n \geqslant 6$.

Далее, пусть $\widetilde{m} = \operatorname{rank} B$, $\widetilde{k} = \operatorname{rank} C$. Вычеркнем в матрицах B и C линейно зависимые столбцы, обозначим полученные матрицы через $\widetilde{B} \in M_{n,\widetilde{m}}$ и $\widetilde{C} \in M_{n,\widetilde{k}}$ и перейдем в системе (1) от матриц A, B, C к матрицам $A, \widetilde{B}, \widetilde{C}$. Легко видеть, что при этом каждое из свойств (a), (b), (c) сохраняется. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $m \leqslant n$, $k \leqslant n$ и матрицы B и C имеют полный ранг: $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = k$. Из вида (3) матриц B и C следует, что $n - p + 1 \geqslant m$, $p \geqslant k$. Отсюда, в частности, следует, что $m + k \leqslant n + 1$.

В работе [1] была выдвинута гипотеза о том, что в случае, если $m+k$ достигает максимального возможного значения, то есть $m + k = n + 1$, то система согласованна (это утверждение фактически было доказано перебором в работе [1] для всех $n \leqslant 5$). В настоящей работе эта гипотеза доказана для произвольного n. Поскольку условие согласованности для системы (1), (3) в силу утверждения 1 является достаточным условием глобальной управляемости спектра, то отсюда будет следовать достаточное условие $m + k = n + 1$ глобальной управляемости спектра системы (2) для *всех* матриц A, B, C вида (3). Этот результат уточняет результаты, следующие из работ [3, 4], о том, что условие $m + k \geqslant n + 1$ является достаточным условием глобальной управляемости спектра системы (2) в типическом случае (то есть для *почти всех* матриц A, B, C, см. [5, с. 180]).

§ 1. Импликация $(b) \Longrightarrow (a)$ в общем случае неверна при $n \geqslant 6$

Введем обозначения: пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, то есть $e_1 = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1)$; если не оговорено противное, греческими буквами будем обозначать вектор-строки, латинскими — вектор-столбцы; если $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец, то $x^* \in \mathbb{R}^{n*}$ — вектор-строка; $E_{ij} := e_i e_j^* \in M_n$, $i, j = \overline{1, n}$; J — первый единичный косой ряд, то есть $J := \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_n$. Обозначим через $\operatorname{vect} : M_{n,m} \to \mathbb{R}^{nm}$ отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ по столбцам в вектор-столбец $\operatorname{vect} H := \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{nm})$. Обозначим через $[P, Q] := PQ - QP$ коммутатор матриц P и Q, а через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — линейную оболочку элементов $a_1, \ldots, a_n$ линейного пространства.

Предположим, что $n \geqslant 6$. Построим матрицы

$$A = J + e_n \psi \in M_n, \quad B = [e_{n-2}, e_n] \in M_{n,2}, \quad C = [e_1, e_3, e_4, \ldots, e_{n-2}] \in M_{n,n-3}, \tag{5}$$

где $J \in M_n$, $\psi = (0, \ldots, 0, -d^2, 2d) \in \mathbb{R}^{n*}$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$ — любое число такое, что $d \neq 0$. Матрицы (5) имеют вид (3), здесь $p = n - 2$. Покажем, что система (1) с матрицами (5) не является согласованной. Для доказательства воспользуемся утверждением теоремы 4 [1] о том, что *система* (1) *не является согласованной тогда и только тогда, когда существует ненулевая матрица* $H \in M_n$ *такая, что для всех* $\nu = \overline{0, n^2-1}$ *выполнены равенства* $C^* N_\nu B = 0$*, где* $N_0 = H$*,* $N_\nu = [A, N_{\nu-1}]$*,* $\nu = \overline{1, n^2-1}$*.*

Построим матрицу

$$H = \begin{Vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{Vmatrix} \in M_n, \quad \text{где} \quad H_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{Vmatrix} \in M_2,$$

$H_{11} = 0 \in M_{2,n-2}$, $H_{21} = 0 \in M_{n-2}$, $H_{22} = 0 \in M_{n-2,2}$. Тогда $H \neq 0$. Представим матрицу A из (5) в блочном виде

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \in M_n, \quad \text{где} \quad A_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -d^2 & 2d \end{Vmatrix} \in M_2,$$

$A_{11} = J_1 \in M_{n-2}$; $A_{12} = e_{n-2} e_1^* \in M_{n-2,2}$, $e_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $e_1^* \in \mathbb{R}^{2*}$; $A_{21} = 0 \in M_{2,n-2}$. Построим матрицу $P = HA \in M_n$. Тогда

$$P = HA = \begin{Vmatrix} H_{11}A_{11} + H_{12}A_{21} & H_{11}A_{12} + H_{12}A_{22} \\ H_{21}A_{11} + H_{22}A_{21} & H_{21}A_{12} + H_{22}A_{22} \end{Vmatrix} =: \begin{Vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{Vmatrix},$$

$$P_{11} = H_{11}A_{11} + H_{12}A_{21} = 0 \in M_{2,n-2}, \ \text{поскольку} \ H_{11} = 0, \ A_{21} = 0;$$

$$P_{12} = H_{11}A_{12} + H_{12}A_{22} = H_{12}A_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -d^2 & d \end{Vmatrix} \in M_2;$$

$$P_{21} = H_{21}A_{11} + H_{22}A_{21} = 0 \in M_{n-2}, \ \text{поскольку} \ H_{21} = 0, \ A_{21} = 0;$$

$$P_{22} = H_{21}A_{12} + H_{22}A_{22} = 0 \in M_{n-2,2}, \ \text{поскольку} \ H_{21} = 0, \ H_{22} = 0.$$

Далее построим матрицу $Q = AH \in M_n$. Для этого представим матрицу A в следующем блочном виде:

$$A = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Vmatrix}, \quad \text{где} \quad T_{11} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \in M_2,$$

$T_{12} = e_2 e_1^* \in M_{2,n-2}$, $e_2 \in \mathbb{R}^2$, $e_1^* \in \mathbb{R}^{n-2*}$; $T_{21} = 0 \in M_{n-2,2}$; $T_{22} = J + e_{n-2}\psi_1 \in M_{n-2}$, $J \in M_{n-2}$, $e_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\psi_1 = (0, \ldots, 0, -d^2, 2d) \in \mathbb{R}^{n-2*}$. Тогда

$$Q = AH = \begin{Vmatrix} T_{11}H_{11} + T_{12}H_{21} & T_{11}H_{12} + T_{12}H_{22} \\ T_{21}H_{11} + T_{22}H_{21} & T_{21}H_{12} + T_{22}H_{22} \end{Vmatrix} =: \begin{Vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{Vmatrix},$$

$$Q_{11} = T_{11}H_{11} + T_{12}H_{21} = 0 \in M_{2,n-2}, \ \text{поскольку} \ H_{11} = 0, \ H_{21} = 0;$$

$$Q_{12} = T_{11}H_{12} + T_{12}H_{22} = T_{11}H_{12} = \begin{Vmatrix} -d & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \in M_2;$$

$$Q_{21} = T_{21}H_{11} + T_{22}H_{21} = 0 \in M_{n-2}, \ \text{поскольку} \ H_{11} = 0, \ H_{21} = 0;$$

$$Q_{22} = T_{21}H_{12} + T_{22}H_{22} = 0 \in M_{n-2,2}, \ \text{поскольку} \ T_{21} = 0, \ H_{22} = 0.$$

Построим матрицу $Q - P = AH - HA$, получим

$$Q - P = \begin{Vmatrix} 0 & Q_{12} - P_{12} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ \text{где} \ Q_{12} - P_{12} = \begin{Vmatrix} -d & 0 \\ d^2 & -d \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, $AH - HA = (-d)H$. Положим $N_0 := H$, $N_\nu := [A, N_{\nu-1}]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда $N_1 = (-d)H$, $N_2 = [A, N_1] = [A, (-d)H] = (-d)[A, H] = (-d)^2 H$, и так далее, $N_\nu = (-d)^\nu H$.

Имеем $HB = H[e_{n-2}, e_n] =: [l_1, l_2] \in M_{n,2}$, $l_1 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $l_2 = e_2 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $C^*HB = \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_3^* \\ \vdots \\ e_{n-2}^* \end{bmatrix} \cdot [0, e_2] = 0 \in M_{n-3,2}$. Следовательно, для всех $\nu = \overline{0, n^2-1}$ выполнено равенство

$C^*N_\nu B = (-d)^\nu C^*HB = 0$. Таким образом, система (1) с матрицами (5) не является согласованной.

Покажем теперь, что для матриц (5) матрицы (4) линейно независимы.

Пусть $[l_1^0, l_2^0] := B = [e_{n-2}, e_n]$, $e_{n-2}, e_n \in \mathbb{R}^n$. Положим $[l_1^s, l_2^s] := A^sB$, $s = \overline{0, n-1}$. Тогда $l_1^s = A^sl_1^0 = A^se_{n-2}$, $l_2^s = A^sl_2^0 = A^se_n$. Поскольку $\psi e_j = 0$ для всех $j = \overline{1, n-2}$, то мы имеем

$$\begin{aligned}
&l_1^0 = e_{n-2},\\
&l_1^1 = Ae_{n-2} = (J + e_n\psi)e_{n-2} = Je_{n-2} + e_n\psi e_{n-2} = Je_{n-2} = e_{n-3},\\
&l_1^2 = Ae_{n-3} = (J + e_n\psi)e_{n-3} = Je_{n-3} + e_n\psi e_{n-3} = Je_{n-3} = e_{n-4},
\end{aligned}$$

и так далее, $l_1^s = e_{n-2-s}$, $s = \overline{0, n-3}$, $l_1^{n-2} = l_1^{n-1} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Далее, найдем l_2^s, $s = \overline{0, n-1}$. Имеем $l_2^0 = e_n$,

$$l_2^1 = Ae_n = (J + e_n\psi)e_n = Je_n + e_n\psi e_n = e_{n-1} + e_n \cdot 2d = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1, 2d) \in \mathbb{R}^n,$$
$$l_2^2 = Al_2^1 = (J + e_n\psi)(e_{n-1} + 2de_n) = Je_{n-1} + 2dJe_n + e_n\psi e_{n-1} + 2de_n\psi e_n =$$
$$= e_{n-2} + 2de_{n-1} + e_n(-d^2) + 2de_n \cdot 2d = e_{n-2} + 2de_{n-1} + 3d^2e_n = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1, 2d, 3d^2) \in \mathbb{R}^n.$$

Покажем, что для всех $s = \overline{0, n-1}$ имеет место формула

$$l_2^s = \sum_{i=0}^{s}(i+1)d^ie_{n-s+i} = \operatorname{col}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-s-1}, 1, 2d, 3d^2, \ldots, (s+1)d^s) \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Доказательство проведем по индукции. Для $s = 0, 1, 2$ эта формула верна. Пусть формула (6) верна для $s = \nu$. Покажем, что она верна для $s = \nu + 1$. Имеем

$$l_2^{\nu+1} = Al_2^\nu = (J + e_n\psi)\sum_{i=0}^{\nu}(i+1)d^ie_{n-\nu+i} = \sum_{i=0}^{\nu}(i+1)d^iJe_{n-\nu+i} + e_n\sum_{i=0}^{\nu}(i+1)d^i\psi e_{n-\nu+i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\nu}(i+1)d^ie_{n-\nu+i-1} + e_n(\psi e_n(\nu+1)d^\nu + \psi e_{n-1}\nu d^{\nu-1}) = \sum_{i=0}^{\nu}(i+1)d^ie_{n-(\nu+1)+i} +$$
$$+ e_n(2d(\nu+1)d^\nu - d^2 \cdot \nu d^{\nu-1}) = \sum_{i=0}^{\nu}(i+1)d^ie_{n-(\nu+1)+i} + (\nu+2)d^{\nu+1}e_n = \sum_{i=0}^{\nu+1}(i+1)d^ie_{n-(\nu+1)+i}.$$

Таким образом, формула (6) доказана. Построим матрицы (4). Имеем

$$C^*B = [C^*l_1^0, C^*l_2^0], \quad C^*AB = [C^*l_1^1, C^*l_2^1], \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B = [C^*l_1^{n-1}, C^*l_2^{n-1}]. \tag{7}$$

Применим к матрицам (7) отображение vect и составим из полученных векторов матрицу

$$V = [\operatorname{vect}(C^*B), \operatorname{vect}(C^*AB), \ldots, \operatorname{vect}(C^*A^{n-1}B)] \in M_{2(n-3),n}.$$

Линейная независимость матриц (7) равносильна тому, что $\operatorname{rank} V = n$. Имеем $V = \left\| \frac{V_1}{V_2} \right\|$, где $V_1 = [C^*l_1^0, C^*l_1^1, \ldots, C^*l_1^{n-1}] \in M_{n-3,n}$, $V_2 = [C^*l_2^0, C^*l_2^1, \ldots, C^*l_2^{n-1}] \in M_{n-3,n}$. Построим матрицы $Q_1 = [l_1^0, \ldots, l_1^{n-1}] \in M_n$, $Q_2 = [l_2^0, \ldots, l_2^{n-1}] \in M_n$. Тогда $V_1 = C^*Q_1$, $V_2 = C^*Q_2$. В матрице Q_2 «побочная» диагональ (диагональ, идущая от левого нижнего угла матрицы к правому верхнему углу) состоит из единиц, элементы s-й побочной поддиагонали (то есть диагонального ряда, параллельного побочной диагонали и расположенного на s рядов ниже побочной диагонали) равны $(s+1)d^s$, а элементы выше побочной диагонали равны нулю. В матрице Q_1 вторая побочная наддиагональ (то есть диагональный ряд, параллельный побочной диагонали и расположенный на два ряда выше побочной диагонали) состоит из единиц, остальные элементы равны нулю. Из вида (5) матрицы C следует, что при умножении матрицы

C^* слева на некоторую матрицу (Q_1 или Q_2) в этой матрице (Q_1 или Q_2) вычеркиваются две последние строки и вторая строка. Таким образом, матрицы $V_1, V_2 \in M_{n-3,n}$ имеют вид

$$V_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad V_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 2d & 3d^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2d & 3d^2 & 4d^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2d & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что $\operatorname{rank} V = n$. Выберем матрицу $\widetilde{V} \in M_n$, состоящую из первых n строк и n столбцов матрицы V. Для этого надо взять матрицу V_1 и приписать снизу первые три строки матрицы V_2. Вычислим $\det \widetilde{V}$. В каждом из первых $n-4$ столбцов матрицы $\widetilde{V}$ находится лишь одна единица, остальные элементы равны нулю. Раскладывая $\det \widetilde{V}$ по первому столбцу, затем по второму и так далее до $n-4$-го, получим

$$\det \widetilde{V} = (-1)^{(n-3)+1} \cdot (-1)^{(n-2)+1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \widehat{V},$$

где

$$\widehat{V} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2d & 3d^2 \\ 1 & 2d & 3d^2 & 4d^3 \end{Vmatrix}.$$

Имеем $\det \widehat{V} = 2d$, следовательно, $|\det \widetilde{V}| = 2d \neq 0$. Таким образом, $\operatorname{rank} V = n$, и, следовательно, матрицы (7) линейно независимы.

Таким образом, мы доказали, что утверждение $(b) \Longrightarrow (a)$ в общем случае неверно при $n \geqslant 6$. Это утверждение верно в некоторых частных случаях (например, когда $\operatorname{rank} B = n$ или $\operatorname{rank} C = n$, или $A = J$, см. [1, теорема 13]).

§ 2. Некоторые свойства векторов биномиальных коэффициентов

Введем обозначения: для каждого $n \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и для каждого $m = \overline{0,n}$ положим $b_n^m := C_n^m$, $a_n^m := (-1)^m b_n^m$, где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты. Числа b_n^m образуют арифметический треугольник, или треугольник Паскаля (обозначим его Δ_+), а числа a_n^m — знакопеременный арифметический треугольник (обозначим его буквой Δ). Дополним треугольник Δ (Δ_+) до полосы $\Pi = \{a_n^m\}$, ($\Pi_+ = \{b_n^m\}$), $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$, ограниченной сверху и неограниченной вправо, влево и вниз, следующим образом. Элементы, расположенные выше левой и правой боковых сторон треугольника Δ (Δ_+), приравняем к нулю, то есть положим $a_n^m := 0$, ($b_n^m := 0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in (-\mathbb{N})$; $a_n^m := 0$, ($b_n^m := 0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\ldots & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \ldots \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & -1 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
\ldots & & 0 & & 0 & & 1 & & -2 & & 1 & & 0 & & 0 & & \ldots \\
& 0 & & 0 & & 1 & & -3 & & 3 & & -1 & & 0 & & 0 & \\
\ldots & & 0 & & 1 & & -4 & & 6 & & -4 & & 1 & & 0 & & \ldots \\
& 0 & & 1 & & -5 & & 10 & & -10 & & 5 & & -1 & & 0 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array} \tag{8}$$

Полоса Π имеет вид (8), полоса Π_+ имеет аналогичный вид, ее элементы $b_n^m = |a_n^m|$. *Горизонтальным рядом* (или просто *рядом*) полосы Π (Π_+) будем называть бесконечную в обе стороны последовательную совокупность элементов a_n^i, (b_n^i), $i \in \mathbb{Z}$. Ряд характеризуется своим номером

$n \in \mathbb{N}_0$. Полоса Π начинается с нулевого по номеру горизонтального ряда; в n-м горизонтальном ряду ($n \in \mathbb{N}_0$) полосы Π расположены числа a_n^i, $i \in \mathbb{Z}$; на левой боковой стороне треугольника Δ находятся числа a_n^0, $n \in \mathbb{N}_0$; на правой боковой стороне — числа a_n^n, $n \in \mathbb{N}_0$. В силу построения для всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}$ выполнены равенства

$$b_{n+1}^m = b_n^m + b_n^{m-1}, \qquad a_{n+1}^m = a_n^m - a_n^{m-1}. \tag{9}$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим m-й горизонтальный ряд полосы Π (Π_+). *Вектор-строкой*, или *строкой*, m-го ряда (полосы Π) будем называть конечный набор последовательных элементов (вектор) $(a_m^{i+1}, \ldots, a_m^{i+l})$ заданной длины l. Строка характеризуется (как минимум) двумя параметрами — номером ряда $m \in \mathbb{N}_0$, в котором лежит эта строка, и длиной $l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим все вектор-строки длины l в m-м ряду полосы Π (Π_+). Положим

$$\begin{aligned} \psi(m,l,k) &:= (a_m^{m+1-k}, \ldots, a_m^{m+l-k}) \in \mathbb{R}^{l*}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \varphi(m,l,k) &:= (b_m^{m+1-k}, \ldots, b_m^{m+l-k}) \in \mathbb{R}^{l*}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Среди таких строк (полосы Π_+) существует только $m+l$ ненулевых вектор-строк:

$$\begin{aligned} \varphi(m,l,1) &:= (b_m^m, \ldots, b_m^{m+l-1}) = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{l*}, \\ \varphi(m,l,2) &:= (b_m^{m-1}, \ldots, b_m^{m+l-2}) = (m,1,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{l*}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(m,l,k) &:= (b_m^{m+1-k}, \ldots, b_m^{m+l-k}) \in \mathbb{R}^{l*}, \quad k \in \{1,\ldots,m+l\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(m,l,m+l) &:= (b_m^{-(l-1)}, \ldots, b_m^0) = (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{l*}; \end{aligned}$$

аналогичные строки выберем для полосы Π. Составим из этих вектор-строк матрицы

$$A(m,l) = \begin{Vmatrix} \psi(m,l,1) \\ \psi(m,l,2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(m,l,m+l) \end{Vmatrix} \in M_{m+l,l}, \qquad B(m,l) = \begin{Vmatrix} \varphi(m,l,1) \\ \varphi(m,l,2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(m,l,m+l) \end{Vmatrix} \in M_{m+l,l}.$$

Теорема 1. *Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ любые l различных строк матрицы $B(m,l)$ линейно независимы.*

Теорема 2. *Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ любые l различных строк матрицы $A(m,l)$ линейно независимы.*

Замечание 1. Теорема 1 говорит о том, что *в знакоположительной арифметической полосе Π_+ в любом горизонтальном ряду любые l различных ненулевых вектор-строк длины l линейно независимы.* Теорема 2 гласит то же самое, только для знакопеременной полосы Π.

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 следует из теоремы 1. Покажем это. Выберем в матрице $A(m,l)$ любые l различных строк $\psi(m,l,i_\nu)$, $1 \leqslant i_\nu \leqslant m+l$, $\nu = \overline{1,l}$, $i_j \neq i_\nu$, $j \neq \nu$. Составим из них матрицу $\Psi = \begin{Vmatrix} \psi(m,l,i_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \psi(m,l,i_l) \end{Vmatrix}$. Имеем

$$\psi(m,l,i_\nu) = \big((-1)^{m+1-i_\nu} b_m^{m+1-i_\nu}, \ldots, (-1)^{m+l-i_\nu} b_m^{m+l-i_\nu}\big), \quad \nu = \overline{1,l}.$$

В каждой строке $\psi(m,l,i_\nu)$, $\nu = \overline{1,l}$ знаки ненулевых элементов чередуются. Домножим строку $\psi(m,l,i_\nu)$ на $(-1)^{m+i_\nu}$ для всех $\nu = \overline{1,l}$. Полученную матрицу обозначим Ψ_1. Тогда $\det \Psi_1 = \pm \det \Psi$ и в матрице Ψ_1 в каждом столбце ненулевые элементы будут иметь один и тот же знак:

в нечетных столбцах — минус, в четных — плюс. Далее, домножим нечетные столбцы матрицы Ψ_1 на (-1). Получим матрицу Φ, составленную из строк $\varphi(m,l,i_\nu)$, $\nu=\overline{1,l}$. Следовательно, $\det\Psi_1=\pm\det\Phi$. По теореме 1 строки $\varphi(m,l,i_\nu)$, $\nu=\overline{1,l}$ линейно независимы, следовательно, $\det\Phi\neq 0$. Значит, и $\det\Psi\neq 0$, отсюда следует линейная независимость строк $\psi(m,l,i_\nu)$, $\nu=\overline{1,l}$. Теорема 2 доказана. □

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим для любых $m\in\mathbb{N}_0$ и $l\in\mathbb{N}$ всевозможные упорядоченные размещения без повторений $[i_1,\ldots,i_l]$ из $m+l$ элементов $\{1,\ldots,m+l\}$ по l элементов: $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_l\leqslant m+l$. Назовем такое размещение допустимым. Общее число таких размещений равно C^l_{m+l}. Каждому такому упорядоченному размещению поставим в соответствие матрицу

$$P(m,l,[i_1,\ldots,i_l])=\begin{Vmatrix}\varphi(m,l,i_1)\\ \ldots\ldots\ldots\\ \varphi(m,l,i_l)\end{Vmatrix}\in M_l.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любых $m\in\mathbb{N}_0$ и $l\in\mathbb{N}$ и для любого упорядоченного размещения без повторений $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_l\leqslant m+l$ имеет место неравенство*

$$\det P(m,l,[i_1,\ldots,i_l])>0. \tag{11}$$

Теперь теорема 1 очевидным образом вытекает из теоремы 3. Остается доказать теорему 3. Выпишем сначала некоторые свойства вектор-строк $\varphi(m,l,k)$.

Свойство 1. Для любых $m\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\varphi(m,l,1)\quad&=\varphi(m-1,l,1)=e_1^*\in\mathbb{R}^{l*},\\ \varphi(m,l,k)\quad&=\varphi(m-1,l,k-1)+\varphi(m-1,l,k),\quad k\in\{2,\ldots,m+l-1\},\\ \varphi(m,l,m+l)\quad&=\varphi(m-1,l,m+l-1)=e_l^*\in\mathbb{R}^{l*}.\end{aligned}\tag{12}$$

Свойство 2. Для любых $m\in\mathbb{N}_0$, $l=2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}\varphi(m,l,k)&=(b_m^{m+1-k},b_m^{m+1-(k-1)}\ldots,b_m^{m+(l-1)-(k-1)})=\\ &=\big(b_m^{m+1-k},\varphi(m,l-1,k-1)\big),\quad k\in\{2,\ldots,m+l\},\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\varphi(m,l,k)&=(b_m^{m+1-k},\ldots,b_m^{m+(l-1)-k},b_m^{m+l-k})=\\ &=\big(\varphi(m,l-1,k),b_m^{m+l-k}\big),\quad k\in\{1,\ldots,m+l-1\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Эти свойства вытекают из определения вектора $\varphi(m,l,k)$ и свойства (9) компонент вектора $\varphi(m,l,k)$. Свойство 1 говорит о том, как выражается ненулевая вектор-строка φ длины l, лежащая в m-м ряду полосы Π_+, через ненулевые вектор-строки той же длины, лежащие в $m-1$-м ряду. Свойство 2 говорит о том, как связана ненулевая строка φ длины l в m-м ряду с ненулевой строкой длины $l-1$ в том же ряду. Эти свойства ненулевых строк используются при доказательстве теоремы 3 для проведения индукции по m и по l. Очевидно, что для нулевых строк эти свойства также выполнены.

Свойство 3. (Свойство «сдвига вверх»). Пусть дана вектор-строка $\varphi(m,l,k)$ длины l в m-м ряду полосы Π_+, $(k\in\mathbb{Z})$. Если двигаться из вектора $\varphi(m,l,k)$, поднимаясь в полосе Π_+ на один ряд вверх и влево (то есть в направлении, параллельном правой боковой стороне треугольника Δ_+), то мы придем к вектору $\varphi(m-1,l,k)$ (то есть третий аргумент k остается таким же), а если подниматься на один ряд вверх и вправо (то есть параллельно левой стороне треугольника Δ_+), то придем к вектору $\varphi(m-1,l,k-1)$, то есть k уменьшается на 1. То же самое справедливо для векторов $\psi(m,l,k)$. Это свойство очевидно вытекает из определения векторов φ и ψ.

Свойство 4. Зафиксируем $m\in\mathbb{N}_0$, $l\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}$. Рассмотрим $m+r$-й ряд полосы Π и вектор-строки длины l в этой полосе. Выразим их через вектор-строки предыдущего ряда. Имеем для любого $k\in\mathbb{Z}$

$$\psi(m+r,l,k)=\psi(m+r-1,l,k-1)-\psi(m+r-1,l,k).$$

Далее выразим строки $m+r-1$ ряда через строки предыдущего ряда, получим

$$\psi(m+r,l,k)=\psi(m+r-2,l,k-2)-2\psi(m+r-2,l,k-1)+\psi(m+r-2,l,k).$$

Продолжая далее, получим

$$\begin{gathered}\psi(m+r,l,k)=\psi(m+r-3,l,k-3)-3\psi(m+r-3,l,k-2)+\\+3\psi(m+r-3,l,k-1)-\psi(m+r-3,l,k),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi(m+r,l,k)=a_r^0\psi(m,l,k-r)+a_r^1\psi(m,l,k-r+1)+\dots\\ +a_r^{r-1}\psi(m,l,k-1)+a_r^r\psi(m,l,k)=\sum_{i=0}^{r}a_r^i\psi(m,l,k-r+i).\end{gathered}$$

Очевидно при $r=0$ эта формула также верна. Аналогично для полосы Π_+ имеем

$$\varphi(m+r,l,k)=\sum_{i=0}^{r}b_r^i\varphi(m,l,k-r+i),\quad m\in\mathbb{N}_0,\quad l\in\mathbb{N},\quad r\in\mathbb{N}_0,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 3. Заметим сначала, что если $l=1$, то для любого $m\in\mathbb{N}_0$ и для каждого $k\in\{1,\dots,m+1\}$ вектор-строка $\varphi(m,l,k)$ имеет размерность 1, то есть является скаляром, и $\varphi(m,1,k)=b_m^{m+1-k}=C_m^{m-(k-1)}>0$. Любое допустимое размещение состоит из одного элемента $[i_1]=k$, $k\in\{1,\dots,m+1\}$ и

$$\det P(m,1,[i_1])=\det\|\varphi(m,1,k)\|=C_m^{m-(k-1)}>0.$$

Следовательно, неравенство (11) верно при $l=1$ для любого $m\in\mathbb{N}_0$.

Будем проводить доказательство теоремы индукцией по m. Пусть $m=0$, $l\in\mathbb{N}$ — любое. Тогда имеем $\varphi(0,l,k)=e_k^*\in\mathbb{R}^{l*}$, $k\in\{1,\dots,l\}$. Существует лишь одно допустимое размещение: $[i_1,\dots,i_l]=[1,\dots,l]$. Имеем

$$P(0,l,[1,\dots,l])=I\in M_l,\qquad \det P(0,l,[1,\dots,l])=1>0.$$

Пусть $m=1$, $l\in\mathbb{N}$ — любое. Имеем

$$B(1,l)=\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&\dots&0&0&0\\1&1&0&0&\dots&0&0&0\\0&1&1&0&\dots&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&0&1&1\\0&0&0&0&\dots&0&0&1\end{matrix}\right\|\in M_{l+1,l}.$$

Существует только $l+1$ допустимых размещений $\omega_i=[1,2,\dots,l+1]\setminus\{i\}$, $i=\overline{1,l+1}$. Каждому размещению ω_i соответствует матрица $P(1,l,\omega_i)=\left\|\begin{matrix}P_1&0\\0&P_2\end{matrix}\right\|\in M_l$, которая получена из матрицы $B(1,l)$ вычеркиванием i-й строки. Здесь $P_1=I+J^*$, $P_1,I,J\in M_{i-1}$; $P_2=I+J$, $P_2,I,J\in M_{l+1-i}$. Очевидно, что $\det P(1,l,\omega_i)=1>0$ для всех $i=\overline{1,l+1}$.

Предположим, что неравенство (11) верно для любых $m=0,1,\dots,s-1$, для любых $l\in\mathbb{N}$ и для любых допустимых размещений $1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant m+l$. Докажем тогда, что неравенство (11) верно при $m=s$. По индукции отсюда будет следовать справедливость неравенства (11) для всех $m\in\mathbb{N}_0$, и теорема 3 будет доказана.

Пусть $m=s$. Проведем индукцию по l. Если $l=1$, то, как было показано выше, неравенство (11) верно для любого $m\in\mathbb{N}_0$. Проведем доказательство для $l=2$. Рассмотрим произвольное размещение $[i_1,i_2]$: $1\leqslant i_1<i_2\leqslant s+2$. Построим по нему матрицу $P(s,2,[i_1,i_2])=\left\|\begin{matrix}\varphi(s,2,i_1)\\\varphi(s,2,i_2)\end{matrix}\right\|$.

Если $i_1 = 1$, то $\varphi(s,2,i_1) = \varphi(s,2,1) = (1,0)$. Далее, $i_2 > i_1 = 1$, следовательно, $2 \leqslant i_2 \leqslant s+2$. Тогда в силу (13)

$$\varphi(s,2,i_2) = \big(b_s^{s+1-i_2}, \varphi(s,1,i_2-1)\big) = \big(b_s^{s+1-i_2}, C_s^{s-(i_2-2)}\big)$$

и, значит, $\det P(s,2,[i_1,i_2]) = C_s^{s-(i_2-2)} > 0$.

Если $i_2 = s+2$, то $\varphi(s,2,i_2) = \varphi(s,2,s+2) = (0,1)$. Далее, $i_1 < s+2$, следовательно, $1 \leqslant i_1 \leqslant s+1$. Тогда в силу (14)

$$\varphi(s,2,i_1) = \big(\varphi(s,1,i_1), b_s^{s+2-i_1}\big) = \big(C_s^{s-(i_1-1)}, b_s^{s+2-i_1}\big)$$

и, значит, $\det P(s,2,[i_1,i_2]) = C_s^{s-(i_1-1)} > 0$.

Далее, будем считать, что $i_1 > 1$ и $i_2 < s+2$. По свойствам (12) имеем

$$P(s,2,[i_1,i_2]) = \begin{Vmatrix} \varphi(s,2,i_1) \\ \varphi(s,2,i_2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1-1) + \varphi(s-1,2,i_1) \\ \varphi(s-1,2,i_2-1) + \varphi(s-1,2,i_2) \end{Vmatrix}.$$

По свойствам определителя получим, что

$$\begin{split} \det P(s,2,[i_1,i_2]) = \det \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1-1) \\ \varphi(s-1,2,i_2-1) \end{Vmatrix} + \det \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1-1) \\ \varphi(s-1,2,i_2) \end{Vmatrix} + \\ + \det \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1) \\ \varphi(s-1,2,i_2-1) \end{Vmatrix} + \det \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1) \\ \varphi(s-1,2,i_2) \end{Vmatrix}. \end{split} \tag{16}$$

Обозначим матрицы в разложении (16) через T_1, T_2, T_3, T_4 соответственно. Имеем $T_1 = \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1-1) \\ \varphi(s-1,2,i_2-1) \end{Vmatrix}$. Поскольку $1 < i_1 < i_2 < s+2$, то $1 \leqslant i_1 - 1 < i_2 - 1 < s+1$, следовательно, $[i_1-1, i_2-1]$ — это допустимое размещение (то есть упорядоченное и без повторений) из $(s-1)+2$ элементов по 2. Значит, T_1 совпадает с $P(s-1,2,[i_1-1,i_2-1])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1,2,[i_1-1,i_2-1]) > 0$, следовательно, $\det T_1 > 0$.

Далее, из неравенства $1 \leqslant i_1 - 1 < i_2 \leqslant s+1$ следует, что $[i_1-1, i_2]$ образует допустимое размещение из $s+1$ по 2. Следовательно, матрица $T_2 := \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1-1) \\ \varphi(s-1,2,i_2) \end{Vmatrix}$ совпадает с матрицей $P(s-1,2,[i_1-1,i_2])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1,2,[i_1-1,i_2]) > 0$, следовательно, $\det T_2 > 0$.

Далее, из неравенства $1 < i_1 < i_2 < s+2$ следует, что $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant s+1$, значит, $[i_1, i_2]$ — допустимое размещение из $s+1$ по 2. Следовательно, $T_4 := \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1) \\ \varphi(s-1,2,i_2) \end{Vmatrix}$ совпадает с матрицей $P(s-1,2,[i_1,i_2])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1,2,[i_1,i_2]) > 0$, следовательно, $\det T_4 > 0$.

Рассмотрим матрицу $T_3 := \begin{Vmatrix} \varphi(s-1,2,i_1) \\ \varphi(s-1,2,i_2-1) \end{Vmatrix}$. Если $i_2 = i_1 + 1$, то строки матрицы T_3 совпадают, и тогда $\det T_3 = 0$. В этом случае в сумме (16) остаются 3 слагаемых, и все они положительны, следовательно, $\det P(s,2,[i_1,i_2]) > 0$.

Если же $i_2 > i_1 + 1$, то $1 < i_1 < i_2 - 1 < s+1$ и $[i_1, i_2-1]$ — допустимое размещение из $s+1$ по 2. Следовательно, T_3 совпадает с $P(s-1,2,[i_1,i_2-1])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1,2,[i_1,i_2-1]) > 0$, следовательно, $\det T_3 > 0$.

Случай $i_2 < i_1 + 1$ невозможен, так как в этом случае $i_2 \leqslant i_1$, что противоречит допустимости размещения $[i_1, i_2]$ из $s+2$ по 2.

Таким образом, раскладывая определитель по формуле (16), мы получаем сумму четырех (или трех) положительных слагаемых, а именно: если индекс i_2 непосредственно следует за i_1, то есть $i_2 = i_1 + 1$, то останется сумма трех положительных слагаемых ($\det T_3$ обратится в ноль), а если $i_2 > i_1 + 1$, то получаем сумму четырех слагаемых, каждое из которых положительно по предположению индукции, поскольку является определителем матрицы, соответствующей допустимому размещению при $m = s-1$.

Шаг индукции по l. Предположим, что неравенство (11) справедливо при $m = s$ для всех $l = 1,\ldots,p-1$ и для всех допустимых размещений $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant m+l$. Докажем, что оно справедливо для $l = p$ (идея доказательства будет такой же, как для $l = 2$). По индукции (по l) отсюда будет следовать справедливость неравенства (11) при $m = s$ для всех $l \in \mathbb{N}$. По индукции (по m) теорема 3 будет доказана.

Пусть $l = p$. Рассмотрим произвольное допустимое размещение $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant s+p$. Построим по нему матрицу $P(s,p,[i_1,\ldots,i_p]) = \left\| \begin{matrix} \varphi(s,p,i_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi(s,p,i_p) \end{matrix} \right\|$.

Если $i_1 = 1$, то $\varphi(s,p,i_1) = \varphi(s,p,1) = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{p*}$. Далее, $i_\nu > i_1 = 1$, $\nu = \overline{2,p}$, следовательно, $2 \leqslant i_\nu \leqslant s+p$, $\nu = \overline{2,p}$. Тогда в силу (13)

$$\varphi(s,p,i_\nu) = \bigl(b_s^{s+1-i_\nu}, \varphi(s,p-1,i_\nu-1)\bigr), \quad \nu = \overline{2,p}.$$

Из неравенств $1 \leqslant i_2 - 1 < \ldots < i_p - 1 \leqslant s+p-1$ следует, что $[i_2-1,\ldots,i_p-1]$ образует допустимое размещение из $s+p-1$ по $p-1$. Тогда

$$\det P(s,p,[i_1,\ldots,i_p]) = \det \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \quad \ldots \quad 0 \\ b_s^{s+1-i_2} & \varphi(s,p-1,i_2-1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_s^{s+1-i_p} & \varphi(s,p-1,i_p-1) \end{matrix} \right\| = \det \left\| \begin{matrix} \varphi(s,p-1,i_2-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(s,p-1,i_p-1) \end{matrix} \right\| =$$
$$= \det P(s,p-1,[i_2-1,\ldots,i_p-1]) > 0$$

в силу предположения индукции (по l).

Если $i_p = s+p$, то $\varphi(s,p,i_p) = \varphi(s,p,s+p) = (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{p*}$ в силу (12). Далее, $i_\nu < i_p = s+p$, $\nu = \overline{1,p-1}$, следовательно, в силу (14)

$$\varphi(s,p,i_\nu) = \bigl(\varphi(s,p-1,i_\nu), b_s^{s+p-i_\nu}\bigr), \quad \nu = \overline{1,p-1}.$$

Из неравенств $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{p-1} \leqslant s+p-1$ следует, что $[i_1,\ldots,i_{p-1}]$ образует допустимое размещение из $s+p-1$ по $p-1$. Тогда

$$\det P(s,p,[i_1,\ldots,i_p]) = \det \left\| \begin{matrix} \varphi(s,p-1,i_1) & b_s^{s+p-i_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varphi(s,p-1,i_{p-1}) & b_s^{s+p-i_{p-1}} \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \det \left\| \begin{matrix} \varphi(s,p-1,i_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(s,p-1,i_{p-1}) \end{matrix} \right\| =$$
$$= \det P(s,p-1,[i_1,\ldots,i_{p-1}]) > 0$$

в силу предположения индукции (по l).

Далее будем считать, что $1 < i_1 < \ldots < i_p < s+p$. По свойствам (12) имеем

$$P(s,p,[i_1,\ldots,i_p]) = \left\| \begin{matrix} \varphi(s,p,i_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi(s,p,i_p) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varphi(s-1,p,i_1-1) + \varphi(s-1,p,i_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(s-1,p,i_p-1) + \varphi(s-1,p,i_p) \end{matrix} \right\|.$$

По свойствам определителя получим, что

$$\det P(s,p,[i_1,\ldots,i_p]) = \sum_{j_\nu \in \{i_\nu - 1, i_\nu\},\, \nu = \overline{1,p}} \det \left\| \begin{matrix} \varphi(s-1,p,j_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(s-1,p,j_p) \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

Сумма (17) состоит из 2^p слагаемых. Рассмотрим по отдельности каждое слагаемое $\det T_r$, $r = \overline{1,2^p}$ в сумме (17). Матрица T_r соответствует некоторому (не обязательно допустимому) размещению $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$, где каждый индекс j_ν может принимать одно из двух значений $\{i_\nu - 1, i_\nu\}$, $\nu = \overline{1,p}$. Зафиксируем размещение $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$. В силу предположений $i_1 > 1$ и $i_p < s + p$ получаем, что для размещения ω_r выполнены неравенства

$$1 \leqslant j_1, \qquad j_p \leqslant s + p - 1. \tag{18}$$

Поскольку для всех $\nu = \overline{1, p-1}$ выполнено $i_\nu < i_{\nu+1}$, то для всех $\nu = \overline{1, p-1}$ имеем неравенство $i_\nu \leqslant i_{\nu+1} - 1$. Следовательно, $j_\nu \leqslant j_{\nu+1}$ для всех $\nu = \overline{1, p-1}$. Таким образом, для размещения ω_r выполнены неравенства

$$1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_p \leqslant s + p - 1.$$

Возможны только два случая: 1) для всех $\nu = \overline{1, p-1}$ $j_\nu < j_{\nu+1}$; 2) существует $\nu \in \overline{\{1, p-1\}}$ такое, что $j_\nu = j_{\nu+1}$. В первом случае в силу неравенств (18) размещение $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$ является допустимым размещением из $(s-1)+p$ элементов по p. Следовательно, T_r совпадает с $P(s-1, p, [j_1, \dots, j_p])$. В силу предположения индукции (по m) $\det P(s-1, p, [j_1, \dots, j_p]) > 0$, следовательно, $\det T_r > 0$. Во втором случае ν-я и $\nu+1$-я строки матрицы T_r совпадают. Следовательно, $\det T_r = 0$. Таким образом, каждое слагаемое в сумме (17) либо положительно, либо равно нулю. Существует по крайней мере одно положительное слагаемое в сумме (17) — это определитель матрицы T_r, отвечающей размещению $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$, где $j_\nu = i_\nu$, $\nu = \overline{1,p}$. Следовательно, $\det P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) = \sum\limits_r \det T_r > 0$. Теорема 3 доказана. □

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \{1, \dots, m+1\}$ выберем l подряд идущих строк $\psi(m, l, k+i)$ $(\varphi(m, l, k+i))$, $i = \overline{0, l-1}$ матрицы $A(m, l)$ $(B(m, l))$ и составим из них $l \times l$-матрицы

$$R(m,l,k) = \left\| \begin{matrix} \psi(m,l,k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(m,l,k+l-1) \end{matrix} \right\|, \qquad T(m,l,k) = \left\| \begin{matrix} \varphi(m,l,k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(m,l,k+l-1) \end{matrix} \right\|. \tag{19}$$

Следствие 1. *Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ и для каждого $k \in \{1, \dots, m+1\}$ матрица $R(m, l, k)$ $(T(m, l, k))$ невырождена.*

Это утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 2 (теоремы 1), поскольку строки матрицы $R(m, l, k)$ $(T(m, l, k))$ линейно независимы.

Далее, зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$. Положим $n := m + l - 1$. Тогда $n \in \mathbb{N}_0$ и $n \geqslant m$. Рассмотрим горизонтальную полосу $\Pi_{n,m}$ в полосе Π, которая состоит из горизонтальных рядов полосы Π с m-го по n-й (всего таких рядов l). Проведем прямую, параллельную левой наклонной стороне треугольника Δ, между наклонными рядами a_k^n, $k \in \mathbb{N}_0$ и a_k^{n+1}, $k \in \mathbb{N}_0$. Далее, проведем прямую, параллельную правой наклонной стороне треугольника Δ, между наклонными рядами a_k^{k-n-1}, $k \in \mathbb{N}_0$ и a_k^{k-n}, $k \in \mathbb{N}_0$. Эти две прямые ограничивают в полосе $\Pi_{n,m}$ числовую трапецию $T_{n,m}$. *Горизонтальным рядом* (или просто *рядом*) трапеции $T_{n,m}$ будем называть конечную совокупность элементов соответствующего ряда полосы $\Pi_{n,m}$, заключенную между наклонными прямыми. Высота трапеции $T_{n,m}$ равна l рядов. Пронумеруем ряды трапеции сверху вниз номерами с 1 по l, тогда k-й ряд трапеции $T_{n,m}$ лежит в $m+k-1$-м ряду полосы Π, $k = \overline{1,l}$. В нижнем основании (то есть в l-м ряду) трапеции находится $n+1$ чисел $(a_n^0, \dots, a_n^n)$, все они не равны нулю; в верхнем основании (то есть в первом ряду) находится $(n+l)$ чисел $(0, \dots, 0, a_m^0, \dots, a_m^m, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим горизонтальные ряды трапеции $T_{n,m}$. Будем выбирать вектор-строки длины l в этих рядах. В l-м ряду трапеции $T_{n,m}$ (который лежит в n-м ряду полосы Π) существует $m+1$ вектор-строк длины l:

$$\begin{aligned} \psi(n,l,l) &= (a_n^{n-l+1}, \dots, a_n^n) = (a_n^m, \dots, a_n^n), \\ \psi(n,l,l+1) &= (a_n^{n-l}, \dots, a_n^{n-1}) = (a_n^{m-1}, \dots, a_n^{n-1}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(n,l,l+m) &= (a_n^0, \dots, a_n^{l-1}) = (a_n^0, \dots, a_n^{n-m}). \end{aligned}$$

Пронумеруем эти вектор-строки индексом i_1: каждому значению индекса $i_1 \in \{1, \ldots, m+1\}$ поставим в соответствие вектор-строку $\psi(n, l, l-1+i_1)$. Далее в $l-1$ ряду трапеции $T_{n,m}$ существует $m+2$ вектор-строк длины l:

$$\begin{gathered}
\psi(n-1, l, l-1) = (a_{n-1}^{n-l+1}, \ldots, a_{n-1}^{n-1}, a_{n-1}^{n}) = (a_{n-1}^{m}, \ldots, a_{n-1}^{n-1}, 0), \\
\psi(n-1, l, l) = (a_{n-1}^{n-l}, \ldots, a_{n-1}^{n-1}) = (a_{n-1}^{m-1}, \ldots, a_{n-1}^{n-1}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(n-1, l, l+m) = (a_{n-1}^{-1}, a_{n-1}^{0}, \ldots, a_{n-1}^{l-2}) = (0, a_{n-1}^{0}, \ldots, a_{n-1}^{n-m-1}).
\end{gathered}$$

Пронумеруем эти вектор-строки индексом i_2: каждому значению индекса $i_2 \in \{1, \ldots, m+2\}$ поставим в соответствие вектор-строку $\psi(n-1, l, l-2+i_2)$. И так далее, в $l-k+1$-м ряду трапеции $T_{n,m}$ существует $m+k$ вектор-строк длины l. Пронумеруем эти вектор-строки индексом i_k:

$$\psi(n-(k-1), l, l-k+i_k), \quad i_k \in \{1, \ldots, m+k\}.$$

Наконец, в первом ряду трапеции $T_{n,m}$ существует $m+l$ вектор-строк длины l — это строки $\psi(m, l, i_l)$, $i_l \in \{1, \ldots, m+l\}$.

Для заданных $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ рассмотрим всевозможные размещения $[i_1, \ldots, i_l]$ из $m+l$ элементов $\{1, \ldots, m+l\}$ по l элементов, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1 \leqslant i_1 \leqslant m+1, \quad 0 \leqslant i_{\nu+1} - i_\nu \leqslant 1, \quad \nu = \overline{1, l-1}. \tag{20}$$

Тогда для любого такого размещения $\beta = [i_1, \ldots, i_l]$ выполнены условия

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_l \leqslant m+l, \quad i_{\nu+1} \leqslant i_\nu + 1.$$

Будем называть такие допустимые размещения, удовлетворяющие условиям (20), *кортежами*. Множество всех кортежей обозначим через $D(m, l)$. Каждому заданному кортежу $\beta' = [i'_1, \ldots, i'_l]$ поставим в соответствие совокупность из l вектор-строк длины l трапеции $T_{n,m}$ следующим образом. Индексу i'_1 поставим в соответствие строку $\psi(n, l, l-1+i'_1)$ последнего ряда трапеции $T_{n,m}$, индексу i'_2 — строку $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ предпоследнего ряда трапеции $T_{n,m}$, и так далее, индексу i'_k — строку $\psi(n-(k-1), l, l-k+i'_k)$; наконец, индексу i'_l — строку $\psi(m, l, i'_l)$ первого ряда трапеции $T_{n,m}$. Выясним, как связаны между собой выбранные таким образом вектор-строки. Во-первых, заметим, что установленное соответствие корректно определено, поскольку из условий (20) следует, что

$$1 \leqslant i'_1 \leqslant m+1, \quad 1 \leqslant i'_2 \leqslant m+2, \quad \ldots, \quad 1 \leqslant i'_k \leqslant m+k, \quad \ldots, \quad 1 \leqslant i'_l \leqslant m+l, \tag{21}$$

следовательно, все выбранные вектор-строки содержатся внутри трапеции $T_{n,m}$. Далее, индекс i'_2 либо равен i'_1, либо $i'_2 = i'_1 + 1$. Этому индексу соответствует строка $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ предпоследнего ряда трапеции $T_{n,m}$. Эта строка получается следующим образом. Пусть мы находимся в вектор-строке $\psi(n, l, l-1+i'_1)$ трапеции $T_{n,m}$. Если мы будем двигаться из этой вектор-строки в трапеции $T_{n,m}$ на один ряд вверх влево, то по свойству «сдвига вверх» мы попадем в строку $\psi(n-1, l, l-1+i'_1)$. Эта строка совпадает с $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ в том случае, когда $i'_2 = i'_1 + 1$. Если же мы двигаемся из вектор-строки $\psi(n, l, l-1+i'_1)$ на один ряд вверх вправо в трапеции $T_{n,m}$, то по свойству «сдвига вверх» мы попадем в строку $\psi(n-1, l, l-1+i'_1-1)$, которая совпадает со строкой $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ в том случае, когда $i'_2 = i'_1$. И так далее, для каждого $k = \overline{1, l-1}$ переходу от i'_k к i'_{k+1} в кортеже β' соответствует переход от строки $\psi(n-k+1, l, l-k+i'_k)$ к строке $\psi(n-k, l, l-k-1+i'_{k+1})$ в трапеции $T_{n,m}$, при этом переход в трапеции $T_{n,m}$ происходит на один ряд вверх влево, если $i'_{k+1} = i'_k + 1$, и на один ряд вверх вправо, если $i'_{k+1} = i'_k$. В результате каждому кортежу $\beta = [i_1, \ldots, i_l] \in D(m, l)$ взаимно однозначно соответствует некоторый «ломаный путь» (путь вдоль некоторой ломаной) длины l снизу вверх по вектор-строкам (размерности l) трапеции $T_{n,m}$ (звенья этой ломаной параллельны левой или правой сторонам треугольника Δ); в частности, этот путь будет прямым и направленным вверх влево, если i_k и i_{k+1} для всех $k = \overline{1, l-1}$ отличаются на единицу, и прямым и направленным вверх вправо, если все i_k, $k = \overline{1, l}$ равны между собой. Составим по кортежу $\beta = [i_1, \ldots, i_l]$ матрицу из соответствующих вектор-строк

$$Q(m,l,\beta) = \left\| \begin{matrix} \psi(m,l,i_l) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(n-1,l,l-2+i_2) \\ \psi(n,l,l-1+i_1) \end{matrix} \right\|. \tag{22}$$

Теорема 4. *Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ и для любого кортежа $\beta \in D(m,l)$ матрица $Q(m,l,\beta)$ невырождена.*

Замечание 2. Теорема 4 означает следующее. Рассмотрим произвольный ряд с номером $n \in \mathbb{N}_0$ в полосе Π. Рассмотрим в этом ряду произвольную вектор-строку ψ произвольной длины l, *не содержащую нулей.* Двигаясь вверх из вектор-строки ψ, поднимаясь на каждом шагу на один ряд вверх влево или вверх вправо, получим некоторый путь из l вектор-строк. Теорема 4 утверждает, что для любого такого пути все вектор-строки, лежащие на этом пути, будут линейно независимы.

Проведем вышеописанное построение для полосы Π_+ аналогичным образом и построим по кортежу $\beta = [i_1, \ldots, i_l]$ соответствующую матрицу из векторов полосы Π_+:

$$S(m,l,\beta) = \left\| \begin{matrix} \varphi(m,l,i_l) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(n-1,l,l-2+i_2) \\ \varphi(n,l,l-1+i_1) \end{matrix} \right\|.$$

Теорема 5. *Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ и для любого кортежа $\beta \in D(m,l)$ матрица $S(m,l,\beta)$ невырождена.*

Очевидно, что теоремы 4 и 5 равносильны (см. доказательство теоремы 2). Поэтому, если доказана одна из них, то доказана и другая. Будем доказывать теорему 5.

Замечание 3. Рассмотрим произвольный элемент b_n^m, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ полосы Π_+. Если $b_n^m = 0$, то отсюда следует, что оба элемента b_{n-1}^{m-1} и b_{n-1}^m, расположенные на один ряд выше слева и справа от b_n^m, равны нулю. Для матрицы $S(m,l,\beta)$ это означает следующее: если элемент s_{ij} матрицы $S(m,l,\beta)$ равен нулю, то $s_{\nu j} = 0$ для всех $\nu = \overline{1, i-1}$ (то есть все элементы, расположенные над ним, также равны нулю).

Доказательству теоремы 5 предпошлем некоторые вспомогательные утверждения. Найдем общее число $d(m,l)$ элементов множества $D(m,l)$. Пусть $m = 0$. Рассмотрим множество $D(0,l)$. По определению для любого кортежа $\beta = [i_1, \ldots, i_l] \in D(0,l)$ выполнено $i_1 = 1$. Если $l = 1$, то $d(0,1) = 1$. Для произвольного l каждому кортежу $\beta = [i_1, \ldots, i_l] \in D(0,l)$ соответствует два кортежа

$$\beta_1 = [1, i_1, \ldots, i_l],\ \beta_2 = [1, i_1 + 1, \ldots, i_l + 1] \ \in\ D(0, l+1).$$

Легко видеть, что (двузначное) отображение $\beta \mapsto \{\beta_1, \beta_2\}$ инъективно и сюръективно отображает $D(0,l)$ в $D(0,l+1)$, поэтому $d(0,l+1) = 2d(0,l)$, следовательно, $d(0,l) = 2^{l-1}$.

Рассмотрим множество $D(m,l)$. Здесь первый индекс может принимать одно из значений $1, \ldots, m+1$. Каждому кортежу $\beta_0 = [i_1, \ldots, i_l] \in D(0,l)$ соответствует $m+1$ кортежей

$$\beta_s := \beta_0 + s := [i_1 + s, \ldots, i_l + s] \in D(m,l), \quad s = 0, \ldots, m,$$

и $m+1$-значное отображение $\beta_0 \mapsto \{\beta_s,\ s = \overline{0, m}\}$ инъективно и сюръективно отображает $D(0,l)$ в $D(m,l)$. Поэтому $d(m,l) = (m+1)d(0,l) = (m+1)2^{l-1}$.

Произвольный кортеж $\beta \in D(m,l)$ можно единственным образом представить в виде суммы $\beta = \widetilde{\beta}_0 + s'$, где $\widetilde{\beta}_0 \in D(0,l)$, $s' \in \{0, \ldots, m\}$, то есть β совпадает с $\widetilde{\beta}_{s'}$. Отметим, что $D(0,l) \subset D(m,l)$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 1. *Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$, для любого $s \in \{0, \ldots, m\}$ и для любого кортежа $\beta_0 \in D(0, l)$ выполнено равенство*

$$S(m, l, \beta_0 + s) = S(0, l, \beta_0) \cdot T(m, l, s + 1), \tag{23}$$

где матрица $T(m, l, k)$ определена равенством (19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы произвольные $m \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$, любое $s \in \{0, \ldots, m\}$ и произвольный кортеж $\beta_0 = [i_1, \ldots, i_l] \in D(0, l)$. Тогда

$$\begin{array}{cccccc} i_1 = 1, & 1 \leqslant i_2 \leqslant 2, & \ldots\ldots, & 1 \leqslant i_k \leqslant k, & \ldots\ldots, & 1 \leqslant i_l \leqslant l, \\ l - 1 + i_1 = 1, & l - 1 \leqslant l - 2 + i_2 \leqslant l, & \ldots\ldots, & l - k + 1 \leqslant l - k + i_k \leqslant l, & \ldots\ldots, & 1 \leqslant i_l \leqslant l. \end{array}$$

Рассмотрим кортеж $\beta_0 + s = [j_1, \ldots, j_l] \in D(m, l)$. Тогда $j_\nu = i_\nu + s$, $\nu = \overline{1, l}$. Имеем

$$S(m, l, \beta_0 + s) = \left\| \begin{array}{c} \varphi(m, l, j_l) \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(m + l - k, l, l - k + j_k) \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(m + l - 2, l, l - 2 + j_2) \\ \varphi(m + l - 1, l, l - 1 + j_1) \end{array} \right\|, \quad S(0, l, \beta_0) = \left\| \begin{array}{c} \varphi(0, l, i_l) \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(l - k, l, l - k + i_k) \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(l - 2, l, l - 2 + i_2) \\ \varphi(l - 1, l, l - 1 + i_1) \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим k-ю снизу строку матрицы $S(m, l, \beta_0 + s)$:

$$\varphi(m + l - k, l, l - k + j_k) = \varphi(m + l - k, l, l - k + i_k + s), \quad k \in \{1, \ldots, l\}.$$

По формуле (15) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(m + l - k, l, l - k + i_k + s) = b^0_{l-k}\varphi(m, l, i_k + s) + b^1_{l-k}\varphi(m, l, i_k + s + 1) + \ldots \\ + b^\nu_{l-k}\varphi(m, l, i_k + s + \nu) + \ldots + b^{l-k}_{l-k}\varphi(m, l, i_k + s + l - k). \end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим матрицу $S(0, l, \beta_0)T(m, l, s + 1)$ и ее k-ю снизу строку ξ_k, $k \in \{1, \ldots, l\}$. Имеем $\xi_k = \eta_k T(m, l, s + 1)$, где η_k — k-я снизу строка матрицы $S(0, l, \beta_0)$. Строка η_k имеет вид

$$\eta_k = \varphi(l - k, l, l - k + i_k) = (b^{1-i_k}_{l-k}, b^{2-i_k}_{l-k}, \ldots, b^{l-i_k}_{l-k}).$$

Тогда

$$\xi_k = b^{1-i_k}_{l-k}\varphi(m, l, s+1) + b^{2-i_k}_{l-k}\varphi(m, l, s+2) + \ldots + b^{l-i_k}_{l-k}\varphi(m, l, s+l) = \sum_{\nu=1}^{l} b^{\nu-i_k}_{l-k}\varphi(m, l, \nu+s). \tag{25}$$

Заметим, что $1 \leqslant i_k \leqslant l - k + i_k \leqslant l$. Рассмотрим сумму (25). Если $\nu < i_k$, то $\nu - i_k < 0$, тогда $b^{\nu-i_k}_{l-k} = 0$; аналогично, если $\nu > l - k + i_k$, то $\nu - i_k > l - k$, тогда также $b^{\nu-i_k}_{l-k} = 0$. Поэтому в формуле (25) суммирование по ν от 1 до l можно заменить на суммирование по ν от i_k до $l - k + i_k$. Таким образом,

$$\xi_k = \sum_{\nu=i_k}^{l-k+i_k} b^{\nu-i_k}_{l-k}\varphi(m, l, \nu + s) = b^0_{l-k}\varphi(m, l, i_k + s) + \ldots + b^{l-k}_{l-k}\varphi(m, l, l - k + i_k + s). \tag{26}$$

Из равенств (24) и (26) следует, что $\varphi(m + l - k, l, l - k + i_k + s) = \xi_k$. Таким образом, k-я снизу строка матрицы $S(m, l, \beta_0 + s)$ совпадает с k-й снизу строкой $S(0, l, \beta_0)T(m, l, s + 1)$ для всех $k \in \{1, \ldots, l\}$. Следовательно, выполнено равенство (23). Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ и для любого кортежа $\beta \in D(0, l)$*

$$\det S(0, l, \beta) \neq 0. \tag{27}$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по l. Если $l=1$, то $S(0,l,1)=\|1\|$ — это 1×1-матрица и $\det S(0,l,1)=1$. Если $l=2$, то возможны только 2 кортежа $[1,1],[1,2]\in D(0,2)$. Тогда

$$S(0,2,[1,1])=\begin{Vmatrix}1&0\\1&1\end{Vmatrix},\quad S(0,2,[1,2])=\begin{Vmatrix}0&1\\1&1\end{Vmatrix}$$

и $\det S(0,2,[1,1])=1\neq 0$, $\det S(0,2,[1,2])=-1\neq 0$.

Шаг индукции по l. Предположим, что для любого $l=1,2,\ldots,p-1$ и для любого кортежа $\beta\in D(0,l)$ выполнено неравенство (27). Докажем тогда, что для $l=p$ и для любого кортежа $\beta\in D(0,p)$ выполнено (27). По индукции отсюда будет следовать справедливость неравенства (27) для любого $l\in\mathbb{N}$ и для любого кортежа $\beta\in D(0,l)$, и лемма будет доказана.

Пусть $l=p$. Рассмотрим произвольный кортеж $\widehat{\beta}=[i_1,\ldots,i_p]\in D(0,p)$. Индекс i_1 может быть равен только 1, поэтому последняя строка матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ равна

$$\varphi(p-1,p,p)=(b^0_{p-1},\ldots,b^{p-1}_{p-1}).$$

Далее, индекс i_2 может принимать только 2 значения: 1 и 2. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. $i_2=1$. Значит, $i_2=i_1$. По определению матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ по кортежу $\widehat{\beta}$ предпоследняя строка матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ получается при переходе из строки $\varphi(p-1,p,p)$ полосы Π_+ на один ряд вверх вправо в полосе Π_+. По свойству «сдвига вверх» предпоследняя строка матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ равна

$$\varphi(p-2,p,p-1)=(b^0_{p-2},\ldots,b^{p-1}_{p-2})=(b^0_{p-2},\ldots,b^{p-2}_{p-2},0)=\bigl(\varphi(p-2,p-1,p-1),0\bigr).\qquad(28)$$

Из замечания 3 отсюда следует, что элементы s_{ip}, $i=\overline{1,p-1}$ последнего столбца матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ равны нулю.

Рассмотрим размещение $[i_2,\ldots,i_p]$ из $(p-1)$ элементов по $(p-1)$ элементов. Это размещение удовлетворяет условиям

$$i_2=1,\quad 0\leqslant i_{\nu+1}-i_\nu\leqslant 1,\quad \nu=\overline{2,p-1},$$

следовательно, образует кортеж $\widetilde{\beta}=[i_2,\ldots,i_p]\in D(0,p-1)$. Построим по этому кортежу матрицу $S(0,p-1,\widetilde{\beta})$. Первый индекс i_2 кортежа $\widetilde{\beta}$ равен 1, поэтому последняя строка матрицы $S(0,p-1,\widetilde{\beta})$ равна $\varphi(p-2,p-1,p-1)$. Перейдем от индекса i_2 к i_3 в кортеже $\widetilde{\beta}$. При этом переходе к i_2 прибавится 0 или 1. Этому переходу индекса соответствует переход от строки $\varphi(p-2,p-1,p-1)$ к строке $\xi\in\mathbb{R}^{p-1^*}$ полосы Π_+, расположенной на один ряд выше справа или слева (эта строка будет предпоследней строкой матрицы $S(0,p-1,\widetilde{\beta})$). Поскольку индексы i_2 и i_3 в кортежах $\widetilde{\beta}$ и $\widehat{\beta}$ совпадают, то соответствующий переход в том же направлении происходит в полосе Π_+ от строки (28) к строке $(\xi,0)\in\mathbb{R}^{p*}$, которая, таким образом, будет третьей снизу строкой матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$. Поскольку все дальнейшие переходы индексов от i_ν к $i_{\nu+1}$ в кортежах $\widetilde{\beta}$ и $\widehat{\beta}$ совпадают, следовательно, «ломаный путь» будет один и тот же для кортежа $\widetilde{\beta}$ и для кортежа $\widehat{\beta}$ (начиная со второго индекса). Этот путь для кортежа $\widetilde{\beta}$ проходит по некоторым вектор-строкам ξ_1, …, ξ_{p-1} размерности $p-1$, а для кортежа $\widehat{\beta}$ (начиная со второго индекса) — по соответствующим вектор-строкам $(\xi_1,0)$, …, $(\xi_{p-1},0)$ размерности p. Таким образом,

$$S(0,p,\widehat{\beta})=\left\|\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & S(0,p-1,\widetilde{\beta}) & & \vdots\\ & & & 0\\ \hline b^0_{p-1} & \ldots & b^{p-2}_{p-1} & b^{p-1}_{p-1}\end{array}\right\|.$$

Следовательно, $S(0,p,\widehat{\beta})=\det S(0,p-1,\widetilde{\beta})\neq 0$ по предположению индукции.

2. $i_2=2$. Значит, $i_2=i_1+1$. По определению матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ по кортежу $\widehat{\beta}$ предпоследняя строка матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ получается при переходе из строки $\varphi(p-1,p,p)$ полосы Π_+ на один

ряд вверх влево в полосе Π_+. По свойству «сдвига вверх» предпоследняя строка матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ равна

$$\varphi(p-2,p,p)=(b_{p-2}^{-1},b_{p-2}^{0},\ldots,b_{p-2}^{p-2})=(0,b_{p-2}^{0},\ldots,b_{p-2}^{p-2})=\big(0,\varphi(p-2,p-1,p-1)\big).$$

Из замечания 3 отсюда следует, что элементы s_{i1}, $i=\overline{1,p-1}$ первого столбца матрицы $S(0,p,\widehat{\beta})$ равны нулю.

Построим по кортежу $\widehat{\beta}$ размещение $[i'_1,\ldots,i'_{p-1}]:=[i_2-1,\ldots,i_p-1]$ из $(p-1)$ элементов по $(p-1)$ элементов. Это размещение удовлетворяет условиям

$$i'_1=1,\quad 0\leqslant i'_{\nu+1}-i'_\nu\leqslant 1,\quad \nu=\overline{1,p-2},$$

следовательно, образует кортеж. Обозначим его $\widetilde{\beta}=[i'_1,\ldots,i'_{p-1}]\in D(0,p-1)$. Построим по этому кортежу матрицу $S(0,p-1,\widetilde{\beta})$. Поскольку $i'_1=1$, то последняя строка матрицы $S(0,p-1,\widetilde{\beta})$ равна $\varphi(p-2,p-1,p-1)$. Далее идут такие же рассуждения, как и в первом случае. Заметим, что $i_{\nu+1}-i_\nu=i'_\nu-i'_{\nu-1}$, $\nu=\overline{2,p-1}$, то есть переход от индекса $i'_{\nu-1}$ к i'_ν в кортеже $\widetilde{\beta}$ совпадает с переходом от индекса i_ν к $i_{\nu+1}$ в кортеже $\widehat{\beta}$. Это значит, что «ломаный путь» для кортежа $\widetilde{\beta}$ и для кортежа $\widehat{\beta}$ (начиная со второго индекса) будет один и тот же. Этот путь для кортежа $\widetilde{\beta}$ проходит по некоторым вектор-строкам $\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}$ размерности $p-1$, а для кортежа $\widehat{\beta}$ (начиная со второго индекса) — по соответствующим вектор-строкам $(0,\xi_1)$, …, $(0,\xi_{p-1})$ размерности p. Таким образом,

$$S(0,p,\widehat{\beta})=\left\|\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & S(0,p-1,\widetilde{\beta}) \\ 0 & \\ \hline b_{p-1}^{0} & b_{p-1}^{1}\ \ldots\ b_{p-1}^{p-1}\end{array}\right\|.$$

Следовательно, $S(0,p,\widehat{\beta})=(-1)^{p+1}\det S(0,p-1,\widetilde{\beta})\neq 0$ по предположению индукции. Лемма 2 доказана. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Рассмотрим любое $m\in\mathbb{N}_0$, любое $l\in\mathbb{N}$ и любой кортеж $\beta\in D(m,l)$. Тогда этот кортеж β (единственным образом) можно представить в виде суммы $\beta=\beta_0+s$, где $\beta_0\in D(0,l)$, $s\in\{0,\ldots,m\}$. По лемме 1 имеем

$$S(m,l,\beta)=S(m,l,\beta_0+s)=S(0,l,\beta_0)\cdot T(m,l,s+1).$$

Матрица $S(0,l,\beta_0)$ невырождена по лемме 2, матрица $T(m,l,s+1)$ невырождена по следствию 1. Отсюда следует, что матрица $S(m,l,\beta)$ невырождена. Теорема 5 доказана. Вместе в ней доказана и теорема 4. $\square$

Замечание 4. Можно рассмотреть следующую задачу. Будем рассматривать не только кортежи из множества $D(m,l)$, то есть те размещения, которые удовлетворяют условиям (20), а те размещения $[i'_1,\ldots,i'_l]$, которые удовлетворяют условиям (21). Обозначим множество таких размещений через $E(m,l)$. Множество $E(m,l)$ содержит $\dfrac{(m+l)!}{m!}$ элементов и $D(m,l)\subset E(m,l)$. По заданному размещению $\gamma=[i_1,\ldots,i_l]\in E(m,l)$ построим соответствующую матрицу

$$\widehat{S}(m,l,\gamma)=\left\|\begin{array}{c}\varphi(m,l,i_l)\\ \dotfill\\ \varphi(n-1,l,l-2+i_2)\\ \varphi(n,l,l-1+i_1)\end{array}\right\|.$$

По аналогии с теоремой 5 можно выдвинуть гипотезу: *для любых $m\in\mathbb{N}_0$ и $l\in\mathbb{N}$ и для любого размещения $\gamma\in E(m,l)$ матрица $\widehat{S}(m,l,\gamma)$ невырождена.* Это утверждение означает следующее. Рассмотрим произвольную трапецию $T_{n,m}$, $m,n\in\mathbb{N}_0$, $n\geqslant m$; $l:=n-m+1$. Выберем в каждом ряду трапеции $T_{n,m}$ произвольную строку ξ_i, $i=\overline{1,l}$ длины l. Тогда эти строки будут линейно независимы. Это утверждение более сильное, чем теорема 5. Оно представляется верным, однако не доказано.

§ 3. Достаточное условие согласованности

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть дана система* (1) *с матрицами* (3). *Если*

$$\operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \geqslant n + 1, \tag{29}$$

то система (1), (3) *согласованна.*

Доказательство. Рассмотрим систему (1) с матрицами (3). Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = k$, $m \leqslant n$, $k \leqslant n$. Из вида (3) матриц B и C следует, что $n-p+1 \geqslant m$, $p \geqslant k$, $p \in \{1,\ldots,n\}$, поэтому $n+1 \geqslant m+k$. Таким образом условие (29) сводится к тому, что

$$m + k = n + 1. \tag{30}$$

Заметим, что из условия (30) с необходимостью вытекает неравенство $mk \geqslant n$, поскольку если $mk < n$, то $(m-1)(k-1) = mk - (m+k) + 1 < n - (n+1) + 1 = 0$, что противоречит условиям $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$.

В силу следствия 4 работы [1] свойство согласованности системы (1) с матрицами A, B, C равносильно свойству согласованности системы (1) с матрицами $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$, где $\widetilde{A} = SAS^{-1}$, $\widetilde{B} = SB$, $\widetilde{C}^* = C^*S^{-1}$, а $S \in M_n$ — произвольная невырожденная матрица. Положим $S_1 := \operatorname{diag}\{1, a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{n-1,n}\} \in M_n$. Матрица S_1 диагональная и невырожденная. Построим матрицы $A_1 := S_1AS_1^{-1} = \{a^1_{ij}\}^n_{i,j=1}$, $B_1 := S_1B$, $C_1^* := C^*S_1^{-1}$. При умножении A на S_1^{-1} первый столбец матрицы A умножается на 1, второй — на a_{12}^{-1}, …, i-й — на $a_{i-1,i}^{-1}$, …, n-й — на $a_{n-1,n}^{-1}$. Первая наддиагональ матрицы AS_1^{-1} состоит из единиц. При умножении S_1 на AS_1^{-1} первая строка матрицы AS_1^{-1} умножится на 1, вторая — на a_{12}, …, i-я на $a_{i-1,i}$, …, n-я на $a_{n-1,n}$. Таким образом, матрица A_1 будет иметь такой же вид (3), как и матрица A (элементы первой наддиагонали не равны нулю, элементы выше первой наддиагонали равны нулю), при этом $a^1_{12} = 1$, $a^1_{i+1,i+2} = a_{i,i+1}$, $i = \overline{1, n-2}$, то есть при переходе от матрицы A к матрице $A_1 = S_1AS_1^{-1}$ элементы первой наддиагонали сдвинутся вправо вниз по диагонали на единицу, элемент $a_{n-1,n}$ исчезает, появляется элемент $a^1_{12} = 1$. Матрицы B_1 и C_1 будут иметь такой же вид (3), как и матрицы B и C.

На втором шаге положим $S_2 := \operatorname{diag}\{1, 1, a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{n-2,n-1}\} \in M_n$ и построим матрицы $A_2 := S_2A_1S_2^{-1} = \{a^2_{ij}\}^n_{i,j=1}$, $B_2 := S_2B_1$, $C_2^* := C_1^*S_2^{-1}$. Получим, что матрицы A_2, B_2, C_2 будут иметь такой же вид (3), как и матрицы A, B, C, при этом уже два элемента наддиагонали матрицы A_2 будут равны единице: $a^2_{12} = 1$, $a^2_{23} = 1$. Продолжая далее, для каждого $i = \overline{1, n-1}$ построим матрицы $S_i := \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1, a_{12}, \ldots, a_{n-i,n-i+1}\} \in M_n$ и матрицу $S := S_{n-1} \cdot \ldots \cdot S_1 \in M_n$. Тогда все матрицы S_i, $i = \overline{1, n-1}$ и S диагональные и невырожденные. Построим $\widetilde{A} := SAS^{-1}$, $\widetilde{B} := SB$, $\widetilde{C}^* := C^*S^{-1}$. Тогда $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ имеют вид (3), при этом наддиагональ матрицы $\widetilde{A}$ состоит из единиц. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что матрица A системы (1), (3) имеет вид $A = J + T$, где J — первый единичный косой ряд, T — нижняя треугольная матрица.

Далее из равенства (30) следует, что $n - p + 1 = m$ и $p = k$. Таким образом, матрицы B и C имеют вид $B = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline P \end{array} \right\|$, $C = \left\| \begin{array}{c} R \\ \hline 0 \end{array} \right\|$, $P \in M_m$, $R \in M_k$. При этом, поскольку $\operatorname{rank} B = m$ и $\operatorname{rank} C = k$, то $\det P \neq 0$ и $\det R \neq 0$. В силу следствия 3 работы [1] система (1) с матрицами A, B, C согласованна тогда и только тогда, когда для любых невырожденных матриц $F \in M_m$, $G \in M_k$ система (1) с матрицами $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{B} = BF$, $\widetilde{C} = CG$ согласованна. Выберем $F = P^{-1}$, $G = R^{-1}$, получим, что $\widetilde{B} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \hline I \end{array} \right\|$, $I \in M_m$, $\widetilde{C} = \left\| \begin{array}{c} I \\ \hline 0 \end{array} \right\|$, $I \in M_k$. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что коэффициенты системы (1), (3) имеют вид

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & 1\\ a_{n1} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & a_{nn}\end{matrix}\right\|,\quad B=\left\|\begin{matrix}0&\dots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\dots&0\\ 1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{matrix}\right\|,\quad C=\left\|\begin{matrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\\ 0&\dots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\dots&0\end{matrix}\right\|. \tag{31}$$

Покажем, что система (1) с матрицами (31) является согласованной для любой матрицы A, имеющей вид (31). Тогда теорема 6 будет доказана. Имеем

$$A=J+T,\quad T=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n,\quad a_{ij}=0,\quad j>i,\qquad B=[e_p,\dots,e_n],\quad C=[e_1,\dots,e_p].$$

Построим по системе (1) с матрицами (31) большую систему

$$\dot z=Pz+Qv,\quad z\in\mathbb{R}^{n^2},\quad v\in\mathbb{R}^{mk}, \tag{32}$$

где $P=A\otimes I-I\otimes A^*\in M_{n^2}$, $I\in M_n$, $Q=B\otimes C\in M_{n^2,mk}$. Система (1), (31) согласованна тогда и только тогда, когда большая система (32) вполне управляема. Построим матрицу управляемости большой системы $W=[Q,PQ,\dots,P^{n^2-1}Q]\in M_{n^2,n^2mk}$. Большая система вполне управляема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}W=n^2$. Построим «усеченную» матрицу управляемости $K=[Q,PQ,\dots,P^{n-1}Q]\in M_{n^2,nmk}$. Покажем, что

$$\operatorname{rank}K=n^2. \tag{33}$$

Отсюда будет следовать, что $\operatorname{rank}W=n^2$ и теорема будет доказана.

Матрица Q состоит из mk столбцов $e_i\otimes e_j$, $i=\overline{p,n}$, $j=\overline{1,p}$. Выберем из них p столбцов $e_n\otimes e_j$, $j=\overline{1,p}$ и $n-p$ столбцов $e_i\otimes e_p$, $i=\overline{p,n-1}$ и составим из них матрицу

$$\overline{Q}=[e_n\otimes e_1,e_n\otimes e_2,\dots,e_n\otimes e_p,e_{n-1}\otimes e_p,e_{n-2}\otimes e_p,\dots,e_p\otimes e_p]\in M_{n^2,n}.$$

Построим матрицу $\overline{K}=[\overline{Q},P\overline{Q},\dots,P^{n-1}\overline{Q}]\in M_{n^2}$. Матрица $\overline{K}$ получена из матрицы K вычеркиванием некоторых столбцов и перестановкой некоторых из оставшихся столбцов. Покажем, что

$$\operatorname{rank}\overline{K}=n^2. \tag{34}$$

Отсюда будет следовать, что столбцы матрицы $\overline{K}$ линейно независимы. Это будет означать, что в матрице K найдется n^2 линейно независимых столбцов, то есть выполнено (33), таким образом, теорема будет доказана.

Введем в рассмотрение линейный оператор $L=L_A:M_n\to M_n$, который ставит в соответствие матрице $F\in M_n$ коммутатор матриц A и F: $L(F):=[A,F]=AF-FA$. Тогда

$$L^2(F)=[A,L(F)]=[A,AF-FA]=A(AF-FA)-(AF-FA)A=A^2F-2AFA+FA^2,$$
$$\dots,\quad L^\nu(F)=\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^iC_\nu^iA^{\nu-i}FA^i.$$

Построим n^2 матриц в M_n:

$$\begin{matrix} F_1=E_{n1}, & \dots, & F_p=E_{np}, & F_{p+1}=E_{n-1,p}, & \dots, & F_n=E_{pp},\\ L(F_1), & \dots, & L(F_p), & L(F_{p+1}), & \dots, & L(F_n),\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ L^{n-1}(F_1), & \dots, & L^{n-1}(F_p), & L^{n-1}(F_{p+1}), & \dots, & L^{n-1}(F_n).\end{matrix} \tag{35}$$

Обозначим через vec : $M_n \to \mathbb{R}^{n^2}$ отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H := \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nn})$. Нетрудно проверить, что для любых $g, h \in \mathbb{R}^{n^2}$ $\operatorname{vec}(gh^*) = g \otimes h$; для любых $F, G, H \in M_n$ равенство $V = FG$ эквивалентно $\operatorname{vec} V = (F \otimes I)\operatorname{vec} G$, $I \in M_n$; равенство $Y = GH$ эквивалентно $\operatorname{vec} Y = (I \otimes H^*)\operatorname{vec} G$, $I \in M_n$. Применим к матрицам $F_1, \ldots, F_n$ отображение vec и составим из этих векторов матрицу, получим

$$[\operatorname{vec} F_1, \ldots, \operatorname{vec} F_n] = [\operatorname{vec}(e_n e_1^*), \ldots, \operatorname{vec}(e_p e_p^*)] = [e_n \otimes e_1, \ldots, e_p \otimes e_p] = \overline{Q}.$$

Далее, для любого $\nu = \overline{1, n}$ и для любого $i \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{vec}\big(L^i(F_\nu)\big) = \operatorname{vec}\big[A, L^{i-1}(F_\nu)\big] = \operatorname{vec}\big(AL^{i-1}(F_\nu) - L^{i-1}(F_\nu)A\big) = \\ = (A \otimes I - I \otimes A^*)\operatorname{vec}\big(L^{i-1}(F_\nu)\big) = P\Big(\operatorname{vec}\big(L^{i-1}(F_\nu)\big)\Big).$$

Поэтому

$$\big[\operatorname{vec}\big(L^1(F_1)\big), \ldots, \operatorname{vec}\big(L^1(F_n)\big)\big] = [P(\operatorname{vec} F_1), \ldots, P(\operatorname{vec} F_n)] = P[\operatorname{vec} F_1, \ldots, \operatorname{vec} F_n] = P\overline{Q},$$

и так далее, для любого $i \in \mathbb{N}$ $\big[\operatorname{vec}\big(L^i(F_1)\big), \ldots, \operatorname{vec}\big(L^i(F_n)\big)\big] = P^i\overline{Q}$. Условие (34) равносильно тому, что столбцы матрицы $\overline{K}$ линейно независимы. Применим к столбцам матрицы $\overline{K}$ отображение vec^{-1}, получим матрицы (35). Очевидно, что столбцы матрицы $\overline{K}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда матрицы (35) линейно независимы. Таким образом, достаточно доказать линейную независимость матриц (35), отсюда будет следовать (34), и теорема 6 будет доказана.

Докажем сначала, что матрицы (35) линейно независимы в том случае, когда $A = J$ (то есть когда $T = 0$). Положим

$$Z_\nu^0 := F_\nu, \quad Z_\nu^i := [J, Z_\nu^{i-1}], \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{36}$$

Тогда матрицы (36) совпадают с матрицами (35) для оператора $L = L_J$.

Обозначим через $N_0 \subset M_n$ множество диагональных матриц; $N_i \subset M_n$ — множество матриц, для которых элементы, находящиеся вне i-й наддиагонали, равны нулю ($i = 1, \ldots, n-1$); соответственно $N_{-i} \subset M_n$ — множество матриц, для которых элементы, находящиеся вне i-й поддиагонали, равны нулю ($i = 1, \ldots, n-1$). Множества N_i, $i = \overline{-(n-1), (n-1)}$ — это линейные подпространства в M_n, $\dim N_i = n - |i|$, $N_i \bigcap N_j = \{0\} \subset M_n$ при $i \neq j$, $M_n = N_{-(n-1)} \oplus \ldots \oplus N_0 \oplus \ldots \oplus N_{n-1}$, $\oplus$ — прямая сумма подпространств. Имеем

$$N_{-(n-1)} = \langle E_{n1}\rangle, \quad N_{-(n-2)} = \langle E_{n-1,1}, E_{n2}\rangle, \quad \ldots, \quad N_{-i} = \langle E_{i+1,1}, E_{i+2,2}, \ldots, E_{n,n-i}\rangle, \quad \ldots, \\ N_0 = \langle E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\rangle, \quad \ldots, \quad N_i = \langle E_{1,i+1}, \ldots, E_{n-i,n}\rangle, \quad \ldots, \quad N_{n-1} = \langle E_{1n}\rangle.$$

Заметим, что если $J \in M_n$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то для любого $r \in \mathbb{N}_0$

$$J^r e_i = \begin{cases} e_{i-r} \in \mathbb{R}^n, & i \geqslant r+1, \\ 0 \in \mathbb{R}^n, & i < r+1, \end{cases} \qquad e_i^* J^r = \begin{cases} e_{i+r}^* \in \mathbb{R}^{n*}, & i \leqslant n-r, \\ 0 \in \mathbb{R}^{n*}, & i > n-r. \end{cases} \tag{37}$$

Поэтому, в частности,

$$JE_{ij} = Je_i e_j^* = e_{i-1}e_j^* = E_{i-1,j}, \quad i = \overline{2, n},\ j = \overline{1, n}; \qquad JE_{1j} = 0 \in M_n, \quad j = \overline{1, n}; \\ E_{ij}J = e_i e_j^* J = e_i e_{j+1}^* = E_{i,j+1}, \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n-1}; \qquad E_{in}J = 0 \in M_n, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если $E_{ij} \in N_\nu$, то $JE_{ij} \in N_{\nu+1}$, $E_{ij}J \in N_{\nu+1}$, следовательно, $[J, E_{ij}] \in N_{\nu+1}$. Поэтому если $X \in N_\nu$, то $[J, X] = JX - XJ \in N_{\nu+1}$. Таким образом, имеем

$$\begin{array}{lllll} Z_1^0 \in N_{-(n-1)}, & Z_2^0 \in N_{-(n-2)}, & Z_3^0 \in N_{-(n-3)}, & \ldots\ldots\ldots, & Z_n^0 \in N_0, \\ Z_1^1 \in N_{-(n-2)}, & Z_2^1 \in N_{-(n-3)}, & Z_3^1 \in N_{-(n-4)}, & \ldots\ldots\ldots, & Z_n^1 \in N_1, \\ Z_1^2 \in N_{-(n-3)}, & Z_2^2 \in N_{-(n-4)}, & Z_3^2 \in N_{-(n-5)}, & \ldots\ldots\ldots, & Z_n^2 \in N_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ Z_1^{n-1} \in N_0, & Z_2^{n-1} \in N_1, & Z_3^{n-1} \in N_2, & \ldots\ldots\ldots, & Z_n^{n-1} \in N_{n-1}. \end{array} \tag{38}$$

Матрицы (38) разбиваются на группы Γ_i, $i = -(n-1), \dots, (n-1)$. Две матрицы лежат в одной и той же группе Γ_i, если они принадлежат одному и тому же подпространству N_i. Имеем

$$\Gamma_{-(n-1)} = \{Z_1^0\}, \quad \Gamma_{-(n-2)} = \{Z_1^1, Z_2^0\}, \quad \dots, \quad \Gamma_{-i} = \{Z_1^{n-i-1}, Z_2^{n-i-2}, \dots, Z_{n-i}^0\}, \quad \dots,$$
$$\Gamma_0 = \{Z_1^{n-1}, Z_2^{n-2}, \dots, Z_n^0\}, \quad \dots, \quad \Gamma_i = \{Z_{i+1}^{n-1}, \dots, Z_n^i\}, \quad \dots, \quad \Gamma_{n-1} = \{Z_n^{n-1}\}.$$

Очевидно, что матрицы, находящиеся в разных группах, линейно независимы. Таким образом, для того чтобы доказать, что матрицы (36) линейно независимы, достаточно доказать, что для каждого $i \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$ совокупность матриц, лежащих в одной группе Γ_i, линейно независима. Отсюда, в частности, будет следовать, что линейная оболочка матриц из одной группы Γ_i совпадает с N_i для любого $i \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$, поскольку количество матриц в группе Γ_i равно $n - |i|$.

Предположим, что матрицы группы Γ_0 линейно независимы. Покажем тогда, что матрицы группы Γ_{-1} также будут линейно независимы. Предположим противное, пусть матрицы группы Γ_{-1} линейно зависимы, то есть существует вектор $c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ такой, что $c_1 Z_1^{n-2} + c_2 Z_2^{n-3} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^0 = 0 \in M_n$. Тогда

$$0 = J(c_1 Z_1^{n-2} + c_2 Z_2^{n-3} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^0) - (c_1 Z_1^{n-2} + c_2 Z_2^{n-3} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^0)J =$$
$$= c_1(J Z_1^{n-2} - Z_1^{n-2} J) + c_2(J Z_2^{n-3} - Z_2^{n-3} J) + \dots + c_{n-1}(J Z_{n-1}^0 - Z_{n-1}^0 J) =$$
$$= c_1 Z_1^{n-1} + c_2 Z_2^{n-2} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^1.$$

Следовательно, матрицы $Z_1^{n-1}, \dots, Z_{n-1}^1$ группы Γ_0 линейно зависимы, а значит, и матрицы $Z_1^{n-1}, \dots, Z_{n-1}^1, Z_n^0$ группы Γ_0 линейно зависимы. Получили противоречие. Следовательно, совокупность матриц группы Γ_{-1} является линейно независимой. Аналогично можно показать, что совокупность матриц группы Γ_{-2} является линейно независимой. И так далее, из линейной независимости матриц группы Γ_0 следует, что для любого $i = -(n-1), \dots, -1$ совокупность матриц группы Γ_i линейно независима.

Таким образом, достаточно показать, что для каждого $i = 0, \dots, n-1$ матрицы группы Γ_i линейно независимы. Докажем предварительно вспомогательное утверждение.

Рассмотрим подпространство $N_\nu \subset M_n$. Обозначим через $\mathbf{E}_\nu = (E_{1,\nu+1}, \dots, E_{n-\nu,n})$, $\nu = 0, \dots, n-1$ базис пространства N_ν; соответственно $\mathbf{E}_{-\nu} = (E_{\nu+1,1}, \dots, E_{n,n-\nu})$ — базис пространства $N_{-\nu}$, $\nu = 1, \dots, n-1$. Для произвольного вектора(-строки) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-\nu}) \in \mathbb{R}^{n-\nu *}$, $\nu = \overline{0, n-1}$ через $\xi \circ \mathbf{E}_\nu$ обозначим матрицу $X \in N_\nu \subset M_n$, которая имеет координаты $(\xi_1, \dots, \xi_{n-\nu})$ в базисе $\mathbf{E}_\nu$, то есть

$$\xi \circ \mathbf{E}_\nu := \xi_1 E_{1,\nu+1} + \xi_2 E_{2,\nu+2} + \dots + \xi_{n-\nu} E_{n-\nu,n}.$$

Очевидно, матрицы $X_1 = \xi^1 \circ \mathbf{E}_\nu$, $\dots$, $X_r = \xi^r \circ \mathbf{E}_\nu \in N_\nu \subset M_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда вектор-строки $\xi^1, \dots, \xi^r \in \mathbb{R}^{n-\nu *}$ линейно независимы.

Зафиксируем $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и рассмотрим подпространство $N_{-j} \subset M_n$. Произвольная матрица базиса $\mathbf{E}_{-j}$ подпространства N_{-j} имеет вид $E_{j+r,r}$, где $r \in \{1, \dots, n-j\}$. Зафиксируем произвольное $i \in \{j, \dots, n-1\}$. Рассмотрим i-ю степень оператора $L = L_J$ от матрицы $E_{j+r,r}$. Имеем $L^i(E_{j+r,r}) \in N_{i-j}$. Выразим эту матрицу через базисные матрицы пространства N_{i-j}. Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого* $j \in \{0, \dots, n-1\}$, *для любого* $r \in \{1, \dots, n-j\}$ *и для любого* $i \in \{j, \dots, n-1\}$

$$L^i(E_{j+r,r}) = \psi(i, n+j-i, j+r) \circ \mathbf{E}_{i-j}, \tag{39}$$

где $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ *— это вектор-строка биномиальных коэффициентов, определенная во втором параграфе равенством* (10).

Доказательство леммы 3. Докажем сначала лемму при $j=0$. Зафиксируем произвольные $r\in\{1,\dots,n\}$ и $i\in\{0,\dots,n-1\}$. По определению оператора L имеем

$$L^i(E_{rr})=\sum_{s=0}^{i}(-1)^sC_i^sJ^{i-s}E_{rr}J^s=\sum_{s=0}^{i}a_i^sJ^{i-s}e_re_r^*J^s=\Big|\tau=s+r\Big|=\sum_{\tau=r}^{i+r}a_i^{\tau-r}J^{i-\tau+r}e_re_r^*J^{\tau-r}.$$

Здесь $a_i^s=(-1)^sC_i^s$ — биномиальные коэффициенты со знаком, определенные во втором параграфе. По свойству (37) имеем

$$J^{i-\tau+r}e_r=\begin{cases}e_{\tau-i}, & \tau\geqslant i+1,\\ 0, & \tau<i+1,\end{cases}\qquad e_r^*J^{\tau-r}=\begin{cases}e_\tau^*, & \tau\leqslant n,\\ 0, & \tau>n.\end{cases}$$

Таким образом,

$$L^i(E_{rr})=\sum_{\tau}a_i^{\tau-r}e_{\tau-i}e_\tau^*, \tag{40}$$

где суммирование по τ берется по множеству $\tau\in\{r,\dots,i+r\}\bigcap\{i+1,\dots,n\}$. Если $i+1<r$, то при $\tau=i+1,\dots,r-1$ имеем $a_i^{\tau-r}=0$. Аналогично, если $n>i+r$, то при $\tau=i+r+1,\dots,n$ имеем $a_i^{\tau-r}=0$. Поэтому можно считать, что суммирование в (40) берется по $\tau\in\{i+1,\dots,n\}$. Таким образом,

$$L^i(E_{rr})=\sum_{\tau=i+1}^{n}a_i^{\tau-r}e_{\tau-i}e_\tau^*=a_i^{i+1-r}E_{1,i+1}+a_i^{i+2-r}E_{2,i+2}+\ldots+a_i^{n-r}E_{n-i,n}=\psi(i,n-i,r)\circ\mathbf{E}_i.$$

Следовательно, при $j=0$ формула (39) верна.

Пусть теперь задано любое $j\in\{0,\dots,n-1\}$ и любое $r\in\{1,\dots,n-j\}$. Докажем равенство (39) для $i=j$. Имеем

$$L^j(E_{j+r,r})=\sum_{s=0}^{j}(-1)^sC_j^sJ^{j-s}E_{j+r,r}J^s=\sum_{s=0}^{j}a_j^sJ^{j-s}e_{j+r}e_r^*J^s=\Big|\tau=s+r\Big|=$$
$$=\sum_{\tau=r}^{j+r}a_j^{\tau-r}J^{j-\tau+r}e_{j+r}e_r^*J^{\tau-r}.$$

По свойству (37) имеем

$$J^{j-\tau+r}e_{j+r}=\begin{cases}e_\tau, & \tau\geqslant 1,\\ 0, & \tau<1,\end{cases}\qquad e_r^*J^{\tau-r}=\begin{cases}e_\tau^*, & \tau\leqslant n,\\ 0, & \tau>n.\end{cases}$$

Имеем $1\leqslant r\leqslant j+r\leqslant n$. Поэтому

$$L^j(E_{j+r,r})=\sum_{\tau=r}^{j+r}a_j^{\tau-r}e_\tau e_\tau^*=\sum_{\tau=r}^{j+r}a_j^{\tau-r}E_{\tau\tau}.$$

Поскольку при $\tau<r$ и при $\tau>j+r$ имеем $a_j^{\tau-r}=0$, то можно заменить сумму по τ от r до $j+r$ на сумму по τ от 1 до n. Получим, что

$$L^j(E_{j+r,r})=\sum_{\tau=1}^{n}a_j^{\tau-r}E_{\tau\tau}=a_j^{1-r}E_{11}+a_j^{2-r}E_{22}+\ldots+a_j^{n-r}E_{nn}=\psi(j,n,j+r)\circ\mathbf{E}_0.$$

Таким образом, формула (39) доказана при $i=j$.

Пусть теперь заданы любые $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $r \in \{1, \ldots, n-j\}$ и $i \in \{j+1, \ldots, n-1\}$. Обозначим $q := i - j \in \{1, \ldots, n-1-j\}$. Имеем

$$L^i\left(E_{j+r,r}\right) = L^q\left(L^j\left(E_{j+r,r}\right)\right) = L^q\left(\sum_{\tau=r}^{j+r} a_j^{\tau-r} E_{\tau\tau}\right) = \sum_{\tau=r}^{j+r} a_j^{\tau-r} L^q\left(E_{\tau\tau}\right) =$$

$$= \sum_{\tau=r}^{j+r} a_j^{\tau-r} \psi(q, n-q, \tau) \circ \mathbf{E}_q = \Big| s = \tau - r \Big| = \sum_{s=0}^{j} a_j^s \psi(q, n-q, s+r) \circ \mathbf{E}_q =$$

$$= \left(a_j^0 \psi(q, n-q, r) + a_j^1 \psi(q, n-q, r+1) + \ldots + a_j^j \psi(q, n-q, r+j)\right) \circ \mathbf{E}_q =$$

$$= \Big| \text{Свойство 4, } \S\, 2 \Big| = \psi(q+j, n-q, j+r) \circ \mathbf{E}_q = \psi(i, n+j-i, j+r) \circ \mathbf{E}_{i-j}.$$

Лемма 3 доказана. □

Воспользуемся леммой 3 для доказательства линейной независимости матриц группы Γ_i, $i = 0, \ldots, n-1$. Рассмотрим группу Γ_0. Разложим матрицы группы Γ_0 по базису $\mathbf{E}_0$, используя формулу (39), получим

$$Z_1^{n-1} = L^{n-1}(Z_1^0) = L^{n-1}(E_{n1}) = L^{n-1}(E_{n-1+1,1}) = \psi(n-1, n, n) \circ \mathbf{E}_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_\nu^{n-\nu} = L^{n-\nu}(Z_\nu^0) = L^{n-\nu}(E_{n\nu}) = L^{n-\nu}(E_{n-\nu+\nu,\nu}) = \psi(n-\nu, n, n) \circ \mathbf{E}_0, \quad \nu \in \{1, \ldots, p\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_p^{n-p} = L^{n-p}(Z_p^0) = L^{n-p}(E_{np}) = L^{n-p}(E_{n-p+p,p}) = \psi(n-p, n, n) \circ \mathbf{E}_0,$$

$$Z_{p+1}^{n-p-1} = L^{n-p-1}(Z_{p+1}^0) = L^{n-p-1}(E_{n-1,p}) = L^{n-p-1}(E_{n-p-1+p,p}) = \psi(n-p-1, n, n-1) \circ \mathbf{E}_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_\nu^{n-\nu} = L^{n-\nu}(Z_\nu^0) = L^{n-\nu}(E_{n-\nu+p,p}) = \psi(n-\nu, n, n-\nu+p) \circ \mathbf{E}_0, \quad \nu \in \{p+1, \ldots, n\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_n^0 = L^0(E_{pp}) = \psi(0, n, p) \circ \mathbf{E}_0.$$

Построим из вектор-строк, являющихся координатами матриц группы Γ_0 в базисе $\mathbf{E}_0$, матрицу, расположив строки снизу вверх; получим $n \times n$-матрицу

$$\left\|\begin{array}{c} \psi(0, n, p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(n-p-1, n, n-1) \\ \psi(n-p, n, n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(n-1, n, n) \end{array}\right\|.$$

Эта матрица совпадает с матрицей $Q(0, n, \beta)$, определенной по кортежу β равенством (22), где кортеж $\beta = [\underbrace{1, 2, \ldots, p}_{p}, \underbrace{p, \ldots, p}_{n-p}] \in D(0, n)$. По теореме 4 матрица $Q(0, n, \beta)$ невырождена, следовательно, ее строки линейно независимы, а значит, и матрицы группы Γ_0 линейно независимы.

Докажем аналогичным образом линейную независимость матриц группы Γ_i для всех $i = 0, \ldots, n-1$. Рассмотрим произвольное $j \in \{0, \ldots, p-1\}$ и рассмотрим группу Γ_j. Разложим матрицы группы Γ_j по базису $\mathbf{E}_j$. Имеем

$$Z_{j+1}^{n-1} = L^{n-1}(Z_{j+1}^0) = L^{n-1}(E_{n,j+1}) = L^{n-1}(E_{n-(j+1)+j+1,j+1}) = \psi(n-1, n-j, n) \circ \mathbf{E}_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_\nu^{n+j-\nu} = L^{n+j-\nu}(Z_\nu^0) = L^{n+j-\nu}(E_{n-\nu+\nu,\nu}) = \psi(n+j-\nu, n-j, n) \circ \mathbf{E}_j, \quad \nu \in \{j+1, \ldots, p\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_p^{n+j-p} = L^{n+j-p}(E_{np}) = L^{n+j-p}(E_{n-p+p,p}) = \psi(n+j-p, n-j, n) \circ \mathbf{E}_j,$$

$$Z_{p+1}^{n+j-p-1}=L^{n+j-p-1}(Z_{p+1}^0)=L^{n+j-p-1}(E_{n-1,p})=$$
$$=L^{n+j-p-1}(E_{n-p-1+p,p})=\psi(n+j-p-1,n-j,n-1)\circ\mathbf{E}_j,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Z_\nu^{n+j-\nu}=L^{n+j-\nu}(Z_\nu^0)=L^{n+j-\nu}(E_{n-\nu+p,p})=\psi(n+j-\nu,n-j,n-\nu+p)\circ\mathbf{E}_j,\quad \nu=\overline{p+1,n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Z_n^j=L^j(E_{pp})=\psi(j,n-j,p)\circ\mathbf{E}_j.$$

Построим из полученных вектор-строк матрицу, расположив строки снизу вверх; получим $(n-j)\times(n-j)$-матрицу

$$\begin{Vmatrix}\psi(j,n-j,p)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi(n+j-p-1,n-j,n-1)\\ \psi(n+j-p,n-j,n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi(n-1,n-j,n)\end{Vmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей $Q(j,n-j,\beta)$ вида (22), построенной по кортежу

$$\beta=[\underbrace{j+1,j+2,\dots,p}_{p-j},\underbrace{p,\dots,p}_{n-p}]\in D(j,n-j).$$

По теореме 4 матрица $Q(j,n-j,\beta)$ невырождена, следовательно, ее строки линейно независимы, а значит, и матрицы группы Γ_j линейно независимы.

Пусть теперь $j\in\{p,\dots,n-1\}$. Рассмотрим группу Γ_j и разложим матрицы этой группы по базису $\mathbf{E}_j$. Имеем

$$Z_{j+1}^{n-1}=L^{n-1}(Z_{j+1}^0)=L^{n-1}(E_{n-j-1+p,p})=\psi(n-1,n-j,n-j-1+p)\circ\mathbf{E}_j,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Z_\nu^{n+j-\nu}=L^{n+j-\nu}(Z_\nu^0)=L^{n+j-\nu}(E_{n-\nu+p,p})=\psi(n+j-\nu,n-j,n-\nu+p)\circ\mathbf{E}_j,\quad \nu=\overline{j+1,n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Z_n^j=L^j(E_{pp})=\psi(j,n-j,p)\circ\mathbf{E}_j.$$

Построим из полученных вектор-строк матрицу, расположив строки снизу вверх; получим $(n-j)\times(n-j)$-матрицу

$$\begin{Vmatrix}\psi(j,n-j,p)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi(n-2,n-j,n-j-2+p)\\ \psi(n-1,n-j,n-j-1+p)\end{Vmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей $Q(j,n-j,\beta)$ вида (22), построенной по кортежу

$$\beta=[\underbrace{p,\dots,p}_{n-j}]\in D(j,n-j).$$

По теореме 4 матрица $Q(j,n-j,\beta)$ невырождена, следовательно, ее строки линейно независимы, а значит, и матрицы группы Γ_j линейно независимы.

Таким образом, доказано, что матрицы (38) линейно независимы, при этом

$$\begin{gathered}\langle Z_1^0\rangle=N_{-(n-1)},\quad \langle Z_1^1,Z_2^0\rangle=N_{-(n-2)},\quad\dots,\quad \langle Z_1^{n-i-1},Z_2^{n-i-2},\dots,Z_{n-i}^0\rangle=N_{-i},\quad\dots,\\ \langle Z_1^{n-1},Z_2^{n-2},\dots,Z_n^0\rangle=N_0,\quad\dots,\quad \langle Z_{i+1}^{n-1},\dots,Z_n^i\rangle=N_i,\quad\dots,\quad \langle Z_n^{n-1}\rangle=N_{n-1},\\ \langle Z_\nu^i,\ i=0,\dots,n-1,\ \nu=1,\dots,n\rangle=M_n.\end{gathered}\tag{41}$$

Покажем теперь, что матрицы (35) линейно независимы для произвольной матрицы A вида (31). Имеем $A = J + T$; T — нижняя треугольная матрица; $L = L_A$.

Обозначим матрицы (35) следующим образом:

$$Y_\nu^0 := F_\nu, \quad Y_\nu^i := [A, Y_\nu^{i-1}], \quad \nu = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{42}$$

Обозначим через $\Omega_0 \subset M_n$ множество нижних треугольных матриц; $\Omega_i \subset M_n$ — множество матриц, для которых элементы, находящиеся выше i-й наддиагонали, равны нулю ($i = 1, \ldots, n-1$); $\Omega_{-i} \subset M_n$ — множество матриц, для которых элементы, находящиеся выше i-й поддиагонали, равны нулю ($i = 1, \ldots, n-1$); $\Omega_{-n} := \{0\}$, $0 \in M_n$. Множества Ω_i, $i = \overline{-(n-1), (n-1)}$ — это линейные подпространства в M_n. Имеем

$$\Omega_\nu = N_{-(n-1)} \oplus \ldots \oplus N_\nu, \quad \Omega_\nu = \Omega_{\nu-1} \oplus N_\nu, \quad \nu \in \{-(n-1), \ldots, (n-1)\}, \quad \Omega_{n-1} = M_n.$$

Заметим, что если $F \in \Omega_\nu$ и $T \in M_n$ — нижняя треугольная матрица, то $TF \in \Omega_\nu$, $FT \in \Omega_\nu$ и $[T, F] = TF - FT \in \Omega_\nu$.

Для всякого $\nu \in \{-(n-1), \ldots, (n-1)\}$ обозначим через $\langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \ldots, \Gamma_\nu \rangle$ линейную оболочку матриц, входящих в группы $\Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \ldots, \Gamma_\nu$, то есть

$$\langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \ldots, \Gamma_\nu \rangle = \langle Z_1^0,\ Z_1^1, Z_2^0,\ \ldots,\ Z_1^{n+\nu-1}, Z_2^{n+\nu-2}, \ldots, Z_{n+\nu}^0 \rangle, \quad \text{если } \nu \leqslant 0,$$
$$\langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \ldots, \Gamma_\nu \rangle = \langle Z_1^0,\ Z_1^1, Z_2^0,\ \ldots,\ Z_{\nu+1}^{n-1}, Z_{\nu+2}^{n-2}, \ldots, Z_n^\nu \rangle, \quad \text{если } \nu > 0.$$

Тогда в силу равенств (41) получаем, что $\Omega_\nu = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \ldots, \Gamma_\nu \rangle$.

Рассмотрим матрицы (42). Покажем по индукции, что для любого $\nu = 1, \ldots, n$ и для любого $i = 0, \ldots, n-1$ матрица Y_ν^i имеет вид $Y_\nu^i = Z_\nu^i + X_\nu^i$, где $Z_\nu^i \in N_{-n+\nu+i}$ — матрица из (38), а X_ν^i — некоторая матрица, которая принадлежит $\Omega_{-n+\nu+i-1}$, то есть покажем, что для всех $i = 0, \ldots, n-1$ имеет место представление

$$Y_\nu^i = Z_\nu^i + X_\nu^i \in N_{-n+\nu+i} \oplus \Omega_{-n+\nu+i-1} = \Omega_{-n+\nu+i}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{43}$$

При $i = 0$ для любого $\nu = 1, \ldots, n$ имеем $Y_\nu^0 = Z_\nu^0 + 0 \in N_{-n+\nu} \oplus \Omega_{-n+\nu-1} = \Omega_{-n+\nu}$.

Шаг индукции. Предположим, что для любого $\nu = 1, \ldots, n$, для всех $i = 0, \ldots, s-1$ ($s < n$) имеет место представление (43). Покажем тогда, что представление (43) имеет место при $i = s$. Отсюда по индукции будет следовать, что (43) имеет место для всех $i = 0, \ldots, n-1$.

Пусть $i = s$. Для любого $\nu = 1, \ldots, n$ имеем

$$Y_\nu^s = [A, Y_\nu^{s-1}] = [J + T, Y_\nu^{s-1}] = [J, Y_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}] =$$
$$= [J, Z_\nu^{s-1} + X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}] = [J, Z_\nu^{s-1}] + [J, X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}].$$

Имеем $[J, Z_\nu^{s-1}] = Z_\nu^s$. Обозначим $X_\nu^s := [J, X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}]$. Тогда Y_ν^s имеет вид $Y_\nu^s = Z_\nu^s + X_\nu^s$, где $Z_\nu^s \in N_{-n+\nu+s}$. По предположению индукции имеем $X_\nu^{s-1} \in \Omega_{-n+\nu+s-2}$, следовательно, $[J, X_\nu^{s-1}] \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$. Далее, по предположению индукции $Y_\nu^{s-1} \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$, следовательно, $[T, Y_\nu^{s-1}] \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$. Таким образом, $X_\nu^s = [J, X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}] \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$. Следовательно, представление (43) имеет место при $i = s$, и доказательство по индукции завершено.

Имеем

$$\begin{array}{lll}
Y_1^0 = Z_1^0 \in N_{-n+1}, & \ldots\ldots, & Y_n^0 = Z_n^0 \in N_0, \\
Y_1^1 = Z_1^1 + X_1^1 \in N_{-n+2} \oplus \Omega_{-n+1}, & \ldots\ldots, & Y_n^1 = Z_n^1 + X_n^1 \in N_1 \oplus \Omega_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y_1^{n-1} = Z_1^{n-1} + X_1^{n-1} \in N_0 \oplus \Omega_{-1}, & \ldots\ldots, & Y_n^{n-1} = Z_n^{n-1} + X_n^{n-1} \in N_{n-1} \oplus \Omega_{n-2}.
\end{array} \tag{44}$$

Покажем, что матрицы (44) линейно независимы. Матрицы (44) разбиваются на группы Λ_i, $i = -(n-1), \ldots, (n-1)$. Две матрицы лежат в одной и той же группе Λ_i, если они принадлежат одному и тому же подпространству $N_i \oplus \Omega_{i-1}$. Имеем

$$\Lambda_{-(n-1)} = \{Y_1^0\}, \quad \Lambda_{-(n-2)} = \{Y_1^1, Y_2^0\}, \quad \ldots, \quad \Lambda_{-i} = \{Y_1^{n-i-1}, Y_2^{n-i-2}, \ldots, Y_{n-i}^0\}, \quad \ldots,$$
$$\Lambda_0 = \{Y_1^{n-1}, Y_2^{n-2}, \ldots, Y_n^0\}, \quad \ldots, \quad \Lambda_i = \{Y_{i+1}^{n-1}, \ldots, Y_n^i\}, \quad \ldots, \quad \Lambda_{n-1} = \{Y_n^{n-1}\}.$$

Обозначим $\Psi_\nu := \langle \Lambda_{-(n-1)}, \Lambda_{-(n-2)}, \ldots, \Lambda_\nu \rangle$, $\nu = -(n-1), \ldots, (n-1)$. Докажем по индукции, что для любого $\nu \in \{-(n-1), \ldots, (n-1)\}$ имеет место равенство

$$\Psi_\nu = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \ldots, \Gamma_\nu \rangle. \tag{45}$$

База индукции. Пусть $\nu = -(n-1)$. Тогда

$$\Psi_{-(n-1)} = \langle \Lambda_{-(n-1)} \rangle = \langle Y_1^0 \rangle = \langle Z_1^0 \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)} \rangle.$$

Шаг индукции. Предположим, что для $\nu = s-1$ $(s < n)$ имеет место равенство (45). Докажем тогда, что равенство (45) имеет место для $\nu = s$. Отсюда по индукции будет следовать, что (45) выполнено для всех $\nu \in \{-(n-1), \ldots, (n-1)\}$.

Пусть $\nu = s$. По предположению индукции $\langle \Lambda_{-(n-1)}, \ldots, \Lambda_{s-1} \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1} \rangle$, поэтому

$$\Psi_s = \langle \Lambda_{-(n-1)}, \ldots, \Lambda_{s-1}, \Lambda_s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, \Lambda_s \rangle.$$

Если $s \leqslant 0$, то матрицы группы Λ_s имеют вид $Y_1^{n+s-1}, \ldots, Y_{n+s}^0$. В силу представления (43) имеем

$$Y_1^{n+s-1} = Z_1^{n+s-1} + X_1^{n+s-1}, \quad \ldots, \quad Y_{n+s}^0 = Z_{n+s}^0 + X_{n+s}^0,$$

где $Z_1^{n+s-1}, \ldots, Z_{n+s}^0 \in N_s$, $X_1^{n+s-1}, \ldots, X_{n+s}^0 \in \Omega_{s-1}$. Матрицы $Z_1^{n+s-1}, \ldots, Z_{n+s}^0$ составляют группу Γ_s и в силу (41) образуют базис в N_s, а матрицы $X_1^{n+s-1}, \ldots, X_{n+s}^0 \in \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1} \rangle$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, \Lambda_s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, Y_1^{n+s-1}, \ldots, Y_{n+s}^0 \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, Z_1^{n+s-1} + X_1^{n+s-1}, \ldots, Z_{n+s}^0 + X_{n+s}^0 \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, Z_1^{n+s-1}, \ldots, Z_{n+s}^0 \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, \Gamma_s \rangle. \end{aligned}$$

Если $s > 0$, то матрицы группы Λ_s имеют вид $Y_{s+1}^{n-1}, \ldots, Y_n^s$. В силу представления (43) имеем

$$Y_{s+1}^{n-1} = Z_{s+1}^{n-1} + X_{s+1}^{n-1}, \quad \ldots, \quad Y_n^s = Z_n^s + X_n^s,$$

где $Z_{s+1}^{n-1}, \ldots, Z_n^s \in N_s$, $X_{s+1}^{n-1}, \ldots, X_n^s \in \Omega_{s-1}$. Матрицы $Z_{s+1}^{n-1}, \ldots, Z_n^s$ составляют группу Γ_s и в силу (41) образуют базис в N_s, а матрицы $X_{s+1}^{n-1}, \ldots, X_n^s \in \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1} \rangle$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, \Lambda_s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, Y_{s+1}^{n-1}, \ldots, Y_n^s \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, Z_{s+1}^{n-1} + X_{s+1}^{n-1}, \ldots, Z_n^s + X_n^s \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, Z_{s+1}^{n-1}, \ldots, Z_n^s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \ldots, \Gamma_{s-1}, \Gamma_s \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (45) доказано. Следовательно, для любого $\nu \in \{-(n-1), \ldots, (n-1)\}$ имеет место равенство $\Psi_\nu = \Omega_\nu$. В частности,

$$\Psi_{n-1} = \Omega_{n-1} = M_n,$$

то есть линейная оболочка n^2 матриц (44) совпадает с M_n. Отсюда следует, что матрицы (44) (которые совпадают с (35)) линейно независимы. Это означает, что выполнено равенство (34), а следовательно, выполнено равенство (33). Отсюда следует согласованность системы (1) с матрицами (31). На этом доказательство теоремы 6 завершено. □

Замечание 5. Доказательство теоремы 6 основано на доказательстве линейной независимости матриц (35), где матрицы F_ν, $\nu = \overline{1,n}$ определены равенствами $F_1 = E_{n1}$, …, $F_p = E_{np}$, $F_{p+1} = E_{n-1,p}$, …, $F_n = E_{pp}$. Рассмотрим $n \times n$-таблицу Υ и клетки $\{ij\}$, $i, j = \overline{1,n}$ этой таблицы. Отметим те клетки таблицы Υ, в которых расположены единицы в матрицах F_ν, $\nu = \overline{1,n}$ и проведем линию через центры этих клеток. Получится ломаная линия α с одним изломом в клетке $\{np\}$. Этой ломаной соответствует кортеж $\beta = [i_1, \ldots, i_n] = [1, 2, \ldots, p, p, \ldots, p] \in D(0, n)$

индексов i_ν, $\nu = \overline{1,n}$. Индекс i_ν равен номеру столбца, в котором расположена единица в матрице F_ν. Доказательство линейной независимости матриц (35) основано на доказательстве линейной независимости строк матриц $Q(j, n-j, \beta_j)$, $j = \overline{0, n-1}$, построенных по кортежам β_j, где $\beta_0 := \beta \in D(0,n)$, а кортежи $\beta_j \in D(j, n-j)$, $j = \overline{1, n-1}$ получены вычеркиванием индексов $i_1, \ldots, i_j$ из кортежа β_0. Рассмотрим произвольную ломаную линию $\widehat{\alpha}$ (состоящую из $n-1$ отрезка, звенья которой параллельны сторонам таблицы Υ), соединяющую левую нижнюю угловую клетку с клеткой $\{pp\}$, $(p \in \{1, \ldots, n\})$, лежащей на главной диагонали таблицы. Ломаная $\widehat{\alpha}$ проходит через n клеток $\{i_1 j_1\} = \{n1\}, \ldots, \{i_n j_n\} = \{pp\}$ таблицы. Построим по ломаной $\widehat{\alpha}$ матрицы $\widehat{F}_1 = E_{i_1, j_1}, \ldots, \widehat{F}_n = E_{i_n, j_n}$. Ломаной $\widehat{\alpha}$ соответствует набор индексов $[j_1, \ldots, j_n]$, где индекс j_ν равен номеру столбца, в котором расположена единица в матрице $\widehat{F}_\nu$. Очевидно, что этот набор образует кортеж $\widehat{\beta} = [j_1, \ldots, j_n] \in D(0,n)$, то есть этот набор удовлетворяет условиям (20). По теореме 4 строки матриц $Q(\nu, n-\nu, \widehat{\beta}_\nu)$, $\nu = \overline{0, n-1}$ будут линейно независимы; здесь $\widehat{\beta}_0 := \widehat{\beta} \in D(0,n)$, а кортежи $\widehat{\beta}_\nu \in D(\nu, n-\nu)$, $\nu = \overline{1, n-1}$ получены вычеркиванием индексов $j_1, \ldots, j_\nu$ из кортежа $\widehat{\beta}_0$. Отсюда можно показать, аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 6, что матрицы (35) будут линейно независимы при $F_\nu = \widehat{F}_\nu$, $\nu = \overline{1,n}$ (где $\widehat{F}_\nu$ построены по ломаной $\widehat{\alpha}$) для произвольной ломаной линии $\widehat{\alpha}$, соединяющей левый нижний угол таблицы Υ с главной диагональю.

Из теоремы 6 и утверждения 1 следует достаточное условие глобальной управляемости спектра.

Следствие 2. *Пусть дана система* (1) *с матрицами* (3). *Если*

$$\operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \geqslant n + 1,$$

то спектр системы (2) *глобально управляем.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев В. А. Согласованность и управление спектром в линейных системах с наблюдателем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 50–80.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
3. Davison E. J., Wang S. H. On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — P. 516–518.
4. Kimura H. On Pole Assignment by Gain Output Feedback // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — P. 509–516.
5. Леонов Г. А., Шумафов М. М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.

Поступила в редакцию 01.11.09

V. A. Zaitsev

Consistency of linear stationary control systems with the observer of a special form

We consider a linear control system with the observer. We investigate the property of consistency of this system in a special case where consistency is the sufficient condition for global controllability over eigenvalue spectrum of closed-loop system. We prove for systems of the special form that the necessary condition of consistency is not sufficient for dimensions big than 5. The new sufficient condition of consistency for such systems is discovered.

Keywords: control system, incomplete feedback, consistency, control over spectrum.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 93C15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: verba@udm.ru