МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 517.929

© *А. С. Ларионов*

РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [1]

Приводятся достаточные условия разрешимости нелинейных краевых задач для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений. Условия получены на основе редукции исходной задачи к уравнению с монотонным оператором.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевая задача, монотонный оператор, разрешимость, функция Грина.

Нелинейные краевые задачи для дифференциальных уравнений находятся в центре внимания многих исследователей благодаря многочисленным приложениям (в биологии, химии, математической экономике, экологии, задачах управления техническими системами и т.д.). Такие задачи естественно возникают при математическом моделировании объектов (процессов, явлений), для которых линейные модели дают слишком грубое описание или вовсе невозможны.

Начало исследованиям краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) положили классические работы С. Н. Бернштейна и М. Нагумо. Значительная часть результатов этих исследований и библиография приведены в монографиях [1–3] и обзорах [4, 5]. Дальнейшее развитие теории краевых задач привело к необходимости рассмотрения таких постановок прикладных задач, которые требуют построения и анализа моделей, учитывающих одно из фундаментальных свойств любого реального объекта — зависимость текущего состояния объекта от его предшествующих (или будущих) состояний. Для таких задач ОДУ уже не являются удовлетворительной математической моделью. Более точное математическое описание в этом случае дают функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ).

При математическом исследовании ФДУ возникают значительные трудности, связанные как со сложностью самих уравнений, так и с невозможностью применения многих специфических идей и методов теории ОДУ. Эти трудности в полной мере проявляются и при изучении нелинейных краевых задач для ФДУ, теория которых стала развиваться сравнительно недавно благодаря работам Н. В. Азбелева, С. А. Брыкалова, И. Т. Кигурадзе, В. Лакшмикантама, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуллиной и других авторов.

Центральное место при изучении краевых задач для дифференциальных уравнений занимают вопросы разрешимости. Одним из эффективных методов доказательства существования решения нелинейной краевой или начальной задачи является монотонный итеративный метод. В основе этого метода лежит [6–8] редукция исходной задачи к уравнению $x = Ax$ с монотонным оператором A, определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Распространение на ФДУ упомянутого метода изучения нелинейных краевых задач потребовало специальных исследований условий сохранения знака функции Грина вспомогательных линейных краевых задач (см., например, [9]).

Обозначим $\mathbf{L}_p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$ — банахово пространство функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, суммируемых на $[a,b]$ со степенью p; $\mathbf{L}_\infty[a,b]$ — банахово пространство функций $z : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, измеримых и ограниченных в существенном; $\mathbf{W}_p^{(2)}[a,b]$ — банахово пространство функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, имеющих абсолютно непрерывную производную, причем $\ddot{x} \in \mathbf{L}_p[a,b]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00744–а).

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m_1} b_i(t)\ddot{x}_{g_i}(t) = f\big(t, x_{h_1}(t), \ldots, x_{h_{m_2}}(t)\big), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1, \tag{2}$$

где

$$y_r(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y[r(t)], & \text{если} \quad r(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если} \quad r(t) \notin [a,b] \end{cases}$$

в предположениях: функция $f : [a,b] \times \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори; функции $b_i : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ измеримы и ограничены в существенном; функции g_i, $h_j : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ измеримы, $g_i(t) \leqslant t$, $h_j(t) \leqslant t$ почти всюду на $[a,b]$, $i = 1, \ldots, m_1$, $j = 1, \ldots, m_2$.

Будем предполагать, что оператор суперпозиции S, определяемый равенством $(Sy)(t) = \sum\limits_{i=1}^{m_1} b_i(t) y_{g_i}(t)$, действует в пространстве $\mathbf{L}_p[a,b]$ и спектральный радиус оператора S меньше единицы [7].

Решением краевой задачи (1), (2) будем называть функцию $x \in \mathbf{W}_p^{(2)}[a,b]$, удовлетворяющую краевым условиям (2) и почти всюду на $[a,b]$ уравнению (1).

Для v_j, $z_j \in \mathbf{L}_\infty[a,b]$, $v_j \leqslant z_j$, $j = 1, \ldots, m_2$ обозначим

$$[v_j, z_j] = \{x \in \mathbf{L}_\infty : v_j \leqslant x \leqslant z_j\}, \qquad \prod_{j=1}^{m_2} [v_j, z_j] = [v_1, z_1] \times \cdots \times [v_{m_2}, z_{m_2}].$$

Будем говорить [7, 8], что функция f удовлетворяет условию $\mathcal{L}^1\Big(\prod\limits_{j=1}^{m_2}[v_j,z_j]\Big)$ $\Big(\mathcal{L}^2\Big(\prod\limits_{j=1}^{m_2}[v_j,z_j]\Big)\Big)$, если существуют такие функции $r_j^1(t)$ $\big(r_j^2(t)\big)$, $r_j^1 \in \mathbf{L}_p[a,b]$ $\big(r_j^2 \in \mathbf{L}_p[a,b]\big)$, что оператор Немыцкого

$$M^1 : \prod_{j=1}^{m_2} [v_j, z_j] \to \mathbf{L}_p[a,b], \quad \Big(M^2 : \prod_{j=1}^{m_2} [v_j, z_j] \to \mathbf{L}_p[a,b]\Big),$$

определяемый равенством

$$(M^1 u)(t) = f\big(t, u(t)\big) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t) u_j(t), \quad \Big((M^2 u)(t) = f\big(t, u(t)\big) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^2(t) u_j(t)\Big),$$

$$u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_{m_2}(t)\},$$

изотонен (антитонен).

Обозначим $\sigma_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если} \quad r(t) \notin [a,b]. \end{cases}$

Теорема 1. *Пусть* $b_i(t)\sigma_{g_i}(t) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m_1$ *и выполнены условия:*

1) *существуют функции* v, $z \in \mathbf{W}_p^{(2)}[a,b]$ *такие, что* $v \leqslant z$ *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *справедливы неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t) \geqslant f\big(t, v_{h_1}(t) \ldots, v_{h_{m_2}}(t)\big),$$

$$(\mathcal{L}z)(t) \leqslant f\big(t, z_{h_1}(t) \ldots, z_{h_{m_2}}(t)\big),$$

$$v(a) \leqslant \alpha \leqslant z(a), \quad v(b) \leqslant \beta \leqslant z(b);$$

2) *функция* f *является невозрастающей по аргументам* u_j, $j = 1, \ldots, m_2$.

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет решение* x, *удовлетворяющее неравенствам* $v \leqslant x \leqslant z$.

Если, кроме того,

3) *функция* f *удовлетворяет условию* $\mathcal{L}^1\Big(\prod_{j=1}^{m_2}[v_{h_j} z_{h_j}]\Big)$;

4) *коэффициенты* $r_j^1(t)$, $j=1,\ldots,m_2$ *этого условия таковы, что краевая задача*

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t) x_{h_j}(t) = \eta_1(t), \quad t \in [a,b],$$

$$x(a) = 0, \quad x(b) = 0$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $G_1(t,s)$ *неположительна в квадрате* $[a,b]\times[a,b]$, *то это решение* x *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условия 2 теоремы 1 краевая задача (1), (2) эквивалентна уравнению $x = Ax$, где оператор $A : [\nu, z] \to \mathbf{C}$ определен равенством

$$(Ax)(t) = \int_a^b G_2(t,s) f\big(s, x_{h_1}(s), \ldots, x_{h_{m_2}}(s)\big)\, ds + \zeta_2(t).$$

Здесь $\zeta_2(t)$ — решение полуоднородной задачи $\mathcal{L}x = 0$, $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$, а $G_2(t,s)$ — функция Грина задачи

$$\mathcal{L}x = \eta_2, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0.$$

Оператор A изотонен и вполне непрерывен. Покажем, что из неравенств

$$(\mathcal{L}v)(t) \geqslant f\big(t, v_{h_1}(t), \ldots, v_{h_{m_2}}(t)\big), \quad v(a) \leqslant \alpha, \quad v(b) \leqslant \beta$$

следует, что $v \leqslant Av$. Действительно, из первого неравенства вытекает

$$v(t) \leqslant \int_a^b G_2(t,s) f\big(s, v_{h_1}(s), \ldots, v_{h_{m_2}}(s)\big)\, ds + v_2(t),$$

где $v_2(t)$ — решение задачи $\mathcal{L}x = 0$, $x(a) = v(a)$, $x(b) = v(b)$. Обозначим $\theta(t) = \zeta_2(t) - v_2(t)$. Тогда функция $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}x = 0$, причем $\theta(a) \geqslant 0$, $\theta(b) \geqslant 0$. Из результатов работы [9] (теорема 1) следует, что любое нетривиальное решение уравнения $\mathcal{L}x = 0$ имеет не более одного нуля на $[a,b]$. Отсюда заключаем, что $\theta(t) \geqslant 0$, то есть $\zeta_2(t) \geqslant v_2(t)$. Неравенство $v \leqslant Av$ установлено. Неравенство $z \geqslant Az$ получается аналогично. Таким образом, вполне непрерывный оператор A отображает множество $[v,z]$ в себя, следовательно, оператор A имеет неподвижную точку, принадлежащую $[v,z]$. Существование решения краевой задачи (1), (2) в порядковом интервале $[v,z]$ доказано. Для доказательства единственности решения краевой задачи (1), (2) в порядковом интервале $[v,z]$ заметим, что в условиях теоремы существуют верхнее $\overline{x}$ и нижнее $\underline{x}$ решения этой задачи, причем $\nu \leqslant \underline{x} \leqslant \overline{x} \leqslant z$. При выполнении условий 3 и 4 теоремы 1 исходная задача (1), (2) редуцируется к эквивалентному уравнению $x = Bx$, где оператор $B : [v,z] \to \mathbf{C}$ определяется равенством

$$(Bx)(t) = \int_a^b G_1(t,s) M^1\big(s, x_{h_1}(s), \ldots, x_{h_{m_2}}(s)\big)\, ds + \zeta_1(t). \tag{3}$$

Здесь функция $\zeta_1(t)$ есть решение краевой задачи

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) = 0, \quad t \in [a,b], \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta.$$

Оператор B антитонен. Отсюда можно получить противоположное неравенство $\underline{x} \geqslant \overline{x}$, что завершает доказательство теоремы. □

Приведем следствие из теоремы 1, использующее признак сохранения знака функции Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}_1 x = \eta_1, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{4}$$

полученный А. И. Домошницким в работе [9].

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* 1–3 *теоремы* 1. *Пусть, далее, найдется такая функция* $\omega \in \mathbf{W}_p^{(2)}$, *что соблюдаются неравенства*

$$\omega(t) > 0, \quad \Psi_1(t) \equiv (\mathcal{L}\omega)(t) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t)\omega_{h_j}(t) \leqslant 0, \quad t \in [a,b],$$

$$\omega(a) \geqslant 0, \quad \omega(b) \geqslant 0, \quad \omega(a) + \omega(b) - \int_a^b \Psi_1(s)\,ds > 0. \tag{5}$$

Тогда существует решение x *краевой задачи* (1), (2), *удовлетворяющее неравенствам* $v \leqslant x \leqslant z$ *и это решение единственно в порядковом интервале* $[v,z]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 работы [9] существование функции ω, удовлетворяющей неравенствам (5), эквивалентно тому, что краевая задача (4) однозначно разрешима и ее функция Грина неположительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Таким образом, выполнены все условия приведенной выше теоремы 1. □

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{x} - b(t)\ddot{x}_g(t) = a(t)x_h^n(t) + m(t), \quad t \in [0,1], \tag{6}$$

$$x(0) = \alpha, \quad x(1) = \beta, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 0,2, \tag{7}$$

где функции b, g, h удовлетворяют сформулированным выше условиям относительно уравнения (1), функции a, m суммируемы, $a \leqslant 0$, $m \leqslant 0$.

В качестве функций v и z выберем $v(t) \equiv 0$, $z(t) = 1,2 - t^2$. Обозначим

$$e_g = \{t \in [0,1] : g(t) \geqslant 0\}, \quad e_h = \{t \in [0,1] : h(t) \geqslant 0\}.$$

Тогда, если выполнены условия

а) $$m(t) \geqslant -2[1 - b(t)], \quad t \in e_g \setminus (e_g \cap e_h);$$

б) $$a(t)\left[1,2 - h^2(t)\right]^n + m(t) \geqslant -2, \quad t \in e_h \setminus (e_g \cap e_h);$$

в) $$a(t)\left[1,2 - h^2(t)\right]^n + m(t) \geqslant -2[1 - b(t)], \quad t \in e_g \cap e_h;$$

г) $$m(t) \geqslant -2, \quad t \in [0,1] \setminus (e_g \cup e_h);$$

д) $$na(t)\left[1,2 - h^2(t)\right]^{n-1} h(t)[1 - h(t)] \geqslant -2[1 - b(t)], \quad t \in e_g \cap e_h;$$

е) $$b(t) \leqslant 1, \quad t \in e_g \setminus (e_g \cap e_h);$$

ж) $$na(t)\left[1,2 - h^2(t)\right]^{n-1} h(t)[1 - h(t)] \geqslant -2, \quad t \in e_h \setminus (e_g \cap e_h),$$

то краевая задача (6), (7) имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v \leqslant x \leqslant z$, и это решение единственно в порядковом интервале $[0; 1,2 - t^2]$.

Действительно, из условий а) – г) заключаем, что для функций $v(t) \equiv 0$ и $z(t) = 1,2 - t^2$ имеют место неравенства, входящие в условие 1 следствия 1. Так как условие $\mathcal{L}^1[\nu_h, z_h]$ выполнено для функции $f(t,u) = a(t)u^n + m(t)$, $t \in [0,1]$, $u \in [\nu_h, z_h]$ с коэффициентом $r^1(t) = a(t)n\left[1,2 - h^2(t)\right]^{n-1}$, то неравенства д) – ж) обеспечивают выполнение неравенств (5), причем в качестве функции ω взята функция $t(1-t)$. На основании следствия 1 заключаем, что существует единственное решение x задачи (6), (7), удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant x(t) \leqslant 1,2 - t^2$. □

Замечание 1. Условия а) – ж) выполняются (при $n=2$), например, для функций $b(t)\equiv 0{,}01$; $a(t)\equiv -\dfrac{1}{2}$; $m(t)=-t$; $g(t)=t-\dfrac{1}{2}$; $h(t)=t-\dfrac{1}{3}$.

Теорема 2. *Пусть существуют функции v, $z\in \mathbf{W}_p^{(2)}[a,b]$ такие, что $v\leqslant z$ и соблюдаются следующие условия:*

1) *функция f удовлетворяет условию $\mathcal{L}^1\Big(\prod\limits_{j=1}^{m_2}\big[v_{h_j},z_{h_j}\big]\Big)$ с коэффициентами $r_j^1(t)$, $j=1,\ldots,m_2$ такими, что краевая задача* (4) *однозначно разрешима и ее функция Грина $G_1(t,s)$ неположительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$;*

2) *при почти всех $t\in[a,b]$ справедливы неравенства*

$$(\mathcal{L}_1v)(t)\equiv(\mathcal{L}v)(t)+\sum_{j=1}^{m_2}r_j^1(t)v_{h_j}(t)\geqslant f\big(t,z_{h_1}(t),\ldots,z_{h_{m_2}}(t)\big)+\sum_{j=1}^{m_2}r_j^1(t)z_{h_j}(t),$$

$$(\mathcal{L}_1z)(t)\equiv(\mathcal{L}z)(t)+\sum_{j=1}^{m_2}r_j^1(t)z_{h_j}(t)\leqslant f\big(t,v_{h_1}(t),\ldots,v_{h_{m_2}}(t)\big)+\sum_{j=1}^{m_2}r_j^1(t)v_{h_j}(t),$$

$$v(a)\leqslant\alpha\leqslant z(a),\quad v(b)\leqslant\beta\leqslant z(b).$$

Тогда существует решение x краевой задачи (1), (2), *принадлежащее порядковому интервалу* $[v,z]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя условие 1 теоремы 2, сведем краевую задачу (1), (2) к эквивалентному уравнению $x=Bx$, где оператор $B:[v,z]\to\mathbf{C}$ определен равенством (3).

Из неравенств, входящих в условие 2 теоремы 2, следует, что $v\leqslant Bz$, $z\geqslant Bv$. В самом деле, используя, например, неравенство

$$(\mathcal{L}_1v)(t)\geqslant f\big(t,z_{h_1}(t),\ldots,z_{h_{m_2}}(t)\big)+\sum_{j=1}^{m_2}r_j^1(t)z_{h_j}(t),$$

получаем

$$v(t)\leqslant\int_a^b G_1(t,s)M^1\big(s,z_{h_1}(s),\ldots,z_{h_{m_2}}(s)\big)\,ds+v_1(t),$$

где $v_1(t)$ — решение краевой задачи (4). Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\theta(t)=\zeta_1(t)-\nu_1(t)\geqslant 0$. Таким образом, неравенство $v\leqslant Bz$ получено. Справедливость неравенства $z\geqslant B\nu$ устанавливается аналогично. Для завершения доказательства теоремы 2 остается сослаться на принцип Шаудера. □

Если функция f является неубывающей по аргументам u_j, $j=1,\ldots,m_2$, то из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть существуют функции v, $z\in\mathbf{W}_p^{(2)}[a,b]$ такие, что $v\leqslant z$, функция f является неубывающей по аргументам u_j, $j=1,\ldots,m_2$ и при почти всех $t\in[a,b]$ выполняются неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t)\geqslant f\big(t,z_{h_1}(t),\ldots,z_{h_{m_2}}(t)\big),\quad(\mathcal{L}z)(t)\leqslant f\big(t,v_{h_1},\ldots,v_{h_{m_2}}(t)\big),$$

$$v(a)\leqslant\alpha\leqslant z(a),\quad v(b)\leqslant\beta\leqslant z(b).$$

Тогда существует решение x задачи (1), (2), *принадлежащее порядковому интервалу* $[v,z]$.

Положим в уравнении (1) $b_i(t)\equiv 0$, $i=1,\ldots,m_1$ и рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{x}=f\big(t,x_{h_1}(t),\ldots,x_{h_{m_2}}(t)\big),\quad t\in[a,b],\tag{8}$$

$$x(a)=\alpha,\quad x(b)=\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}^1.\tag{2}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

а) существует пара функций $v,\ z \in \mathbf{W}_p^{(2)}[a,b]$, $v \leqslant z$, *удовлетворяющих при почти всех* $t \in [a,b]$ *неравенствам*

$$\ddot{v} \geqslant f\big(t, v_{h_1}(t), \ldots, v_{h_{m_2}}(t)\big), \quad \ddot{z}(t) \leqslant f\big(t, z_{h_1}(t), \ldots, z_{h_{m_2}}(t)\big),$$

$$v(a) \leqslant \alpha \leqslant z(a), \quad v(b) \leqslant \beta \leqslant z(b);$$

б) функция f *удовлетворяет условию* $\mathcal{L}^2\Big(\prod\limits_{j=1}^{m_2}[v_{h_j}, z_{h_j}]\Big)$;

в) коэффициенты $r_j^2(t)$, $j = 1, \ldots, m_2$ *этого условия таковы, что вронскиан фундаментальной системы решений уравнения*

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv \ddot{x}(t) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^2(t) x_{h_j}(t) = 0$$

не обращается в нуль на $[a,b]$.

Тогда краевая задача (8), (2) *имеет решение* x, *принадлежащее порядковому интервалу* $[v,z]$.

Если, кроме того,

г) функция f *удовлетворяет условию* $\mathcal{L}^1\Big(\prod\limits_{j=1}^{m_2}[v_{h_j}, z_{h_j}]\Big)$;

д) коэффициенты $r_j^1(t)$, $j = 1, \ldots, m_2$ *этого условия таковы, что существует положительное на* $[a,b]$ *решение уравнения*

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv \ddot{x}(t) + \sum_{j=1}^{m_2} r_j^1(t) x_{h_j}(t) = 0,$$

то краевая задача (8), (2) *имеет в* $[v,z]$ *единственное решение.*

Доказательство этой теоремы проводятся по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{x}(t) = \frac{x_{h_1}(t)}{x_{h_1}^2(t) + x_{h_2}^2(t) + 1}, \quad t \in [0,1], \tag{9}$$

$$x(0) = -\frac{1}{2}, \quad x(1) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Положив $v(t) \equiv -1$, $z(t) \equiv 1$, приходим к следующему утверждению о разрешимости данной задачи.

Следствие 3. *Если измеримые функции* $h_j(t)$, $0 \leqslant h_j(t) \leqslant t$, $j = 1, 2$ *таковы, что*

$$\max_j \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} [t - h_j(t)] \sigma_{h_j}(t) \leqslant 0{,}658, \tag{11}$$

то краевая задача (9), (10) *имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенствам* $-1 \leqslant x(t) \leqslant 1$.

Действительно, для функции $f(t, u_1, u_2) = \dfrac{u_1}{u_2^2 + u_2^2 + 1}$, $t \in [0,1]$, u_1, $u_2 \in [-1,1]$ условия $\mathcal{L}^1([-1,1] \times [-1,1])$ и $\mathcal{L}^2([-1,1] \times [-1,1])$ выполнены с коэффициентами $r_1^1 = 0$, $r_2^1 = \dfrac{1}{4}$

и $r_1^2 = -\dfrac{1}{4}$, $r_2^2 = -1$ соответственно. Уравнение $\ddot{x}(t) + \frac{1}{4}x_{h_2}(t) = 0$ на отрезке $[0,1]$ имеет положительное решение, а вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $\ddot{x}(t) - \frac{1}{4}x_{h_1}(t) - x_{h_2}(t) = 0$ не обращается в нуль на отрезке $[0,1]$ в силу неравенства (11) (см., например, [10]).

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3, из которой вытекает приведенное выше утверждение. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Н. И., Клоков Ю. А. Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1978.
2. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. —Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975.
3. Scwabik S., Tvrdy M., Veivoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. — Praha: Academia, 1979.
4. Conti R. Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations // Boll.Unione mat. — 1967. — Vol. 22. — P. 135–178.
5. Lakshmikantham V. The present state of the method of upper and lower solutions // Trends in theory and practice of nonlinear differential equations / Proceedings of the International Conference, New Jork. — 1983. — P. 285–299.
6. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функц.-дифференц. уравнения: Сб. Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та. — 1986. — С. 3–9.
7. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
8. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.; Ижевск: Ин-т компьютерн. исследований, 2002.
9. Домошницкий А. И. О справедливости теоремы Чаплыгина для уравнений нейтрального типа // Краевые задачи: Сб. Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та. — 1981. — С. 121–125.
10. Лабовский С. М. Об одном дифференциальном неравенстве для уравнения с функциональным аргументом // Труды Московск. ин-та хим. машиностр. — 1974. — Вып. 53. — С. 24–27.

Поступила в редакцию 15.04.09

A. S. Larionov
Solving of quasilinear boundary value problems for functional differential equations

Sufficient conditions of resolvability of nonlinear boundary value problems for some classes of functional differential equations are presented. These conditions have been obtained on the basis of reduction of original problem to the equation with a monotone operator.

Keywords: differential equation, boundary value problem, monotone operator, solving, Green function.

Mathematical Subject Classifications: 34K10, 34K12, 34K40

Ларионов Александр Степанович к. ф.-м. н., доцент кафедры математики, Братский государственный университет, 665709, Россия, Иркутская область, г. Братск, ул. Макаренко, 40 (корп. 2), E-mail: larios84@yandex.ru