МАТЕМАТИКА 2011. Вып. 1

УДК 517.925

© *Г. И. Вольфсон*

ЛОКАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СЕМЕЙСТВ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрена задача локальной параметрической идентифицируемости системы в случае, когда параметр принадлежит конечномерному семейству функций. Во введении даны основные определения и необходимые обозначения. В первой части работы получен критерий локальной идентифицируемости систем по наблюдениям точного решения. Во второй части рассмотрена задача локальной идентифицируемости по наблюдениям приближенного решения, полученного с помощью численной аппроксимации точного решения, а также получено достаточное условие локальной идентифицируемости системы в рамках рассмотренной задачи.

Ключевые слова: локальная идентифицируемость, системы дифференциальных уравнений.

Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,x,p), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что вектор-функция f, стоящая в правой части системы (1), непрерывна по совокупности переменных (t,x,p) и непрерывно дифференцируема по переменным (x,p) в области D пространства $\mathbb{R}^{1+n+m}$.

В изучаемой постановке задачи параметр p является непрерывной скалярной функцией от t, принадлежащей некоторому классу функций $\mathcal{P}$, определенных на фиксированном промежутке $[0,T]$. Введем обозначение $\{p\} = \{p(t) : t \in [0,T]\}$.

Фиксируем вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $x(t,\{p\})$ решение задачи Коши с начальными данными $(0,x_0)$ для системы (1), в которой зафиксирована функция $p \in \mathcal{P}$. Мы учитываем, что значение $x(t_0,\{p\})$ при $t_0 \in [0,T]$ зависит лишь от значений $p(t)$ при $t \in [0,t_0]$.

Наше основное предположение о классе $\mathcal{P}$ таково: для любой функции $p \in \mathcal{P}$ решение $x(t,\{p\})$ определено на всем промежутке $[0,T]$.

Для любой функции $q(t)$, $t \in [0,T]$, мы обозначаем $\|q\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} |q(t)|$.

Определение 1. Пусть $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$. Будем говорить, что пара (p_1,p_2) *различима* по наблюдению решения $x(t,\{p\})$ в точке T, если $x(T,\{p_1\}) \neq x(T,\{p_2\})$. В дальнейшем, для краткости будем говорить просто «пара (p_1,p_2) различима».

Отметим, что вектор x_0 предполагается фиксированным для всех рассматриваемых решений $x(t,\{p\})$. Фиксируем $p_0 \in \mathcal{P}$.

Определение 2. Система (1) называется *локально идентифицируемой* при $p_0 \in \mathcal{P}$, если существует такое $\epsilon > 0$, что если $p \in \mathcal{P}$ и $0 < \|p_0 - p\| < \epsilon$, то пара (p_0,p) различима.

Постановка вопроса о локальной идентифицируемости по наблюдениям решения на концах промежутка была исследована для различных классов $\mathcal{P}$. В монографии [1] исследование проводилось в том случае, когда функция p кусочно-постоянная на отрезке $[0,T]$. В статье [2] исследование проводилось для произвольного класса $\mathcal{P}$, при этом было приведено следующее достаточное условие локальной идентифицируемости исходной системы.

Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица линейной системы

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t,x(t,\{p_0\}),p_0)}{\partial x} y, \tag{2}$$

удовлетворяющая начальному условию $Y(0)=E$, где E — единичная $n\times n$-матрица.

Рассмотрим линейный функционал $\Psi:\mathcal{P}\to\mathbb{R}^n$, заданный равенством

$$\Psi(p)=\int_0^T Y^{-1}(s)\frac{\partial f}{\partial p}(s,x(s,\{p_0\}),p_0(s))p(s)ds, \tag{3}$$

и обозначим через $\mathcal{K}$ ядро функционала Ψ.

Определение 3. Будем говорить, что семейство $\mathcal{P}$ *нормированно отделено* от $\mathcal{K}$ в p_0, если из любой последовательности $p_k\in\mathcal{P}$ такой, что $\|p_k-p_0\|>0$ и $\|p_k-p_0\|\to 0$, $k\to\infty$, можно выбрать такую подпоследовательность p_{k_l}, что последовательность $\dfrac{p_{k_l}-p_0}{\|p_{k_l}-p_0\|}$ равномерно сходится на $[0,T]$ к некоторой функции, не принадлежащей $\mathcal{K}$.

Теорема [2]. *Если семейство $\mathcal{P}$ нормированно отделено от $\mathcal{K}$ в p_0, то система* (1) *локально идентифицируема при функции p_0.*

В данной статье будет рассмотрена задача о локальной идентифицируемости для специального класса параметр-функций $\mathcal{P}$. Фиксируем функцию $p_0(t)$ и конечный набор функций $p_1(t),\ldots,p_l(t)$. Рассмотрим семейство функций $\mathcal{P}$, заданное таким образом:

$$\mathcal{P}=\{p_0(t)+k_1p_1(t)+\cdots+k_lp_l(t)\},\quad k_1,\ldots,k_l\in\mathbb{R}.$$

Одной из возможных мотивировок такой постановки задачи о локальной идентифицируемости систем с переменным параметром является тот факт, что в инженерной практике очень часто при исследовании функций рассматривается их разложение, например, в ряд Фурье, а затем ведется исследование, ограничивающееся рассмотрением конечного количества членов ряда Фурье. Выбранная постановка задачи сводится к описанному выше случаю, если выбирается ровно l членов разложения функции-параметра.

§ 1. Условия локальной идентифицируемости по наблюдениям точных решений

Рассмотрим линейный функционал $\Psi:\mathcal{P}\to\mathbb{R}^n$, заданный формулой (3). Введем матрицу $[\Psi(p_1),\Psi(p_2),\ldots,\Psi(p_l)]$ размера $l\times n$.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{rank}[\Psi(p_1),\Psi(p_2),\ldots,\Psi(p_l)]=l$, *то система* (1) *локально идентифицируема при функции p_0.*

Доказательство. Предположим для любого $\varepsilon>0$ существует такая функция

$$\Delta p(t)=k_1p_1(t)+\cdots+k_lp_l(t),\ \text{где } |k_i|<\varepsilon,\ i\in[1,\ldots,l],\ \sum_{i=1}^{l}k_i^2\neq 0,$$

что пара $(p_0,p_0+\Delta p)$ неразличима, то есть

$$x(T,\{p_0\})=x(T,\{p\}), \tag{4}$$

где $p(t)=p_0(t)+\Delta p(t)$.

Введем обозначения $x(t,k_1,\ldots,k_l)=x(t,\{p_0+k_1p_1+\ldots+k_lp_l\})$, $k=(k_1,\ldots,k_l)$ и рассмотрим функции

$$z_i(t)=\left.\frac{\partial x(t,k_1,\ldots,k_l)}{\partial k_i}\right|_{k=0},\quad i\in[1,\ldots,l].$$

Из теоремы о дифференцируемости решения по параметру следует, что вектор-функции z_i удовлетворяют системам уравнений

$$\dot z_i=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t,0,\ldots,0),p_0(t))z_i+\frac{\partial f}{\partial p}(t,x(t,0,\ldots,0),p_0(t))p_i(t) \tag{5}$$

с начальными данными $z_i(0)=0$, $i\in[1,\ldots,l]$. Решениями дифференциальных уравнений (5) с указанными начальными условиями являются функции, определяемые равенствами

$$z_i(t)=Y(t)\int_0^t Y^{-1}(s)\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s,0,\ldots,0))p_i(s)ds,\quad i\in[1,\ldots,l].$$

Из этого равенства следует, что $z_i(T) = Y(T)\Psi(p_i)$.

Будем считать, что $|k|$ — стандартная евклидова норма вектора k. Таким образом, решение системы $x(t, k_1, \ldots, k_l)$ в точке $t = T$ может быть записано следующим образом:

$$x(T, k_1, \ldots, k_l) = x(T, 0, \ldots, 0) + Y(T)\left[k_1\Psi(p_1) + \ldots + k_l\Psi(p_l)\right] + \alpha(k_1, \ldots, k_l), \text{ где } \lim_{|k|\to 0}\frac{|\alpha|}{|k|} = 0.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям и перенося $x(T, 0, \ldots, 0)$ в левую часть, получаем:

$$x(T, \{p\}) - x(T, \{p_0\}) = Y(T)\left[k_1\Psi(p_1) + \ldots + k_l\Psi(p_l)\right] + \alpha(k_1, \ldots, k_l).$$

По предположению (4) левая часть последнего равенства равна нулю. Таким образом и правая часть равна нулю: $Y(T)\left[k_1\Psi(p_1) + \ldots + k_l\Psi(p_l)\right] + \alpha(k_1, \ldots, k_l) = 0$. Разделим это равенство на $|k|$ и заметим, что

$$Y(T)\left[\frac{k_1}{|k|}\Psi(p_1) + \ldots + \frac{k_l}{|k|}\Psi(p_l)\right] \to 0 \text{ при } |k| \to 0. \tag{6}$$

Так как $Y(T)$ — неособая матрица, то из (6) следует, что

$$\frac{k_1}{|k|}\Psi(p_1) + \ldots + \frac{k_l}{|k|}\Psi(p_l) \to 0 \text{ при } |k| \to 0.$$

Рассмотрим точки $y_k \in \mathbb{R}^l$ вида $(\frac{k_1}{|k|}, \ldots, \frac{k_l}{|k|})$. Заметим, что все они принадлежат единичной сфере пространства $\mathbb{R}^l$, откуда следует, что если мы устремим $|k|$ к нулю, то предельная точка последовательности y_k также будет принадлежать этой сфере (в силу ее компактности), а значит, будет ненулевой. Обозначим эту предельную точку через $(\kappa_1, \ldots, \kappa_l)$. Тогда

$$\kappa_1\Psi(p_1) + \ldots + \kappa_l\Psi(p_l) = 0.$$

Следовательно, $\Psi(p_1), \ldots, \Psi(p_l)$ линейно зависимы и поэтому $\operatorname{rank}[\Psi(p_1), \ldots, \Psi(p_l)] < l$, что противоречит условию теоремы. □

Рассмотрим другую постановку задачи. Пусть наблюдения решения происходят в N точках промежутка $[0; T]:\ T_0 = 0,\ T_1,\ \ldots,\ T_N = T$. В этом случае введем новое определение.

Определение 4. Пара (p_1, p_2) *различима по наблюдениям* решения $x(t, \{p\})$ в точках $T_1, \ldots, T_N$, если существует такой номер $i \in [1, \ldots, N]$, что $x(T_i, \{p_1\}) \neq x(T_i, \{p_2\})$.

Рассмотрим линейные функционалы $\Psi_i : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$, заданные формулами

$$\Psi_i(g) = \int_0^{T_i} Y^{-1}(s)\frac{\partial f}{\partial p}(s, x(s, \{p_0\}), p_0(s))g(s)ds,$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (2) с начальным условием $Y(0) = E$. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если существует такое* $i \in [1, \ldots, N]$, *что* $\operatorname{rank}[\Psi_i(p_1), \ldots, \Psi_i(p_l)] = l$, *то система* (1) *локально идентифицируема при* p_0 *по наблюдениям в точках* $T_1, \ldots, T_N$.

Доказательство. Пусть i — индекс, удовлетворяющий условию теоремы. Тогда по теореме 1 система (1) локально идентифицируема при p_0 на отрезке $[0, T_i]$. Следовательно, исходная система локально идентифицируема при p_0. □

Замечание. Если предположить, что на отрезках $[T_i, T_{i+1}]$, где $i \in [0, \ldots, N-1]$, функция $\Delta p(t)$ постоянна, то рассмотренная задача сводится к задаче, исследованной в монографии [1]. Легко видеть, что условие теоремы 1 о локальной идентифицируемости систем с кусочно-постоянным параметром из [1] является идентичным условию теоремы 2. Таким образом, теорема 1 из монографии [1] является прямым следствием теоремы 2 данной статьи.

§ 2. Условия локальной идентифицируемости по наблюдениям приближенных решений

Во второй части статьи будет рассмотрена аппроксимация исходной системы с помощью численных методов. Будет сформулировано достаточное условие локальной идентифицируемости системы (1) в рамках рассмотренной задачи.

Рассмотрим разбиение промежутка $[0,T]$ точками t_k, где $t_k = kh$, $h > 0$, $k \in \left[1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]\right]$. Число h будем называть шагом разбиения.

Определение 5. Пусть $\xi(t,t_0,z_0)$ — решение задачи Коши с начальными данными (t_0,z_0) для дифференциального уравнения

$$\dot z = F(t,z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Численным методом порядка q для уравнения (7) называется такое отображение

$$\varphi : (0,h_0] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

что для любой ограниченной области D, принадлежащей $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, существует такая константа $C(D)$, что для любой точки $(t_0,z_0) \in D$ выполнено неравенство

$$|\varphi(h,t_0,z_0) - \xi(h,t_0,z_0)| \leqslant C(D)h^{q+1}, \text{ где } h \in (0,h_0].$$

Известно, что если φ — численный метод порядка q, число T фиксировано и значения $\varphi(kh,t_0,z_0)$ лежат в области D' для любого $k \in \left[1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]\right]$, то глобальная погрешность численного метода φ имеет порядок на 1 меньше, чем локальная [3]. Иначе говоря, существует такое $C' = C'(D',T)$, что выполняется неравенство

$$|\varphi(kh,t_0,z_0) - \xi(kh,t_0,z_0)| \leqslant C'(D',T)h^q, \text{ где } h \in (0,h_0].$$

В изучаемой постановке задачи параметр p является непрерывной функцией от t, принадлежащей некоторому классу функций $\mathcal{P}$, определенных на фиксированном промежутке $[0,T]$. Фиксируем $p_0, p \in \mathcal{P}$. Фиксируем также $t_0 = 0$.

Пусть γ — численный метод порядка q, $q > 1$, применяемый к системе (1). Для краткости вместо $\gamma(kh,0,\{p\})$ будем писать $\gamma(kh,\{p\})$. Начальным условием для метода γ является условие $\gamma(0,\{p\}) = x_0$. В этом случае существует такая константа C_1, что верна оценка

$$|\gamma(kh,\{p\}) - x(kh,\{p\})| \leqslant C_1 h^q, \text{ где } k \in \left[1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]\right].$$

Для матриц будем использовать стандартную норму $\|A\| = \max\limits_{|x|=1}|Ax|$. Мы будем использовать упрощенную схему аппроксимации фундаментальной матрицы $Y(t)$ системы (2) с начальным условием $Y(0) = E$ на промежутке $[0,T]$, достаточную для наших целей.

Фиксируем шаг $h > 0$ и рассмотрим матрицы $\Gamma(k)$, $k = 0,1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]+1$, определенные равенствами $\Gamma(0) = E$, $\Gamma(k+1) = (E + \frac{\partial f}{\partial x}(kh,\gamma(kh,p_0),p_0(kh))h)\Gamma(k)$, где $k = 1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]$.

Таким образом, наша аппроксимация матрицы $Y(t)$ является применением к системе (2) аналога стандартного метода Эйлера. Несложно, но громоздко доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Существует такая положительная функция* $\Delta(h)$, *что*

$$\Delta(h) \to 0, \quad h \to 0, \tag{8}$$

и $\|Y(kh) - \Gamma(k)\| \leqslant \Delta(h)$, $k = 0,1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]+1$. *Также несложно показать, что в этом случае существует такая константа* C_2, *что верна следующая оценка*

$$\|\Gamma^{-1} - Y^{-1}\| \leqslant C_2\Delta(h). \tag{9}$$

Замечание. В настоящем пункте рассматривается дискретный вариант второй задачи, поставленной во втором пункте этой статьи. Как и во втором пункте, мы предполагаем, что наблюдения решения происходят в N точках промежутка $[0;T]:$ $T_0=0,$ $T_1,$ $\ldots,$ $T_N=T.$

Рассмотрим линейные функционалы $\Phi_i:\mathcal{P}\to\mathbb{R}^n,$ заданные формулами

$$\Phi_i(g)=h\sum_{j=0}^{\tau_i-1}\Gamma^{-1}(jh)\frac{\partial f}{\partial p}(jh,\gamma(jh,\{p_0\}),p_0(jh))g(jh),$$

где $\tau_i=\left[\frac{T_i}{h}\right].$

Теорема 3. *Если существует такой индекс* $i\in[1,\ldots,N],$ *что* $\operatorname{rank}[\Psi_i(p_1),\ldots,\Psi_i(p_l)]=l,$ *то существует такое* $h_1>0,$ *что* $\operatorname{rank}[\Phi_i(p_1),\ldots,\Phi_i(p_l)]=l$ *при* $h\in(0,h_1).$

Доказательство. Предположим противное: пусть для любого $h>0$ и для любого номера i $\operatorname{rank}[\Phi_i(p_1),\ldots,\Phi_i(p_l)]<l.$ Фиксируем $k\in[1,\ldots,l].$ Используя оценки (8), (9), несложно доказать следующую лемму.

Лемма 2. $|\Psi_i(p_k)-\Phi_i(p_k)|\to 0$ при $h\to 0.$

Рассмотрим минор M порядка l матрицы $[\Psi_i(p_1),\ldots,\Psi_i(p_l)],$ определитель которого не равен нулю (такой минор существует по условию теоремы 3). Рассмотрим также минор, соответствующий минору $M,$ в матрице $[\Phi_i(p_1),\ldots,\Phi_i(p_l)].$ По нашему предположению, определитель данного минора равен нулю, так как в противном случае ранг матрицы $[\Phi_i(p_1),\ldots,\Phi_i(p_l)]$ был бы равен $l.$

Из леммы 2 следует, что разность между соответствующими элементами выбранных миноров стремится к нулю при $h\to 0.$ С другой стороны, известно, что если соответствующие элементы двух матриц отличаются не более, чем на $\delta,$ то существует такое $C>0,$ зависящее от размеров матрицы, что определители матриц отличаются не более, чем на $C\delta.$ Тогда разность миноров также должна стремиться к нулю. Но $\det M\neq 0$ по предположению, следовательно, имеем противоречие. $\square$

Теорема 4. *Если существует такое* $\Delta>0,$ *что для любого* $h>0$ *найдется такое* $i\in\left[1,\ldots,\left[\frac{T}{h}\right]\right],$ *что* $\operatorname{rank}[\Phi_i(p_1),\ldots,\Phi_i(p_l)]=l,$ *причем определитель соответствующего ненулевого минора* M *порядка* l *удовлетворяет условию*

$$\det M\geqslant\Delta,$$

то $\operatorname{rank}[\Psi_i(p_1),\ldots,\Psi_i(p_l)]=l.$

Доказательство. Предположим противное, пусть $\operatorname{rank}[\Psi_i(p_1),\ldots,\Psi_i(p_l)]<l.$ Рассмотрим минор M порядка l матрицы $[\Phi_i(p_1),\ldots,\Phi_i(p_l)]$ из условия теоремы. Пусть $\widetilde{M}$ — соответствующий ему минор порядка l матрицы $[\Psi_i(p_1),\ldots,\Psi_i(p_l)].$ По предположению $\det\widetilde{M}=0.$ Следовательно,

$$\det M-\det\widetilde{M}=\det M\geqslant\Delta. \tag{10}$$

В силу леммы 2 разность элементов, стоящих на одинаковых местах в выбранных минорах, стремится к нулю при $h\to 0.$ Рассмотрим такую функцию $z(h),$ что разность соответствующих элементов в минорах не превосходит $z(h),$ а сама функция z стремится к нулю при $h\to 0.$

Тогда найдется такая константа $C,$ что верна следующая оценка разности определителей:

$$|\det M-\det\widetilde{M}|\leqslant Cz(h). \tag{11}$$

Рассмотрим столь малое $h,$ при котором число $z(h)$ будет удовлетворять неравенству

$$z(h)<\frac{\Delta}{C}. \tag{12}$$

Тогда из оценок (10), (11) и (12) следует, что

$$|\det M-\det\widetilde{M}|\leqslant Cz<\frac{\Delta}{C}C=\Delta\leqslant|\det M-\det\widetilde{M}|.$$

Полученное противоречие доказывает теорему 4. □

Из доказанных выше теорем следует достаточное условие локальной идентифицируемости системы (1) с заданными начальными данными.

Теорема 5. *Если существует такое* $\Delta > 0$, *что для любого* $h > 0$ *найдется такое* $i \in \left[1, \ldots, \left[\frac{T}{h}\right]\right]$, *что* $\mathrm{rank}[\Phi_i(p_1), \ldots, \Phi_i(p_l)] = l$, *причем определитель соответствующего ненулевого минора* M *порядка* l *удовлетворяет условию* $\det M \geqslant \Delta$, *то система* (1) *локально идентифицируема при функции* p_0.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $\mathrm{rank}[\Psi_i(p_1), \ldots, \Psi_i(p_l)] = l$. Из этого условия в силу теоремы 2 следует, что система (1) локально идентифицируема при функции p_0. □

* * *

1. Бодунов Н. А. Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости. — СПб.: Изд-во С-Петерб. ун-та, 2006. — 140 с.

2. Бодунов Н. А., Вольфсон Г. И. Локальная идентифицируемость систем с переменным параметром // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2009. — Вып. 2. — С. 1–15. `http://www.math.spbu.ru/diffjournal/j/RU/numbers/2009.2/article.92.html`

3. Волков Е. А. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 130 с.

Поступила в редакцию 14.10.10

G. I. Volfson

Local parametric identifiability for system with finite family of parameters

The problem of local parametric identifiability of system in case of finite parameter family was investigated. In introduction the main definitions and necessary denotations are given. In the first part the criterion of local parametric identifiability of systems in case of observation of the accurate solution was obtained. In the the second part the problem of local parametric identifiability of systems was investigated in case of observation of the approximated solution, derived by numerical approximation of the accurate solution. The criterion of local parametric identifiability of systems in this case was obtained also.

Keywords: local identifiability, systems of differential equations.

Mathematical Subject Classifications: 93B30, 93D25

Вольфсон Георгий Игоревич, кафедра ВМ-1, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, 197376, Россия, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5,
E-mail: georgij.volfson@gmail.com