УДК 532.527, 532.5.013.4, 004.94

© *И. С. Мамаев*

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКЕ КАК ПАРАДИГМА КОМПЬЮТЕРНЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА

Данная работа посвящена исследованию динамики следующих систем большого числа точечных вихрей на плоскости:

— вихревые кольца с внешним радиусом $r = 1$ и переменным внутренним радиусом r_0 ,

— вихревые эллипсы с полуосями a , b .

Основное внимание уделено изучению асимптотического поведения ($t \to \infty$) систем и проверке критериев устойчивости для непрерывных распределений завихренности с помощью компьютерного эксперимента.

Ключевые слова: вихревая динамика, точечный вихрь, гидродинамика, асимптотическое поведение.

Введение

В работе исследуется динамика большого числа точечных вихрей на плоскости с точки зрения возможности достижения этой системой некоторого равновесного состояния. Подобная точка зрения восходит к заметке Л. Онзагера [1], в которой предполагается, что система N вихрей при $N \to \infty$ достигает некоторого равновесия, при котором отдельные вихри, «фактически подверженные случайным блужданиям, будут оказывать на поток достаточно случайное и неорганизованное влияние». Это, по мнению автора, позволяет применять к описанию системы стандартные методы статистической физики.

В данной работе исследуется численными методами эволюцию плотности распределения $w_t(x, y)$ большого числа ($N \sim 10^4$) одинаковых точечных вихрей на плоскости и анализируем возможность прихода этой системы к статистическому равновесию. Как показывают результаты численных экспериментов, в этой системе нет универсального (т. е. термодинамического) равновесия, которое бы достигалось из почти всех начальных состояний. Можно высказать следующее предположение

§ 1. Основные уравнения

Уравнения, описывающие эволюцию завихренности идеальной несжимаемой жидкости были получены Гельмгольцем [4]. В случае плоскопараллельных течений в неподвижной декартовой системе координат Oxy уравнения для завихренности $\Omega(x, y, t) = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}$ представляются в форме

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\Omega = 0, \qquad \Delta\psi = -\Omega, \\ v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Если к уравнениям добавить начальные условия для завихренности и граничные условия, которые в случае неограниченной плоскости сводятся к требованию

$$|\mathbf{v}| \xrightarrow[|\mathbf{r}| \to \infty]{} 0, \tag{1.2}$$

то получится замкнутая система, определяющая эволюцию завихренности во времени.

Уравнения (1.1) являются существенно нелинейными, аналитические методы их решения отсутствуют. Поэтому особое значение для их исследования приобретают различные качественные и компьютерные методы.

Как известно, уравнения (1.1) допускают решение в виде суперпозиции точечных вихрей

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Gamma_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \qquad \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i \frac{\Gamma_i}{4\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)|^2, \qquad \Gamma_i = const, \tag{1.3}$$

движение которых описывается гамильтоновой системой [5]

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{1.4}$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i<j}^{N} \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2).$$

§ 2. Стационарные решения и их устойчивость

Довольно легко найти некоторые стационарные ($\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$) решения уравнений (1.1).

Плоскопараллельное однородное течение. В декартовой системе координат уравнения (1.1) имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega(x, y). \tag{2.1}$$

Легко видеть, что этим уравнениям можно удовлетворить, полагая, что функции ψ и Ω зависят только от одной переменной, например от y, т. е. $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Они описывают однородное по x течение жидкости с неоднородной по y завихренностью (в частности, течение между двумя пластинами). Линейная устойчивость этих решений была исследована Рэлеем [6]. Им было показано, что любое монотонное распределение ($\frac{\partial \Omega}{\partial y} > 0$) завихренности будет устойчивым. Подробный обзор результатов по этой проблеме содержится, например, в [7].

Осесимметричное вихревое течение. В полярной системе координат уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\right) = 0, \qquad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\Omega(r, \varphi), \\ v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \qquad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Легко видеть, что осесимметричное решение $\Omega = \Omega_0(r)$, $\psi = \psi_0(r)$ удовлетворяет уравнениям и описывает неоднородное по r вращение жидкости вокруг центра. При этом величины Ω_0 и ψ_0 связаны соотношением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_0(r)}{\partial r} \right) = -\Omega_0(r).$$

Устойчивость вихревых колец. Для вихревого кольца с внутренним радиусом $r = r_0$ и внешним $r = 1$ распределение завихренности является кусочно-постоянным и имеет вид

$$\Omega(r) = \begin{cases} \Omega_1, & 0 < r < r_0, \\ 1, & r_0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

В общем случае $\Omega(r)$ не является монотонной функцией ($\Omega_1 < 1$), поэтому обобщенный критерий Рэлея неприменим. В этом случае функция $\chi(r) = \frac{1-\Omega_1}{r_0}\delta(r-r_0)-\delta(r-1)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, и

$$\omega_0(r) = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{r}, & 0 < r < r_0, \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\Omega_1-1}{r}r_0^2), & r_0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Будем искать $\widetilde{\psi}_m$ в виде

$$\widetilde{\psi}_m(r) = \begin{cases} \Psi_1 = c_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^m, & 0 < r < r_0, \\ \Psi_2 = c_2 r^m + c_3 r^{-m}, & r_0 \leqslant r \leqslant 1, \\ \Psi_3 = c_4 r^{-m}, & r > 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Проинтегрируем уравнение вблизи точек $r = r_0$ и $r = 1$, в результате получим два уравнения

$$\Psi_2'(r_0) - \Psi_1'(r_0) - \frac{m}{r_0}\frac{1-\Omega_1}{\varepsilon^{(m)} + m\frac{\Omega_1}{2}}\Psi_1(r_0) = 0,$$
$$\Psi_3'(1) - \Psi_2'(1) + \frac{m}{\varepsilon^{(m)} + \frac{m}{2}(1 + (\Omega_1 - 1)r_0^2)}\Psi_2(1) = 0.$$

Добавив уравнения непрерывности

$$\Psi_2(r_0) - \Psi_1(r_0) = 0, \qquad \Psi_3(1) - \Psi_2(1) = 0,$$

получим систему из четырех уравнений. Подставляя в систему $\widetilde{\psi}_m$ из (2.4) и разрешая ее, получим $\varepsilon_n^{(m)}$ в виде $\varepsilon_{n1,2}^{(m)} = \varepsilon_0^{(m)} \pm \sqrt{D}$. От подкоренного выражения D зависит поведение функций $\widetilde{\psi}(r,\varphi,t)$, $\widetilde{\Omega}(r,\varphi,t)$. В случае обычного вихревого кольца $\Omega_1 = 0$ и выражение для D принимает вид

$$D(r_0, m) = m^2(r_0^2 - 1)^2 + 4m(r_0^2 - 1) - 4r_0^{2m} + 4.$$

Если $D < 0$, корни имеют мнимую часть, в результате чего в решении появляется множитель, растущий со временем, что приводит к потере устойчивости решения. На (рис. 1) серым цветом обозначена область неустойчивости вихревого кольца, где D принимает отрицательные значения.

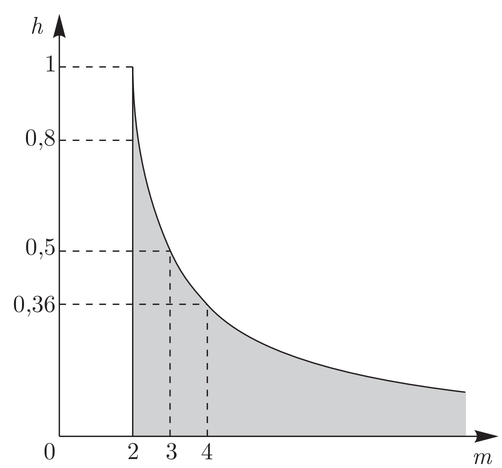

Рис. 1. Область линейной неустойчивости вихревого кольца (отмечена серым цветом), $h = 1 - r_0$ — толщина кольца.

Как видно из рис. 1, неустойчивость m -й моды решения наступает, когда внутренний радиус кольца r_0 становится больше определенного значения. При $m = 2$ величина D обращается в нуль при любых значениях r_0, следовательно, эта мода всегда устойчива в линейном приближении. Заметим, что на границе области величины $\varepsilon_{n2}^{(m)} = 0$.

Таким образом, если внутренний радиус кольца $r_0 \leqslant 0,5$, то устойчивыми являются все моды, включая $m = 2$, из этого следует

Теорема 1. Однородное вихревое кольцо с внешним радиусом $r = 1$ и внутренним радиусом $r = r_0$ устойчиво в линейном приближении при значениях $r_0 \leqslant 0,5$.

Вопрос об устойчивости в нелинейном приближении остается открытым. Приводимые ниже результаты численного моделирования свидетельствуют, что более правдоподобна

Гипотеза 1. Однородное вихревое кольцо всегда неустойчиво (в нелинейном приближении).

Эллиптический вихрь Кирхгофа [8]. Это еще одно хорошо известное решение уравнений (1.1), которое является стационарным во вращающейся системе координат.

А. Э. Лав [8] исследовал линейную устойчивость вихря Кирхгофа относительно вариации границы и показал, что движение устойчиво для соотношения полуосей эллипса $\frac{b}{a} \geqslant \frac{1}{3}$. Можно показать, что анализ устойчивости движения относительно произвольной вариации завихренности сводится к анализу устойчивости относительно вариации границы.

Интересно отметить, что диаграмма устойчивости m-й гармоники от отношения $\frac{b}{a}$ имеет вид, похожий на диаграмму устойчивости вихревого кольца.

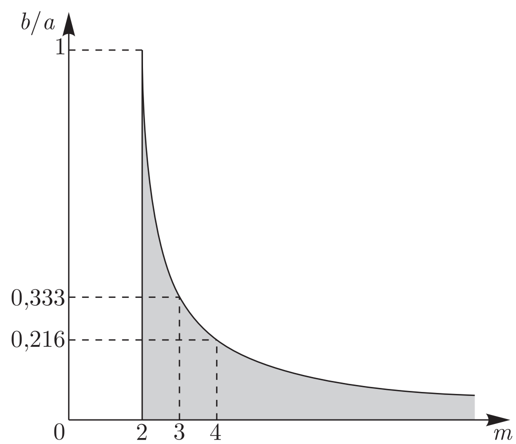

Рис. 2. Область линейной неустойчивости вихря Кирхгофа (отмечена серым цветом).

Область неустойчивости есть и при $\frac{b}{a} < \frac{1}{3}$ (рис. 2), но при нецелых m, равно как и для кольца при $r_0 < 0,5$.

Теорема 2. Однородный эллиптический вихрь Кирхгофа с полуосями a и b устойчив в линейном приближении при соотношении полуосей $\frac{b}{a} \geqslant \frac{1}{3}$.

§ 3. Численные эксперименты в динамике точечных вихрей

Численные эксперименты В работе нас интересует эволюция вихревых пятен с равномерной завихренностью внутри. В непрерывной постановке численная реализация этой задачи сложна в силу нелинейности уравнений (1.1). Более простым методом моделирования эволюции вихревых пятен является метод дискретной аппроксимации, когда непрерывное распределение завихренности заменяется большим количеством одинаковых точечных вихрей. Моделирование движения сводится к расчету траекторий движения вихрей. Выполнение численных экспериментов дает нам возможность сравнить их результаты с известными аналитическими критериями устойчивости для некоторых вихревых конфигураций, а также исследовать асимптотическое поведение вихревых пятен на плоскости.

В данной работе был проведен ряд численных экспериментов, моделирующих эволюцию следующих систем большого числа точечных вихрей на плоскости:

1. вихревые кольца с внешним радиусом $r = 1$ и переменным внутренним радиусом r_0,
2. вихревые эллипсы с полуосями a, b.

Здесь мы приводим лишь некоторые из них, наиболее ярко характеризующие поведение рассматриваемых вихревых конфигураций.

Эволюция тонких колец ($r_0 > 0,5$). Тонкие кольца с $r_0 > 0,5$ являются неустойчивыми конфигурациями в линейном приближении. Численные эксперименты в точности подтверждают теорию, причем количество образующихся при распаде колец пятен зависит от r_0 и совпадает с номером наиболее неустойчивой гармоники. При больших временах асимптотические конфигурации обладают осесимметричным, монотонным по радиусу распределением завихренности (т. е. $\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = 0$, $\frac{\partial\Omega}{\partial r} > 0$), оно представляет собой крупное центральное пятно, окруженное облаком вихрей меньшей плотности. На рис. 3 приведена характерная эволюция тонких колец во времени.

Эволюция широких колец ($r_0 \leqslant 0,5$). Согласно теореме 1 в линейном приближении такие кольца должны быть устойчивыми. Численные эксперименты показывают, что широкие кольца обнаруживают неустойчивость уже на начальном этапе расчета. На рис. 4 приведен характерный вид эволюции широких колец. Во всех экспериментах наблюдается искажение границ колец, причем внешняя и внутренняя границы приобретают форму многогранников, что соответствует возбуждению мод с номерами, равными количеству граней. Неустойчивость в данном случае, по-видимому, связана с нелинейной неустойчивостью. Этот вопрос требует дополнительного изучения. При больших временах, как правило, асимптотические конфигурации обладают осесимметричным, монотонным по радиусу распределением завихренности.

Эволюция длинных вихревых эллипсов ($\frac{b}{a} < \frac{1}{3}$). Согласно критерию устойчивости А. Э. Лава (теорема 2), эллиптические вихри с соотношением полуосей $\frac{b}{a} < \frac{1}{3}$ неустойчивы в линейном приближении. На начальном этапе моделирования происходит распад эллипсов на несколько пятен с образованием вихревых нитей вокруг них, количество пятен зависит от конкретного соотношения полуосей a и b. С течением времени пятна сливаются друг с другом.

Численные эксперименты, проведенные для вихревых эллипсов с соотношениями полуосей $\frac{b}{a} = 0,1$ и $\frac{b}{a} = 0,05$ (результаты представлены на рис. 5 и рис. 6), показали, что асимптотические конфигурации для этих двух случаев существенно различаются.

Для эллипса с $\frac{b}{a} = 0,1$ асимптотическая конфигурация имеет вид крупного пятна в центре со «спутником» (небольшим плотным скоплением вихрей), окруженных облаком вихрей меньшей плотности. Распределение завихренности не осесимметричное и не монотонное по радиусу. Вопрос об устойчивости такой конфигурации пока не изучен.

В случае вихревого эллипса с $\frac{b}{a} = 0,05$ асимптотическая конфигурация принимает вид одного центрального пятна в облаке вихрей, причем вокруг пятна имеется тонкий кольцевой слой меньшей, чем у остального облака, плотности. Таким образом, распределение завихренности является осесимметричным, но не монотонным по радиусу.

Эволюция вихревых эллипсов с малым эксцентриситетом ($\frac{b}{a} \geqslant \frac{1}{3}$). Вихревые эллипсы с соотношением полуосей $\frac{b}{a} \geqslant \frac{1}{3}$ должны быть устойчивыми конфигурациями. Численный эксперимент подтверждает этот критерий: такие эллипсы хорошо сохраняют свою форму при больших временах моделирования. Однако асимптотические конфигурации несколько отличаются от исходных: границы эллипсов приобретают рыхлую структуру, отдельные вихри

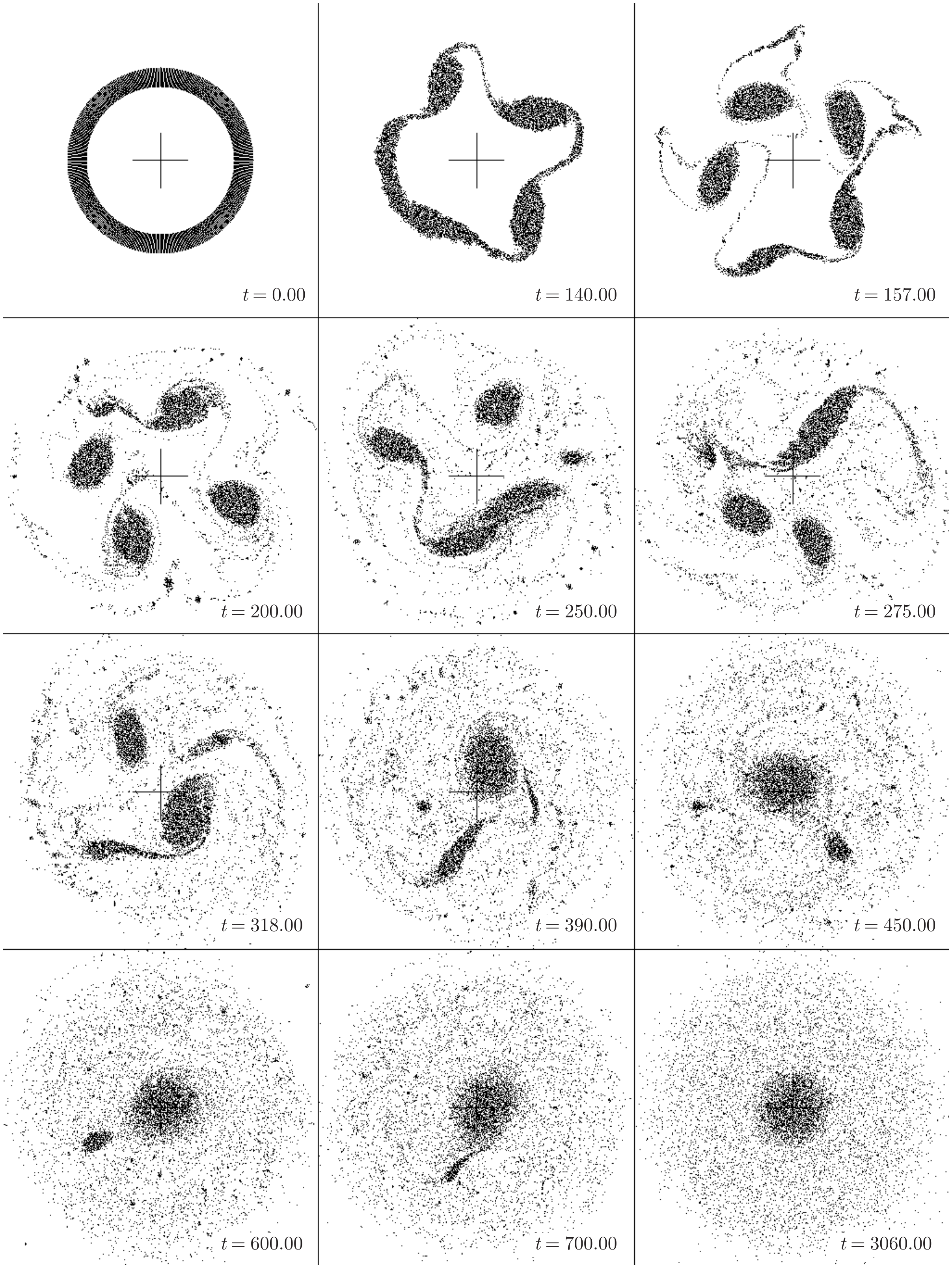

Рис. 3. Характерный вид эволюции тонких вихревых колец ($N = 10000$, $r_0 = 0,8$, $dt = 0,1$).

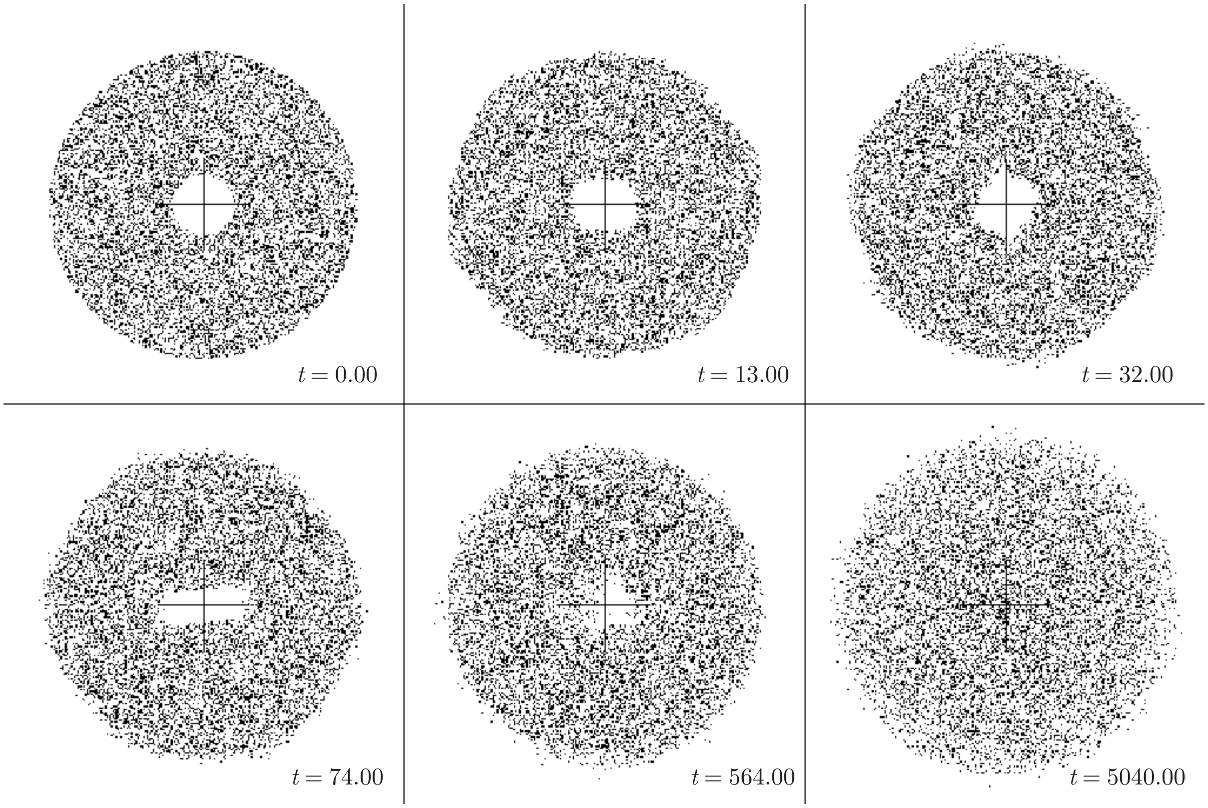

Рис. 4. Характерный вид эволюции широких вихревых колец ($N = 10000$, $r_0 = 0,2$, $dt = 0,1$).

находятся на небольшом расстоянии от основного пятна. Причина наблюдаемого диффузионного эффекта может быть связана с дискретизацией непрерывного распределения точечными вихрями или с неустойчивостью эллипсов в нелинейном приближении.

§ 4. Обсуждение результатов

В заключение отметим ряд задач, которые было бы интересно исследовать как аналитическими, как и численными методами.

1. Исследование нелинейной устойчивости широких вихревых колец и эллипсов с малым эксцентриситетом.

2. Отыскание новых стационарные равномерно вращающихся конфигурации, в том числе с несвязным и с неоднородным распределением завихренности.

3. Исследование асимптотического поведения (т. е. на больших временах) большого числа вихрей с интенсивностями разного знака в ограниченной области (например, в круге, кольце). Имеющиеся в настоящее время результаты (см. работы [9, 10]) относятся к сравнительно малому числу вихрей $N \backsim 10^2$ и не позволяют с уверенностью судить о кластеризации и статистических свойствах.

Отметим также, что полученные результаты компьютерных экспериментов об асимптотическом поведении вихрей одного знака не подпадают под имеющиеся теоретические описания [1, 2, 13] и требуют дополнительного изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Onsager L. Statistical hydrodynamics. // Nuovo Cimento. — 1949. — Vol. 6. — P. 279–287.

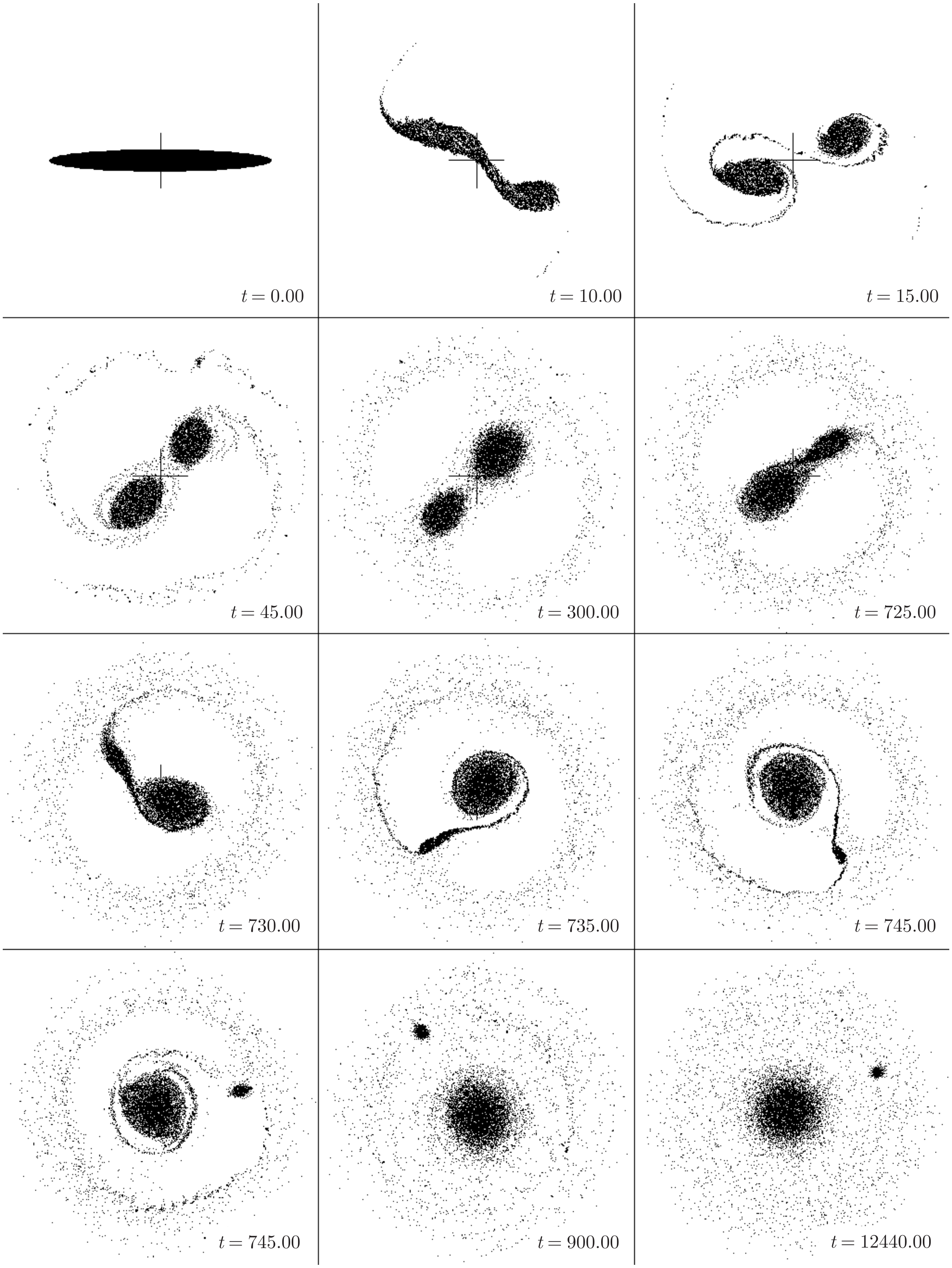

Рис. 5. Эволюция длинного вихревого эллипса ($N = 10000$, $\frac{b}{a} = 0,1$, $dt = 0,1$).

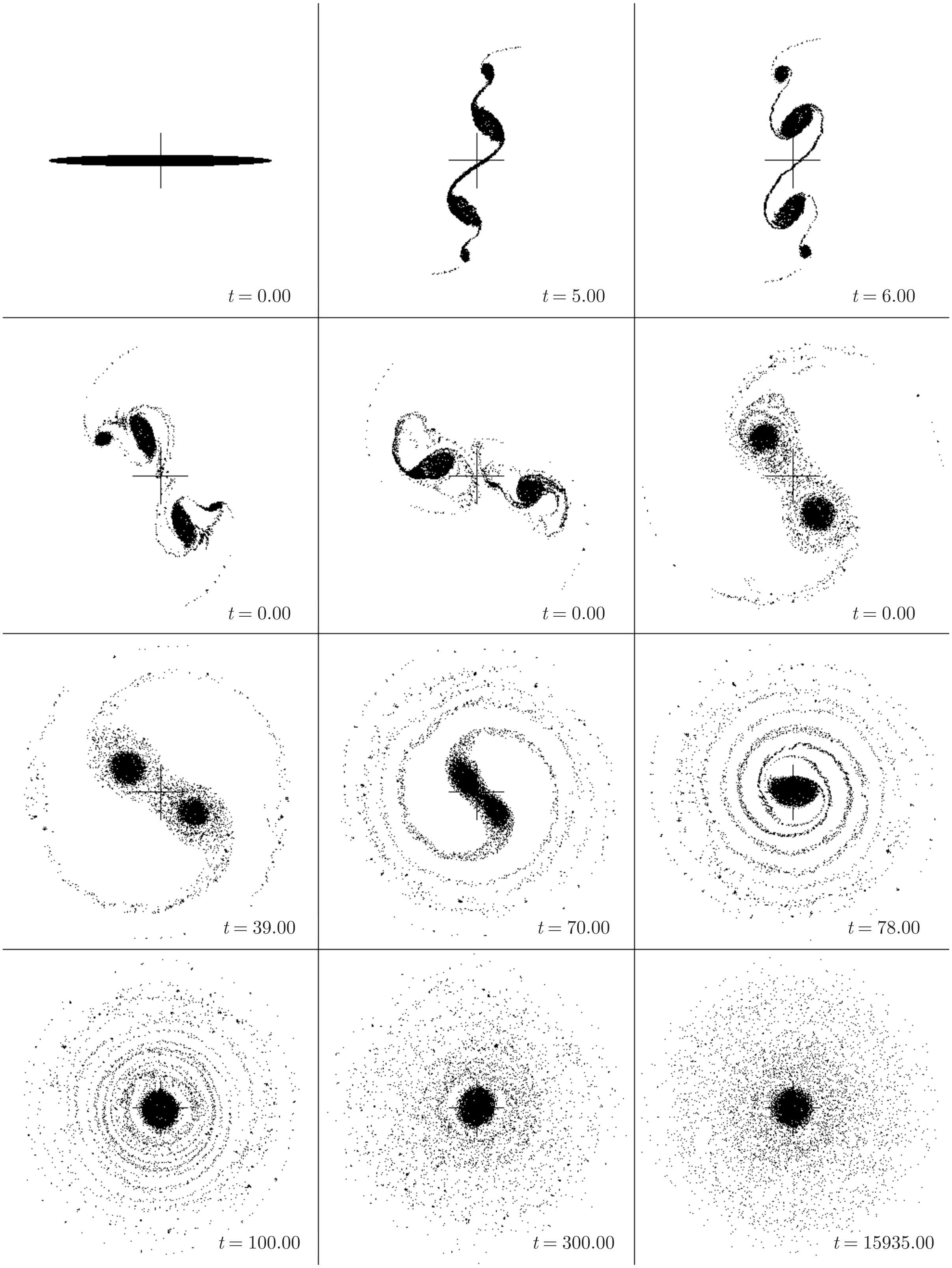

Рис. 6. Эволюция длинного вихревого эллипса ($N = 10000$, $\frac{b}{a} = 0,05$, $dt = 0,1$).

2. Montgomery D., Joyce G. Statistical mechanics of negative temperature states. // Phys. Fluids. — 1974. — Vol. 17, №. 6. — P. 1139–1145.
3. Козлов В. В. Уравнение вихря $2D$-гидродинамики, стационарное кинетическое уравнение Власова и развитая турбулентность. // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, № 4. — С. 425–434.
4. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. // J. Reine Angew. Math. — 1858. — Vol. 55. — P. 25–55.
5. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР. — 1962. [Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig: Mechanik. — 1874.].
6. Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей) Теория звука: Т. II. М.: ГИТТЛ. — 1955. — 476 с.
7. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит. — 2005. — 288 с.
8. Love A. E. H. On the stability of certain vortex motions. // Proc. London Math. Soc. — 1894. — Vol. 25. — P. 18–42.
9. Bühler O. Statistical mechanics of strong and weak point vortices in a cylinder. // Phys. Fluids. — 2002. — Vol. 14, №. 7. — P. 2139–2149.
10. Pavlov V., Buisine D., and Goncharov V. Formation of vortex clusters on a sphere. // Nonlinear Proc. Geophys. — 2001. — Vol. 8. — P. 9–19.
11. Yatsuyanagi Yu., Kiwamoto Ya., Tomita H., Sano M. M., Yoshida T., and Ebisuzaki T. Dynamics of two-sign point vortices in positive and negative temperature state. // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94. — 054502, 4 P.
12. Yoshida T., Sano M. M. Numerical simulation of vortex crystals and merging in N-point vortex systems with circular boundary. // J. Phys. Soc. Japan. — 2005. — Vol. 74. — P. 587–598.
13. Chavanis P. H., Lemou M. Kinetic theory of point vortices in two dimensions: Analytical results and numerical simulations. // Eur. Phys. J. B. — 2007. — Vol. 59, №. 2. — P. 217–247.
14. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. — 368 с.
15. Weiss J. B., McWilliams J. C. Nonergodicity of point vortices. // Phys. Fluids. — 1991. — Vol. 3, №. 5. — P. 835–844.
16. Kizner Z., Khvoles R. The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions. // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70. — 016307, 4 P.
17. Mitchell T. B., Rossi L. F. The evolution of Kirchhoff elliptic vortices. // Phys. Fluids. — 2008. — Vol. 20, №. 5. — 054103, 12 P.

Поступила в редакцию 21.10.09

I. S. Mamaev

Method of discrete vortices in statistical vortex dynamics as a paradigm of computer methods of analysis

With the help of mathematical modelling, we study the dynamics of many point vortices system on the plane. For this system, we consider the following cases:

— vortex rings with outer radius $r = 1$ and variable inner radius r_0,

— vortex ellipses with semiaxes a, b.

The emphasis is on the analysis of the asymptotic ($t \to \infty$) behavior of the system and on the verification of the stability criteria for vorticity continuous distributions.

Keywords: vortex dynamics, point vortex, hydrodynamics, asymptotic behavior.

Mathematical Subject Classifications: 76E07, 76E09,76B47, 68U20

Мамаев Иван Сергеевич, д. ф.-м. н., Институт компьютерных исследований, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: mamaev@ics.org.ru