МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 1

УДК 517.977

© *С. Н. Попова*

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

Получено новое достаточное условие глобальной достижимости линейной управляемой системы.

Ключевые слова: линейные управляемые системы, глобальная достижимость.

Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|x\|=\sqrt{x^*x}$ (звездочка означает транспонирование). Через M_{mn} будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $m\times n$ (при $m=n$ пишем M_n) со спектральной нормой, то есть операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Для любого набора векторов $\xi_i\in\mathbb{R}^k$, $i=1,\ldots,n$ запись $[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ будет обозначать матрицу из M_{kn}, имеющую своими столбцами векторы $\xi_1,\ldots,\xi_n$; $E:=[e_1,\ldots,e_n]\in\mathrm{M}_n$ — единичная матрица.

Пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U: I\to\mathrm{M}_{mn}$, определенных на произвольном промежутке $I\subset\mathbb{R}$, с равномерной нормой $\|U\|_{C(I)}:=\sup\{\|U(t)\|: t\in I\}$, будем обозначать $KC_{mn}(I)$. Будем говорить, что матричная функция $B:\mathbb{R}\to\mathrm{M}_{nm}$ кусочно равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, если $B\in KC_{nm}(\mathbb{R})$; существует такое $\Delta_0>0$, что длина каждого интервала непрерывности I_α, $\alpha\in\mathbb{A}\subset\mathbb{N}$, функции $B(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $|I_\alpha|\geqslant\Delta_0$; $B(\cdot)$ равномерно непрерывна на каждом I_α, и для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для каждого $\alpha\in\mathbb{A}$ и для всех $t,s\in I_\alpha$, удовлетворяющих неравенству $|t-s|\leqslant\delta$, выполнено соотношение $\|B(t)-B(s)\|\leqslant\varepsilon$.

В задачах управления ляпуновскими инвариантами важную роль играет понятие глобальной достижимости линейной управляемой системы

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m,\ t\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Предполагаем, что коэффициенты $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ кусочно-непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$.

Определение 1. Система (1) называется *глобально достижимой* на отрезке $[t_0,t_1]$, если для всякой $n\times n$-матрицы H с положительным определителем найдется матричное управление $U\in KC_{mn}[t_0,t_1]$ такое, что матрица Коши $X_U(t,s)$ системы

$$\dot{x}=\bigl(A(t)+B(t)U(t)\bigr)x \tag{2}$$

удовлетворяет равенству

$$X_U(t_1,t_0)=H. \tag{3}$$

Утверждение 1. *Система* (1) *глобально достижима на* $[t_0,t_1]$ *в том и только том случае, когда на* $[t_0,t_1]$ *для всякой* $H\in\mathrm{M}_n$, $\det H>0$ *разрешима матричная задача управления*

$$\dot{Y}=A(t)Y+B(t)V,\quad Y\in\mathrm{M}_n,\ V\in\mathrm{M}_{mn}, \tag{4}$$

$$Y(t_0)=E,\quad Y(t_1)=H, \tag{5}$$

$$\det Y(t)>0 \text{ при всех } t\in[t_0,t_1]. \tag{6}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математические структуры».

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) глобально достижима на $[t_0,t_1]$. Для произвольной матрицы $H\in \mathrm{M}_n$, $\det H>0$ построим матричное управление $U(\cdot)$, обеспечивающее выполнение равенства (3). Тогда

$$\dot X_U(t,t_0)=\big(A(t)+B(t)U(t)\big)X_U(t,t_0).$$

На отрезке $[t_0,t_1]$ положим $Y(t):=X_U(t,t_0)$, $V(t):=U(t)X_U(t,t_0)$. Тогда $\det Y(t)>0$ при всех $t\in[t_0,t_1]$,

$$\dot Y(t)=\big(A(t)+B(t)U(t)\big)Y(t)=A(t)Y(t)+B(t)V(t),$$
$$Y(t_0)=X_U(t_0,t_0)=E,\quad Y(t_1)=X_U(t_1,t_0)=H.$$

Достаточность. Зафиксируем произвольную $n\times n$-матрицу H с положительным определителем и построим матричное управление $V(\cdot)$, разрешающее задачу (4)–(6). На $[t_0,t_1]$ определим управление $U(\cdot)$ равенством $U(t)=V(t)Y^{-1}(t)$. Тогда

$$\dot Y(t)=\big(A(t)+B(t)U(t)\big)Y(t),$$

при этом $Y(t_0)=E$. Следовательно, $Y(t)\equiv X_U(t,t_0)$. Из равенства $Y(t_1)=H$ получаем требуемое $X_U(t_1,t_0)=H$. Утверждение доказано.

Определение 2 (Н. Н. Красовский, [1]; Р. Калман, [2]). Система (1) называется *вполне управляемой* на отрезке $[t_0,t_1]$, если для произвольного начального состояния $x_0\in\mathbb{R}^n$ найдется такое допустимое управление $u:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^m$, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (1) при $u=u(\cdot)$ с начальным условием $x(t_0)=x_0$ удовлетворяет равенству $x(t_1)=0$.

Определение 3 (Р. Калман, [2]). *Матрицей управляемости* (*матрицей Калмана*) системы (1) на отрезке $[t_0,t_1]$ называется матрица

$$W(t_0,t_1):=\int_{t_0}^{t_1}X(t_0,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0,s)\,ds.$$

Замечание 1. Известно (Р. Калман, [2]), что система (1) вполне управляема на отрезке $[t_0,t_1]$ тогда и только тогда, когда матрица Калмана $W(t_0,t_1)$ обратима. Отсюда сразу вытекает, что система (1) вполне управляема на отрезке $[t_0,t_1]$ в том и только том случае, когда для произвольных $x_0,x_1\in\mathbb{R}^n$ существует допустимое управление $u:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^m$, переводящее за промежуток времени $[t_0,t_1]$ начальное состояние x_0 вдоль решения системы (1) с выбранным $u(\cdot)$ в конечное состояние x_1. Действительно, одно из управлений, осуществляющих данный перевод — это кусочно-непрерывное управление

$$u(t)=B^*(t)X^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\big(X(t_0,t_1)x_1-x_0\big).$$

Утверждение 2. *Система* (1) *вполне управляема на* $[t_0,t_1]$ *в том и только том случае, когда для произвольных* $G,H\in\mathrm{M}_n$ *разрешима матричная задача управления для уравнения* (4) *с условиями*

$$Y(t_0)=G,\quad Y(t_1)=H. \tag{7}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $G=[g_1,g_2,\ldots,g_n]\in\mathrm{M}_n$ и $H=[h_1,h_2,\ldots,h_n]\in\mathrm{M}_n$ — произвольны. Пользуясь замечанием 1, на отрезке $[t_0,t_1]$ для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ построим управление $u_i(\cdot)$ такое, что решение $x_i(\cdot)$ задачи Коши для системы (1) с $u=u_i(\cdot)$ и начальным условием $x_i(t_0)=g_i$ удовлетворяет равенству $x_i(t_1)=h_i$. Возьмем $V(t)=[u_1(t),\ldots,u_n(t)]$, $t\in[t_0,t_1]$. Тогда матричная функция $Y(t):=[x_1(t),\ldots,x_n(t)]$ является решением уравнения (4) и удовлетворяет условиям (7).

Достаточность. Возьмем произвольные векторы $x_0,x_1\in\mathbb{R}^n$ и положим

$$G=[x_0,0,\ldots,0]\in\mathrm{M}_n,\ H=[x_1,0,\ldots,0]\in\mathrm{M}_n.$$

Построим матричное управление $V(\cdot) = [v_1(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)]$, разрешающее задачу (4), (7). Пусть $Y(\cdot) = [y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)]$ — решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (7). Тогда $y_1(\cdot)$ — решение системы (1) при $u = v_1(\cdot)$, при этом $y_1(t_0) = x_0$, $y_1(t_1) = x_1$. Из замечания 1 вытекает полная управляемость системы (1). Утверждение доказано.

Итак, разрешимость задачи (4), (5) при каждой H гарантируется полной управляемостью системы (1). Но полная управляемость системы (1) не обеспечивает выполнение неравенства (6), даже при условии $\det H > 0$.

Пример 1. Система (1) при $n = 2$, $m = 1$, $A(t) \equiv 0 \in \mathrm{M}_{22}$, $B(t) = \mathrm{col}(b_1(t), b_2(t))$, где $b_1(t) \equiv 1$ при $t \in [0,1]$ и $b_1(t) \equiv 0$ при $t \in]1,2]$, а $b_2(t) = 1 - b_1(t)$, вполне управляема на $[0,2]$. Действительно, матрица Калмана $W(0,2)$ этой системы имеет вид

$$W(0,2) = \int_0^2 B(t)B^*(t)\,dt = E.$$

Выберем $H = -E$ и положим $V(t) = (v_1(t), v_2(t))$. Определитель решения $Y(t)$ задачи (4), (5) при $t \in [0,1]$ имеет вид

$$\det Y(t) = 1 + \int_0^t v_1(s)\,ds,$$

при этом

$$\int_0^1 v_1(s)\,ds = -2.$$

Следовательно, $\det Y(1) = -1$, и условие (6) не выполняется.

Таким образом, для обеспечения свойства глобальной достижимости системы (1) требуется длина отрезка времени, вообще говоря, превышающая длину отрезка полной управляемости этой системы. По этой причине будем накладывать на систему (1) более жесткое требование равномерной полной управляемости.

Определение 4 (Р. Калман, [2]). Система (1) называется *σ-равномерно вполне управляемой*, если существует такое $\alpha > 0$, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\xi^* W(t_0, t_0 + \sigma)\xi \geqslant \alpha \|\xi\|^2$.

Замечание 2. Свойство σ-равномерной полной управляемости системы (1) обеспечивает полную управляемость этой системы на всяком отрезке длины σ.

В этой статье получено новое достаточное условие глобальной достижимости системы (1). Для его формулировки введем некоторые понятия и докажем предварительные утверждения.

Обозначим через $\mathcal{L}$ совокупность всех вещественных матриц размерами $n \times n$, представимых в виде

$$L = (E + e_1 w_1^*)(E + e_2 w_2^*) \ldots (E + e_n w_n^*), \tag{8}$$

где векторы $w_i \in \mathbb{R}^n$ таковы, что

$$\det(E + e_i w_i^*) > 0. \tag{9}$$

Неравенство (9) эквивалентно тому, что $1 + w_{ii} > 0$; здесь w_{ii} — i-я координата вектора w_i.

Лемма 1. *Пусть L — $n \times n$-матрица с положительным определителем. Для того чтобы при всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ матрицы*

$$L_j := E + \sum_{i=j}^{n} e_i e_i^* (L - E)$$

имели положительные определители, необходимо и достаточно, чтобы $L \in \mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Положим

$$w_j = L_{j+1}^{-1^*}(L-E)^* e_j,\ j = 1, \dots, n-1, \quad w_n = (L-E)^* e_n.$$

При всех $i = 1, \dots, n-1$ выполнены равенства

$$E + e_i w_i^* = E + e_i e_i^*(L-E)L_{i+1}^{-1} = (L_{i+1} + e_i e_i^*(L-E))L_{i+1}^{-1} = L_i L_{i+1}^{-1},$$

поэтому $\det(E + e_i w_i^*) > 0,\ \ i = 1, \dots, n-1$. Кроме того,

$$E + e_n w_n^* = E + e_n e_n^*(L-E) = L_n,$$

следовательно, $\det(E + e_n w_n^*) > 0$.

Равенство (8) выполнено, так как

$$(E + e_1 w_1^*)(E + e_2 w_2^*) \dots (E + e_n w_n^*) = L_1 L_2^{-1} L_2 L_3^{-1} \dots L_{n-1} L_n^{-1} L_n = L_1 = L.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть матрица $L = \{l_{ij}\}$ определена равенством (8), причем выполнены соотношения (9). Обозначим $\Delta_j = \det L_j,\ \ j = 1, \dots, n$. Тогда

$L_1 = L$, поэтому $\Delta_1 = \det L > 0$;

L_2 получается из L заменой ее первой строки на e_1^*, поэтому Δ_2 совпадает с определителем $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, которая получается из L вычеркиванием первой строки и первого столбца;

L_3 получается из L заменой ее первых двух строк на e_1^* и e_2^* соответственно, поэтому Δ_3 совпадает с определителем $(n-2) \times (n-2)$ матрицы, которая получается из L вычеркиванием первых двух строк и первых двух столбцов;

...

L_n получается из L заменой ее первых $n-1$ строк на $e_1^*,\ \ e_2^*, \dots, e_{n-1}^*$ соответственно, поэтому Δ_n совпадает с элементом l_{nn} матрицы L.

Рассмотрим структуру матрицы L. Множитель $E + e_j w_j^*$ представляет собой единичную матрицу, j-я строка которой заменена на вектор-строку $(w_{j1}, w_{j2}, \dots, 1 + w_{jj}, \dots, w_{jn})$, где $w_j :=\mathrm{col}(w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jn})$. Поэтому множитель $E + e_j w_j^*$ оказывает влияние только на первые j строк матрицы L, а $(j+1)$-я, $(j+2)$-я,..., n-я строки всех матриц $\prod\limits_{k=l}^{n}(E + e_k w_k^*),\ \ l = 1, \dots, j$ совпадают с соответствующими строками матрицы $\prod\limits_{k=j+1}^{n}(E + e_k w_k^*)$.

Найдем Δ_n. Поскольку n-я строка L_n совпадает с n-й строкой матрицы $E + e_n w_n^*$, выполнены соотношения

$$\Delta_n = \det(E + e_n w_n^*) = 1 + w_{nn} > 0.$$

Найдем Δ_{n-1}. Так как $(n-1)$-я и n-я строки L_{n-1} совпадают с $(n-1)$-й и n-й строками матрицы $(E + e_{n-1} w_{n-1}^*)(E + e_n w_n^*)$, то

$$\Delta_{n-1} = \det((E + e_{n-1} w_{n-1}^*)(E + e_n w_n^*)) = (1 + w_{n-1,n-1})(1 + w_{nn}) > 0.$$

...

$$\Delta_1 = \det((E + e_1 w_1^*) \dots (E + e_n w_n^*)) = \prod_{k=1}^{n}(1 + w_{kk}) > 0.$$

Лемма доказана.

Определение 5 (см. [3]). Пусть $P, R \in \mathrm{M}_n$ — матрицы с положительными определителями. Упорядоченная пара матриц (P, R) называется *законопослушной* относительно базиса $\mathcal{F} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, если при всех $j = 1, \ldots, n$ выполнены неравенства

$$\det(P_1 + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^*(R_1 - P_1)) > 0, \tag{10}$$

здесь $P_1 = F^{-1}PF$, $R_1 = F^{-1}RF$, $F = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — матрица базиса $\mathcal{F}$.

Лемма 2. *Пусть $R \in \mathrm{M}_n$ — фиксированная матрица с положительным определителем, $\mathcal{F}$ — фиксированный базис $\mathbb{R}^n$. Множество всех матриц $P \in \mathrm{M}_n$, образующих законопослушные пары (P, R) относительно базиса $\mathcal{F}$, совпадает со множеством матриц*

$$\mathcal{P} : = \{P = FLF^{-1}R \mid L \in \mathcal{L}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (10) выполнены в том и только том случае, когда при всех $j = 1, \ldots, n$ имеют место неравенства

$$\det(R_1 + \sum_{i=j}^{n} e_i e_i^*(P_1 - R_1)) > 0. \tag{11}$$

По условию леммы $\det R_1 = \det R > 0$, поэтому определена матрица R_1^{-1}, и неравенство (11) эквивалентно тому, что

$$\det(E + \sum_{i=j}^{n} e_i e_i^*(P_1 R_1^{-1} - E)) > 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В силу леммы 1 эти неравенства выполнены в том и только том случае, когда

$$P_1 R_1^{-1} = (E + e_1 w_1^*)(E + e_2 w_2^*) \ldots (E + e_n w_n^*),$$

где $1 + w_{ii} > 0$. Это эквивалентно тому, что

$$F^{-1}PF = (E + e_1 w_1^*)(E + e_2 w_2^*) \ldots (E + e_n w_n^*)F^{-1}RF,$$

то есть $P \in \mathcal{P}$. Лемма доказана.

Замечание 3. Предположим, что система (1) имеет своими коэффициентами ограниченную непрерывную матрицу $A(\cdot)$ и ограниченную кусочно равномерно непрерывную $B(\cdot)$. Пусть $Q(t, s) : = X(t, s)B(s)$, где $X(t, s)$ — матрица Коши однородной системы $\dot{x} = A(t)x$. Тогда [4] система (1) σ-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда на каждом из отрезков $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдутся моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и векторы $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^m$, $\|\nu_i\| = 1$ такие, что векторы $\xi_i : = Q(t_0, t_i)\nu_i$, $i = 1, \ldots, n$ образуют базис $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{[t_0, t_0+\sigma]}$ пространства $\mathbb{R}^n$, при этом определитель матрицы $F = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ положителен. Будем говорить, что $\mathcal{F}_{[t_0, t_0+\sigma]}$ — *базис чистых движений* системы (1) на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *σ-равномерно вполне управляема и имеет своими коэффициентами ограниченную непрерывную матрицу $A(\cdot)$ и ограниченную кусочно равномерно непрерывную $B(\cdot)$. Если существует такое $l \in \mathbb{N}$, что для произвольной матрицы $\Lambda \in \mathrm{M}_n$ с положительным определителем найдутся матрицы $W_1, \ldots, W_{l-1} \in \mathcal{L}$, обеспечивающие выполнение равенства*

$$\Lambda = W_1 S_1 W_2 S_2 \ldots W_{l-1} S_{l-1},$$

где $S_k : = F_k^{-1} X_k^{-1} F_{k+1}$, $X_k = X(t_0 + k\sigma, t_0 + (k-1)\sigma)$, F_k — матрица базиса чистых движений системы (1) *на отрезке $[t_0 + (k-1)\sigma, t_0 + k\sigma]$, то система* (1) *глобально достижима на отрезке $[t_0, t_0 + l\sigma]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем набор $n\times n$-матриц с положительными определителями $\Lambda_0,\ldots,\Lambda_l$. При произвольном фиксированном значении $k\in\{1,2,\ldots,l\}$ на отрезке $J_k\doteq[t_0+(k-1)\sigma,t_0+k\sigma]$ рассмотрим задачу управления для матричного уравнения (4) с условиями

$$Y(t_0+(k-1)\sigma)=\Lambda_{k-1},\quad Y(t_0+k\sigma)=\Lambda_k. \tag{12}$$

По формуле Коши решение уравнения (4), удовлетворяющее первому из условий (12), записывается в виде

$$Y(t)=X(t,t_0+(k-1)\sigma)\Big(\Lambda_{k-1}+\int\limits_{t_0+(k-1)\sigma}^{t}Q(t_0+(k-1)\sigma,s)V(s)\,ds\Big). \tag{13}$$

Второе условие (12) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$X_k\Big(\Lambda_{k-1}+\int\limits_{t_0+(k-1)\sigma}^{t_0+k\sigma}Q(t_0+(k-1)\sigma,s)V(s)\,ds\Big)=\Lambda_k,$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda_{k-1}+\int\limits_{t_0+(k-1)\sigma}^{t_0+k\sigma}Q(t_0+(k-1)\sigma,s)V(s)\,ds=X_k^{-1}\Lambda_k. \tag{14}$$

Построим такое управление $V(\cdot)\in KC_{mn}[t_0,t_0+l\sigma]$, гарантирующее выполнение этих равенств, что каждая из матриц

$$G_k(t):=\Lambda_{k-1}+\int\limits_{t_0+(k-1)\sigma}^{t}Q(t_0+(k-1)\sigma,s)V(s)\,ds$$

обратима на J_k. Тогда определенная при всех $t\in J_k$ равенством (13) матрица $Y(t)$ обратима, при этом

$$Y^{-1}(t)=G_k^{-1}(t)X(t_0+k\sigma,t).$$

Положим $U(t)=V(t)Y^{-1}(t)$. Поскольку матричная функция $Y(\cdot)$ на отрезке J_k является решением уравнения

$$\dot Y=A(t)Y+B(t)V(t)=\big(A(t)+B(t)U(t)\big)Y$$

и удовлетворяет начальному условию $Y(t_0+(k-1)\sigma)=\Lambda_{k-1}$, на J_k имеет место тождество

$$X_U(t,t_0+(k-1)\sigma)=Y(t)Y^{-1}(t_0+(k-1)\sigma)=Y(t)\Lambda_{k-1}^{-1}.$$

Из второго условия (12) следует, что

$$X_U(t_0+k\sigma,t_0+(k-1)\sigma)=\Lambda_k\Lambda_{k-1}^{-1},$$

поэтому

$$X_U(t_0+l\sigma,t_0)=$$
$$=X_U(t_0+l\sigma,t_0+(l-1)\sigma)X_U(t_0+(l-1)\sigma,t_0+(l-2)\sigma)\ldots X_U(t_0+\sigma,t_0)=$$
$$=\Lambda_l\Lambda_{l-1}^{-1}\Lambda_{l-1}\Lambda_{l-2}^{-1}\ldots\Lambda_1\Lambda_0^{-1}=\Lambda_l\Lambda_0^{-1}.$$

Возьмем $\Lambda_0=E$, $\Lambda_l=H$, где H — произвольная матрица с положительным определителем. Тогда имеет место равенство $X_U(t_0+l\sigma,t_0)=H$.

Пусть $\mathcal{F}_k := \{\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k\}$ — базис чистых движений системы (1) на отрезке J_k. Задача заключается в построении такого набора матриц $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{l-1}$ и таких векторов $v_i^k \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$, что при всех $k \in \{1, \ldots, l\}$ выполнены соотношения

$$\Lambda_{k-1} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k v_i^{k*} = X_k^{-1} \Lambda_k, \tag{15}$$

$$\det(\Lambda_{k-1} + \sum_{i=1}^{j} \xi_i^k v_i^{k*}) > 0 \tag{16}$$

для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Из результатов работы [3] вытекает, что (15) обеспечивает выполнение равенства (14), а (15) — обратимость матрицы $Y(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + l\sigma]$.

Пусть $M_k := F_k^{-1} \Lambda_{k-1} F_k$, $H_k := F_k^{-1} X_k^{-1} \Lambda_k F_k$. Тогда

$$\Lambda_{k-1} + \sum_{i=1}^{j} \xi_i^k v_i^{k*} = F_k (M_k + \sum_{i=1}^{j} e_i v_i^{k*} F_k) F_k^{-1}.$$

Поэтому (15) и (16) эквивалентны тому, что

$$M_k + \sum_{i=1}^{n} e_i v_i^{k*} F_k = H_k, \tag{17}$$

$$\det(M_k + \sum_{i=1}^{j} e_i v_i^{k*} F_k) > 0, \ j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Равенство (17) выполнено тогда и только тогда, когда $v_i^{k*} F_k = e_i^* (H_k - M_k)$, следовательно, (18) равносильно неравенствам

$$\det(M_k + \sum_{i=1}^{j} e_i e_i^* (H_k - M_k)) > 0, \ j = 1, \ldots, n,$$

то есть пара $(\Lambda_{k-1}, X_k^{-1} \Lambda_k)$ должна быть законопослушной относительно базиса $\mathcal{F}_k$. Из леммы 2 следует, что это свойство выполнено тогда и только тогда, когда матрица Λ_{k-1} представима в виде

$$\Lambda_{k-1} = F_k W_k F_k^{-1} X_k^{-1} \Lambda_k,$$

где $W_k \in \mathcal{L}$.

Так как $\Lambda_0 = E$, получаем следующие равенства:

$$E = \Lambda_0 = F_1 W_1 F_1^{-1} X_1^{-1} \Lambda_1 = F_1 W_1 F_1^{-1} X_1^{-1} F_2 W_2 F_2^{-1} X_2^{-1} \Lambda_2 = \ldots =$$

$$= F_1 W_1 F_1^{-1} X_1^{-1} F_2 W_2 F_2^{-1} X_2^{-1} \ldots F_l W_l F_l^{-1} X_l^{-1} \Lambda_l.$$

Пусть $S_k := F_k^{-1} X_k^{-1} F_{k+1}$, тогда

$$E = F_1 W_1 S_1 W_2 S_2 \ldots W_{l-1} S_{l-1} W_l F_l^{-1} X_l^{-1} \Lambda_l,$$

или

$$W_1 S_1 W_2 S_2 \ldots W_{l-1} S_{l-1} = F_1^{-1} \Lambda_l^{-1} X_l F_l W_l^{-1} = F_1^{-1} H^{-1} X_l F_l W_l^{-1}.$$

Положим $\Lambda = F_1^{-1} H^{-1} X_l F_l W_l^{-1}$, тогда $\det \Lambda > 0$. Пользуясь условиями теоремы, получаем глобальную достижимость системы (1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
2. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. — 1960. — Vol. 5, № 1. — P. 102–119.
3. Попова С. Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 12. — С. 1627–1636.
4. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 97–106.

Поступила в редакцию 15.10.09

S. N. Popova
Sufficient conditions of global attainability of linear control system

New sufficient condition of global attainability of linear control system is proved.

Keywords: linear control systems, global attainability.

Mathematical Subject Classifications: 93C05

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: ps@uni.udm.ru