МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

© *А. С. Банников*

О ЗАДАЧЕ ПОЗИЦИОННОЙ ПОИМКИ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО ГРУППОЙ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ[1]

Рассматривается задача позиционной поимки группой преследователей одного убегающего при равенстве динамических и инерционных возможностей всех участников. Получены достаточные условия ε-поимки на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: дифференциальная игра, позиционное управление с поводырём.

Введение

Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ задачи простого преследования рассматривался многими авторами [1, 2]. В этих работах одним из условий окончания игры было условие преимущества преследователей по ресурсам управления или же условие информационной дискриминации убегающего. Основываясь на процедуре управления с поводырём, предложенной Н. Н. Красовским [3, 4], А. А. Чикрий приводит позиционную процедуру управления для квазилинейной задачи преследования один на один [5]. В работе [6] этот подход развивается для игры со многими преследователями.

В данной работе показывается, что если преследование может быть завершено за конечное время в классе позиционных контрстратегий, то при информированности преследователей только о позиции игры, оно может быть закончено за то же самое время в сколь угодно малой окрестности терминального множества.

§ 1. Постановка задачи

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$-го лица: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E. Законы движения каждого из преследователей P_i и убегающего E имеют вид:

$$\begin{array}{llll} P_i\colon & \dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), & x_i(t_0) = x_i^0, & u_i \in Q, \\ E\colon & \dot{y}(t) = a(t)v(t), & y(t_0) = y^0, & v \in Q, \end{array}$$

причём $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i \in N_n = \{1, \ldots, n\}$, $M_i \subset \mathbb{R}^k$ — заданные выпуклые компакты, $a(t)\colon [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве полуоси $[t_0, +\infty)$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Пусть $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $i \in N_n$, $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$. Тогда

$$\dot{z}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \quad z_i(t_0) = z_i^0. \tag{1}$$

Для каждой из систем (1) рассмотрим систему–поводыря [4]

$$\dot{w}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \quad w_i(t_0) = w_i^0, \quad u_i, v \in Q, \quad i \in N_n. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11–01–00380).

Определение 1. Будем говорить, что в игре Γ *происходит поимка* из заданной начальной позиции $z^0 = z(t_0)$, если существуют момент времени $T_0 = T(z^0)$, позиционные стратегии управления с поводырём $\mathcal{U}_i = (U_i, \psi_i, \chi_i)$ преследователей P_i, $i \in N_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in Q$, $t \in [t_0, T_0]$ существуют момент времени $\tau \in [t_0, T_0]$ и номер $s \in N_n$ такие, что имеет место включение $z_s(\tau) \in M_s$.

Здесь U_i — функция, которая будет формировать управление преследователя P_i в исходной системе (1)

$$U_i \colon [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to Q,$$

функция ψ_i есть переходная функция i-го поводыря

$$\psi_i \colon T_+^2 \times \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^{nk} \to \mathbb{R}^k \quad \Big(T_+^2 = \big\{ (t_1, t_2) \in [t_0, T_0]^2 \big| \, t_1 \leqslant t_2 \big\}\Big).$$

Значение переходной функции $\psi_i(t_1, t_2, z, w)$ есть положение $w_i = w_i(t_2)$, в котором i-й поводырь окажется в заданный момент времени t_2 при условии, что в момент $t = t_1$ управляемая система и поводыри находились в точках $z = z(t_1)$ и $w = w(t_1)$ соответственно.

Третья функция χ_i ставит в соответствие позиции (t, z) положение поводыря $\chi_i(t, z) = w_i = w_i(t)$.

Введём функции λ_i следующим образом:

$$\lambda_i(v, m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in Q, \ v \in Q\}, \qquad \lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i),$$

$$\lambda_i^-(v, m_i) = \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in -Q, \ v \in -Q\}, \qquad \lambda_i^-(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(v, m_i).$$

$$w^0 = (w_1^0, \ldots, w_n^0), \quad w_i^0 \notin M_i, \quad i \in N_n.$$

Так как Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то существуют

$$\delta(w^0) = \min_{v \in Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i(v) \geqslant 0, \quad \delta^-(w^0) = \min_{v \in -Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i^-(v) \geqslant 0,$$

причём $(\delta(w^0))^2 + (\delta^-(w^0))^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{Int} \operatorname{conv} \bigcup\limits_{i \in N_n} (w_i^0 - M_i)$.

Введём обозначения: $A^+(t) = \{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) > 0\}$, $A^-(t) = \{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) < 0\}$, $C(Q; h) = \max\limits_{q \in Q} \langle q, h \rangle$ — опорная функция компакта Q, $C'(Q; h)$ — градиент опорной функции, B^k — единичный шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат.

§ 2. Достаточные условия поимки

Теорема 1. *Пусть начальная позиция z^0 и функция $a(\cdot)$ таковы, что*

$$\widehat{T} = \widehat{T}(z^0) = \min \Big\{ t \geqslant t_0 \, | \, \delta(z^0) \int_{A^+(t)} a(s) \, ds + \delta^-(z^0) \int_{A^-(t)} |a(s)| \, ds = n \Big\} < +\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в игре Γ происходит поимка с терминальными множествами $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon B^k$.

Доказательство. В качестве $T(z^0)$ возьмём $\widehat{T}(z^0)$ и определим функции χ_i, U_i следующим образом:

$$\chi_i(t, z) = z_i, \quad i \in N_n.$$

$$U_i(t, x, w) = \begin{cases} C'(Q, w - x), & \text{при } x \neq w \text{ и } a(t) > 0, \\ C'(Q, x - w), & \text{при } x \neq w \text{ и } a(t) < 0, \\ u_i^0 \in Q, & \text{при } x = w \text{ или } a(t) = 0. \end{cases}$$

где u_i^0 — произвольный фиксированный вектор из Q. Тогда для всех $(t,x,w)\in[t_0,T_0]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ будет выполнено

$$\langle x-w, a(t)U_i(t,x,w)\rangle = \min_{u\in Q}\langle x-w, a(t)u\rangle, \quad i\in N_n.$$

Для определения переходной функции поводыря рассмотрим стратегию $V^*(t,s_1,\ldots,s_n)$ фиктивного убегающего в системе (2)

$$V^*(t,s_1,\ldots,s_n)\colon [t_0,T_0]\times\mathbb{R}^{nk}\to Q$$
$$V^*(t,s_1,\ldots,s_n)=\begin{cases} C'(Q,-\sum\limits_{i\in N_n} s_i), & \text{при } \sum\limits_{i\in N_n} s_i\neq 0 \text{ и } a(t)>0,\\ C'(Q,\sum\limits_{i\in N_n} s_i), & \text{при } \sum\limits_{i\in N_n} s_i\neq 0 \text{ и } a(t)<0,\\ v^0\in Q, & \text{при } \sum\limits_{i\in N_n} s_i=0 \text{ или } a(t)=0,\end{cases}$$

где v^0 — произвольный фиксированный вектор из Q, и контрстратегии фиктивных преследователей

$$U_i^*\big(t,w^0,v^*(t)\big)=\begin{cases} v^*(t)-\lambda_i(v^*(t))(w_i^0-\mathcal{M}_i(v^*(t))), & a(t)>0,\\ v^*(t), & a(t)=0,\\ v^*(t)+\lambda_i^-(-v^*(t))(w_i^0-\mathcal{M}_i^-(-v^*(t))), & a(t)<0.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $v^*(t)=V^*(t,s_1,\ldots,s_n)$, $\mathcal{M}_i(v)$ и $\mathcal{M}_i^-(v)$ — измеримые по Борелю селекторы полунепрерывных сверху по включению компактных множеств

$$\mathfrak{M}_i(v)=\{m_i\in M_i|\lambda_i(v,m_i)=\lambda_i(v)\}, \quad \mathfrak{M}_i^-(v)=\{m_i\in M_i|\lambda_i^-(v,m_i)=\lambda_i^-(v)\}$$

соответственно. Тогда для всех $(t,s_1,\ldots,s_n)\in[t_0,T_0]\times\mathbb{R}^{nk}$ выполнено

$$\sum_{i\in N_n}\langle s_i, a(t)V^*(t,s_1,\ldots,s_n)\rangle=\min_{v\in Q}\sum_{i\in N_n}\langle s_i,a(t)v\rangle.$$

Переходные функции поводырей определяются теперь так:

$$\psi_i(t_1,t_2,z,w)=w_i+\int_{t_1}^{t_2} a(t)\big(u_i^*(t)-v^*(t)\big)\,dt,$$
$$v^*(t)=V^*(t,z_1-w_1,\ldots,z_n-w_n), \quad u_i^*(t)=U_i^*(t,w^0,v^*(t)), \quad t\in[t_1,t_2].$$
$$z=(z_1,\ldots,z_n), \quad w=(w_1,\ldots,w_n).$$

Рассмотрим построение пошаговых движений $z_i(t)$ и $w_i(t)$, $t\in[t_0,T_0]$, в процедуре управления с поводырём, где начальное положение поводыря w^0 выбирается равным начальному положению z^0.

Выбираем некоторое разбиение $\Delta=\{\tau_i\}_{i=0}^{\ell+1}$ отрезка $[t_0,T_0]$: $t_0=\tau_0<\ldots<\tau_{\ell+1}=T_0$. В начальный момент времени $t=t_0$ определим управления преследователей P_i, $i\in N_n$ на интервале $[\tau_0,\tau_1)$, полагая $u_i^0(t)=U_i(t,z_i^0,w_i^0)$, где $w_i^0=z_i^0$ — начальное положение поводырей. Управление $v^*(t)$ убегающего в системе–поводыре (2) на $[\tau_0,\tau_1)$ полагаем равным $V^*(t,z_1^0-w_1^0,\ldots,z_n^0-w_n^0)$, а управления фиктивных преследователей согласно (3) $u_i^*(t)=U_i^*(t,w^0,v^*(t))$.

Пусть $z_i(\tau_j)$ и $w_i(\tau_j)$ — положения, в которые пришли управляемые система (1) и система–поводырь (2) в момент $t=\tau_j$. Определяем движения $z_i(t)$, $w_i(t)$, полагая в системе (2) управление убегающего на $j+1$ шаге $v^*(t)=V^*\big(t,z_1(\tau_j)-w_1(\tau_j),\ldots,z_n(\tau_j)-w_n(\tau_j)\big)$, управления преследователей $u_i^*(t)=U_i^*(t,w^0,v^*(t))$, а управления преследователей P_i в системе (1) $u_i^0(t)=U_i(t,z_i(\tau_j),w_i(\tau_j))$.

Таким образом, преследователи в системе (1) строят свои управления пошагово, зная на каждом шаге реальную позицию игры и позицию во вспомогательной системе–поводыре.

Указанные построения продолжаются до тех пор, пока один из поводырей не попадёт на своё терминальное множество. Такой момент времени $\tau = \tau^0(w(\cdot)) \in [t_0, T_0]$ и номер $i_0 \in N_n$, что $w_{i_0}(\tau) \in M_{i_0}$ обязательно найдутся в силу условий теоремы и способов построения управлений в системе–поводыре (2) (см. [7, с. 47]).

Однако удобнее будет продолжить движения $z_i(t)$, $w_i(t)$ до момента $t = T_0$, формально полагая, что на промежутках $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, где $\tau_j > \tau^0(w(\cdot))$, в качестве движения поводырей выбираются решения уравнений (2), в которых $v^*(t) = V^*(t, z_1(\tau_j) - w_1(\tau_j), \ldots, z_n(\tau_j) - w_n(\tau_j))$, а $u_i^*(t) = u_i^* \in Q$ — произвольные постоянные управления. При этом в системе (1) по-прежнему выбираются управления преследователей $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(\tau_j), w_i(\tau_j))$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$.

Оценим теперь расстояние между движениями поводырей и соответствующими движениями систем (1).

Введём обозначения

$$g(t) = \begin{cases} |a(t)|, & t \in [t_0, T_0], \\ 0, & t \in [T_0, 2T_0 - t_0], \end{cases}, \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \quad t \in [T_0, 2T_0 - t_0],$$

$$h(t, \delta) = A(t + \delta) - A(t) = \int_{t}^{t+\delta} g(s)\, ds, \quad (t, \delta) \in [t_0, T_0] \times [0, T_0 - t_0],$$

$$f(\delta) = \max_{t \in [t_0, T_0]} h(t, \delta), \quad \delta \in [0, T_0 - t_0].$$

Тогда для любого решения уравнения

$$\dot{x}(t) = a(t)\big(u(t) - v(t)\big), \quad u, v \in Q, \quad t \in [t_0, T_0]$$

с любым начальным условием $x(t_0) = x_0$ выполнено

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leqslant \Big| \int_{t_1}^{t_2} |a(t)| \|u(t) - v(t)\|\, dt \Big| \leqslant 2Rf(\delta), \quad |t_1 - t_2| \leqslant \delta, \quad t_1, t_2 \in [t_0, T_0],$$

где $R = \max\limits_{q \in Q} \|q\|$ — модуль компакта Q.

Поэтому для любых реализовавшихся движений в системах (1) и (2)

$$\max_{i \in N_n} \|z_i(t_1) - z_i(t_2)\| \leqslant 2Rf(\delta),$$
$$\max_{i \in N_n} \|w_i(t_1) - w_i(t_2)\| \leqslant 2Rf(\delta),$$

как только $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, причём $f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть $s_i(t) = z_i(t) - w_i(t)$, $i \in N_n$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$, $t_* \in [t_0, T_0)$, $\delta \in (0, T_0 - t_*]$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\|s_i(t)\|^2}{dt} &= 2\langle s_i(t), a(t)\big(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)\big)\rangle = \\ &= 2\langle s_i(t_*) + s_i(t) - s_i(t_*), a(t)\big(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)\big)\rangle = \\ &= 2\Big(\langle s_i(t_*), a(t)\big(u_i^0(t) - u_i^*(t)\big)\rangle + \langle s_i(t_*), a(t)\big(v^*(t) - v(t)\big)\rangle + \\ &\quad + \langle s_i(t) - s_i(t_*), a(t)\big(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)\big)\rangle \Big) \leqslant \\ &\leqslant 2\Big(4Rf(\delta) \cdot 4R|a(t)| + \langle s_i(t_*), a(t)\big(v^*(t) - v(t)\big)\rangle \Big), \end{aligned}$$

если $v^*(t) = V^*(t, s_1(t_*), \ldots, s_n(t_*))$, $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(t_*), w_i(t_*))$, а управления $u_i^*(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — произвольные допустимые управления.

Поэтому $\sum\limits_{i\in N_n}\dfrac{d\|s_i(t)\|^2}{dt}\leqslant 2\sum\limits_{i\in N_n}\langle s_i(t_*),a(t)(v^*(t)-v(t))\rangle+32nR^2f(\delta)|a(t)|\leqslant|a(t)|\zeta(\delta)$, где $\zeta(\delta)=32nR^2f(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Значит,

$$\max_{t\in[t_*,t_*+\delta]}\max_{i\in N_n}\|s_i(t)\|^2\leqslant\sum_{i\in N_n}\|s_i(t_*)\|^2+\zeta(\delta)\int_{t_*}^{t_*+\delta}|a(\tau)|\,d\tau.$$

Так как $\sum\limits_{i\in N_n}\|s_i(t_0)\|^2=0$, то для любого $\varepsilon>0$

$$\max_{t\in[t_0,T_0]}\max_{i\in N_n}\|s_i(t)\|^2\leqslant\zeta(\delta)\int_{t_0}^{T_0}|a(\tau)|\,d\tau\leqslant\varepsilon^2 \tag{4}$$

как только будет выбрано разбиение с диаметром, не превосходящим δ, а δ подобрано из условия $\zeta(\delta)\leqslant\frac{\varepsilon^2}{\int_{t_0}^{T_0}|a(\tau)|\,d\tau}$.

В силу оценки (4) как только $w_{i_0}(\tau)\in M_{i_0}$, это будет означать, что преследователь P_{i_0} находится в ε-окрестности множества M_{i_0}, то есть в дифференциальной игре Γ происходит поимка, где в качестве терминальных множеств взяты множества $M_i^\varepsilon=M_i+\varepsilon B^k$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Вышеуказанный подход можно применять и в случае, когда необходимо завершить игру Γ в точности на терминальном множестве. В случае, когда существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $i\in N_n$ $\widetilde{M}_i=M_i\overset{*}{-}\varepsilon B^k\neq\varnothing$, можно рассмотреть игру с терминальными множествами $\widetilde{M}_i$. Тогда попадание одного из поводырей на $\widetilde{M}_{i_0}$ гарантирует поимку в игре с исходными множествами M_i.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Григоренко Н. Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и кибер. — 1983. — № 1. — С. 41–47.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
4. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
5. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
6. Шишкина Н. Б. О задаче преследования по позиции в дифференциальной игре со многими преследователями // Кибернетика. — 1987. — № 1. — С. 47–50.
7. Банников А. С., Петров Н. Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, №1. — С. 40–51.

Поступила в редакцию 30.09.10

A. S. Bannikov
About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers

We study a problem of positional capture of one evader by group of pursuers with equal dynamic and inertial capabilities of the players. Sufficient conditions for ε-capture on a finite interval of time are obtained.

Keywords: differential game, position control with guide.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Банников Александр Сергеевич, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: bannikov_a_s@mail.ru