

УДК 517.962.24

© В. А. Густомесов

**ИЗУЧЕНИЕ ИТЕРАЦИЙ КУБИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПОЗИЦИИ  
ЛИНЕЙНОЙ СОПРЯЖЁННОСТИ**

Для исследования вещественных кубических отображений применён аппарат линейной сопряжённости. Предложена программа изучения циклов отображений, связанная с построением линий постоянства мультипликаторов на полуплоскостях существенных параметров. Изучены циклы небольших периодов: 1- и 2-циклы, а также — менее подробно — 3-циклы.

*Ключевые слова:* кубическое отображение, линейная сопряжённость, линия мультипликаторов циклов, множество устойчивости циклов.

**Введение**

Рассматривается вещественное разностное уравнение (РУ) первого порядка

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

с кубической функцией последования

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0) \quad (2)$$

или, более кратко, кубическое отображение  $f$ .

Теория одномерных отображений  $f$  в последние десятилетия стремительно развивается [1, 2]. Большое внимание уделяется нелинейным полиномиальным отображениям, когда  $f$  — многочлен степени, большей 1. Квадратичные отображения достаточно изучены [1]. Исследованию кубических отображений посвящён ряд публикаций, см., напр., [3–6]. В них, в основном, рассмотрены различные однопараметрические семейства кубических отображений, особое внимание уделено хаотическим режимам. Статьи [7, 8] содержат результаты компьютерного счёта.

В настоящей статье проводится аналитическое исследование кубических отображений с применением аппарата линейной сопряжённости [9]. Выделены существенные параметры кубического отображения как инварианты отношения линейной сопряжённости. Предложена программа изучения  $k$ -циклов отображений ( $k \in \mathbb{N}$  — период цикла), связанная с анализом линий (постоянства) мультипликаторов циклов на полуплоскостях существенных параметров. Для нахождения уравнений линий мультипликаторов при  $k > 1$  предлагается переход к  $k$ -циклу простого вида (нормированному циклу).

С ростом  $k$  исследование  $k$ -циклов усложняется. В настоящей работе изучены 1- и 2-циклы; менее подробно — 3-циклы.

Серия работ ([10–13] и др.), связанных с тематикой статьи, стала известна автору лишь на этапе её оформления. В названных работах с использованием аналитических и численных методов выявлен ряд важных свойств комплексных и вещественных кубических отображений. Преимущественное внимание в них уделено комплексному случаю, основополагающие результаты относительно вещественных кубических отображений содержатся в статье Дж. Милнора [12]. Наряду с линейной (аффинной) сопряжённостью в этих работах применяется аппарат топологической энтропии, изучаются решения, проходящие через критические точки отображений. В нашей статье названные подходы не используются. Связь результатов работы [12] с результатами настоящей статьи обсуждается далее в замечаниях.

Основные результаты статьи анонсированы в [14].

## § 2. Линейно сопряжённые кубические многочлены

При анализе разностного уравнения (1) бывает полезен переход к РУ с функцией последования  $g$ , топологически сопряжённой функции  $f$  посредством гомеоморфизма  $h$ , то есть такой, что  $h \circ f = g \circ h$ . Тогда будем писать  $g \stackrel{h}{\simeq} f^1$ . В случае топологической сопряжённости при любом натуральном  $n$   $g_n \stackrel{h}{\simeq} f_n$ , здесь  $f_n, g_n$  —  $n$ -е итерации функций  $f, g$ . Поэтому решению  $\{f_n(x)\}$  разностного уравнения (1), исходящему из точки  $x$ , соответствует (точнее,  $h$ -соответствует) решение  $\{g_n(h(x))\}$  другого РУ, исходящее из точки  $h(x)$ . Топологические свойства  $h$ -соответствующих решений одинаковы. Сами РУ с функциями последования  $f, g$  называют топологически сопряжёнными.

Имеет смысл применять аппарат топологической сопряжённости для классификации разностных уравнений с функциями последования выбранного класса. Целесообразно в таких целях применять линейные сопрягающие функции

$$h(x) = \varkappa x + \lambda \quad (\varkappa \neq 0).$$

В этом случае будем говорить о линейной сопряжённости. При  $\varkappa > 0$  ориентация на прямой сохраняется ( $x_1 < x_2$  влечет  $h(x_1) < h(x_2)$ ), а при  $\varkappa < 0$  — меняется на противоположную ( $h(x_1) > h(x_2)$ ). Производные линейно сопряжённых функций в  $h$ -соответствующих точках равны:  $f'(x) = g'(h(x))$ .

Разобьём множество  $A$  кубических многочленов (2) на такие классы эквивалентности, что многочлены, входящие в один класс, линейно сопряжены между собой, и выявим инварианты отношения линейной сопряжённости.

График любого кубического многочлена  $f$  имеет одну точку перегиба  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ , являющуюся также и центром симметрии графика. Здесь  $\tilde{x} = -b/(3a)$ . Поведение функции  $f$  в точке  $\tilde{x}$  играет ключевую роль. Введем числовые характеристики функции, связанные с точкой  $\tilde{x}$ :

$$u = f'(\tilde{x}) = c - \frac{b^2}{3a}, \quad (3)$$

$$\Lambda = f(\tilde{x}) - \tilde{x} = \frac{1}{27a^2} (2b^3 + 9ab(1-c) + 27a^2d).$$

Заметим, что  $\Lambda$  определяет отклонение точки перегиба от биссектрисы  $y = x$  вдоль прямой  $x = \tilde{x}$ ; если  $\Lambda = 0$ , то  $\tilde{x}$  — неподвижная точка (НТ) отображения  $f$ .

Потребуем, чтобы многочлены  $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$  ( $i = 1, 2$ ) были линейно сопряжены. Символами  $u_i, \Lambda_i$  обозначим значения величин  $u, \Lambda$  соответственно для функций  $f_i$ .

Приравнивая у многочленов  $h \circ f_1, f_2 \circ h$  коэффициенты при  $x^3, x^2, x^1, x^0$  и, если нужно, разделив их на  $\varkappa$ , приходим к соотношениям

$$(a) \ a_1 = \varkappa^2 a_2; \quad (b) \ b_1 = \varkappa(3a_2 \lambda + b_2); \quad (c) \ c_1 = 3a_2 \lambda^2 + 2b_2 \lambda + c_2; \quad (d) \ \varkappa d_1 + \lambda = f_2(\lambda). \quad (4)$$

Равенство (4a) записывается в виде

$$\varkappa^2 = a_1/a_2, \quad (5)$$

откуда

$$\varkappa = \pm \sqrt{a_1/a_2}. \quad (6)$$

Кубические многочлены могут быть линейно сопряжёнными лишь в случае  $a_1 a_2 > 0$ . Таким образом,

$$s = \operatorname{sgn} a \quad (7)$$

<sup>1</sup>Предполагаем, что функции  $f, g$  определены на числовой прямой.

— двузначный инвариант отношения линейной сопряжённости. Поэтому отдельно будем рассматривать множества

$$A_1 = \{f(x) \in A \mid a > 0\}, \quad A_{-1} = \{f(x) \in A \mid a < 0\}.$$

Из формулы (4b) находим

$$\lambda = \frac{b_1 \varkappa^{-1} - b_2}{3a_2}. \quad (8)$$

Преобразуем равенство (4c), используя (5) и (8):

$$c_1 = \frac{(b_1 \varkappa^{-1} - b_2)^2}{3a_2} + 2b_2 \frac{b_1 \varkappa^{-1} - b_2}{3a_2} + c_2, \quad 3c_1 a_2 = b_1^2 \frac{a_2}{a_1} - b_2^2 + 3a_2 c_2, \\ u_1 = u_2. \quad (9)$$

Таким образом,  $u$  – инвариант отношения линейной сопряжённости.

Учитывая (8)–(9), преобразуем соотношение (4d):

$$a_2 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 - (1 - c_2) \lambda + d_2 - d_1 \varkappa = 0, \quad \varkappa a_2 \Lambda_2 = a_1 \Lambda_1.$$

Перейдем к равенству модулей:

$$\sqrt{|a_1|/|a_2|} \cdot |a_2 \Lambda_2| = |a_1 \Lambda_1|, \quad |\Lambda_1| \sqrt{|a_1|} = |\Lambda_2| \sqrt{|a_2|}.$$

Тем самым найден инвариант

$$v = |\Lambda| \sqrt{|a|} \quad (10)$$

отношения линейной сопряжённости.

Кубические многочлены линейно сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые значения существенных параметров  $s, u, v$  ( $s \in \{\pm 1\}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \geq 0$ ). При этом существуют две линейные сопрягающие функции  $h$  с коэффициентами (6), (8).

Обозначим через  $A_1(u, v)$  ( $A_{-1}(u, v)$ ) класс функций из  $A_1$  ( $A_{-1}$ ) с фиксированными значениями параметров  $u, v$ . Каждый класс  $A_s(u, v)$  непуст, поскольку содержит нормальную форму класса – функцию

$$\widehat{f}(x) = sx^3 + ux + v.$$

Принципиально важно, однако, что при изучении разных свойств отображения  $f$  целесообразно работать с различными представителями класса  $A_s(u, v)$ .

Для исследования кубического отображения  $f$  удобно, фиксируя определённое значение параметра  $s \in \{\pm 1\}$ , выбираемую пару значений  $(u, v)$  остальных параметров трактовать как точку верхней полуплоскости  $P^s = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$ . В обозначениях полуплоскостей и их подмножеств символ  $s$  будем записывать верхним индексом.

Поставим задачу изучения  $k$ -циклов отображения  $f \in A$ , определяемых периодическими решениями с наименьшим периодом  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Произвольное вещественное отображение  $f$  имеет  $k$ -цикл

$$C_k = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(x_0) = x_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_{k-2}) = x_{k-1}, \\ f(x_{k-1}) = x_0. \end{cases} \quad (11)$$

Все точки  $x_i$   $k$ -цикла  $C_k$  являются неподвижными точками отображения  $f_k$ , то есть вещественными корнями уравнения  $f_k(x) - x = 0$ .

Важно выделять устойчивые циклы. Устойчивость  $k$ -цикла  $C_k$  означает локальную сходимость решений к циклу:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x : |x - x_0| < \varepsilon \forall i \in \overline{0, k-1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{kn+i}(x) = x_i. \tag{12}$$

Если равенство в (12) справедливо для решений, начинающихся в какой-то полуокрестности точки  $x_0$ , то говорят о полуустойчивом  $k$ -цикле. Условие устойчивости  $k$ -цикла  $C_k : |\mu(C_k)| < 1$ , условие его неустойчивости:  $|\mu(C_k)| > 1$ . Здесь  $\mu(C_k)$  — мультипликатор цикла

$$\mu(C_k) = f'_k(x_0) = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_{k-1}).$$

Пусть снова  $f$  — кубическое отображение. Тогда  $f_k$  — многочлен степени  $3^k$  со старшим коэффициентом  $a^{(3^k-1)/2}$ .

При  $k > 1$  многочлен  $f_k(x) - x$ , помимо точек  $k$ -циклов, содержит также и лишние вещественные корни, являющиеся точками более коротких  $m$ -циклов,  $m \in E_k$ . Здесь  $E_k$  — множество делителей натурального числа  $k$ , меньших  $k$ . Удобно выделить многочлен  $F_k(x)$ , вещественные корни которого являются точками лишь  $k$ -циклов. Такие многочлены определяются рекуррентно соотношениями

$$F_1(x) = f(x) - x, \quad F_k(x) = \frac{f_k(x) - x}{\prod_{i \in E_k} F_i(x)} \quad (k > 1)$$

(числитель последнего равенства без остатка делится на его знаменатель). Поэтому степени  $e_k$  многочленов  $F_k$  задаются соотношениями

$$e_1 = 3, \quad e_k = 3^k - \sum_{i \in E_i} e_i \quad (k > 1)$$

[15, с. 100] (в указанной работе  $f$  — многочлен произвольной степени, большей 1). Любое число  $e_k$  кратно  $k$ . Тогда  $p_k = e_k/k$  — *максимально возможное число  $k$ -циклов* отображения  $f$ . При небольших  $k$  числа  $p_k$  представлены в таблице.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_k$	3	3	8	18	48	116	312	810	2184	5880

Если отображение  $f \in A_s(u, v)$  имеет  $k$ -цикл  $C_k$ , то любое отображение  $g, g \stackrel{h}{\simeq} f$  класса  $A_s(u, v)$  имеет  $k$ -цикл  $h(C_k) = (h(x_0), h(x_1), \dots, h(x_{k-1}))$ , причем  $\mu(C_k) = \mu(h(C_k))$ .

В зависимости от значений параметров  $s, u, v$ , отображение  $f$  содержит различное число циклов. Периоды имеющихся циклов связаны теоремой Шарковского [1, с. 52]. Любое кубическое отображение содержит хотя бы один 1-цикл, поскольку многочлен нечетной степени  $f(x) - x$  имеет вещественный корень.

В настоящей работе выделение и исследование циклов фиксированного периода  $k$  основано на изучении однопараметрических (с параметром  $t \in \mathbb{R}$ ) семейств линий мультипликаторов  $k$ -циклов  $\{\mu_{tk}^s\} \subset P^s$ . Линия мультипликаторов  $\mu_{tk}^s$  образована такими точками  $(u, v) \in P^s$ , что функции  $f \in A_s(u, v)$  имеют  $k$ -цикл с мультипликатором  $t$ .

Введем, далее, множества (ареалы)  $k$ -циклов  $D_k^s$  и множества устойчивости  $k$ -циклов  $G_k^s$ :

$$D_k^s = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mu_{tk}^s, \quad G_k^s = \bigcup_{|t| < 1} \mu_{tk}^s.$$

Отображение  $f \in A_s(u, v)$  при  $(u, v) \in D_k^s$  обладает  $k$ -циклом, а при  $(u, v) \in G_k^s$  — устойчивым  $k$ -циклом.

Из теоремы Шарковского следует, что  $D_1^s \supset D_2^s \supset D_4^s \supset D_8^s \supset \dots \supset D_3^s$ . Так как 1-циклы всегда существуют, то  $D_1^s = P^s$ .

Каждое множество  $D_k^s$  разбивается на подмножества с разным общим числом  $k$ -циклов

$$D_k^s = \bigcup_{m=1}^{p_k} D_{km}^s. \tag{13}$$

Отображение  $f$  при  $(u, v) \in D_{km}^s$  имеет в точности  $m$  различных  $k$ -циклов.

Известно [1, с. 101], что кубическое отображение может содержать не более двух устойчивых или полуустойчивых циклов. Важно выделять на полуплоскостях  $P^s$  множества бистабильности  $B_{ij}^s = G_i^s \cap G_j^s$ , отвечающие устойчивым  $i$ - и  $j$ -циклу.

Укажем общую схему нахождения линий мультипликаторов  $k$ -циклов при  $k > 1$ , связанную с переходом к нормированным циклам.

Пусть отображение  $f \in A_s(u, v)$  имеет  $k$ -цикл  $C_k$  с наименьшей точкой  $x_0$ . Требование, чтобы этот цикл действительно наблюдался и имел мультипликатор  $t$ , приводит к системе (11), к которой присоединено уравнение

$$f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_{k-1}) = t. \tag{14}$$

Для выделения линий  $\mu_{ik}^s$  необходимо из системы (11), (14) исключить точки цикла  $x_i$ , найти коэффициенты отображения  $f$ , а затем воспользоваться формулами (7), (3), (10). Однако первый этап названной процедуры является сложной задачей и требует корректировки. Переход к нормальной форме  $\widehat{f} \in A_s(u, v)$  неэффективен. Целесообразно упростить сам  $k$ -цикл  $C_k$ . Существует функция  $\overline{f}, \overline{f} \stackrel{h}{\simeq} f$ , имеющая нормированный  $k$ -цикл

$$N_k = (0, z_1, \dots, z_{k-2}, 1)$$

с наименьшей точкой 0. При этом  $N_k = h(C_k)$ , функция  $h$  определяется из условий  $h(x_0) = 0, h(x_{k-1}) = 1$ . Числа  $z_1, \dots, z_{k-2}$  ( $k \geq 3$ ) назовем метками цикла  $N_k$ . Они являются инвариантами отношения линейной сопряженности, характеризующими тип  $k$ -цикла [1, с. 58].

Без умаления общности будем полагать, что уже исходная функция  $f$  содержит нормированный  $k$ -цикл  $N_k$ . Тогда система (11) и уравнение (14) упрощаются:

$$\begin{cases} f(0) = z_1, \\ \dots\dots\dots \\ f(z_{k-2}) = 1, \\ f(1) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$f'(0) \cdot f'(z_1) \cdot \dots \cdot f'(z_{k-2}) \cdot f'(1) = t. \tag{16}$$

Особенностью семейств линий мультипликаторов является их асимптотическое поведение. При изучении асимптотики будем исходить из следующего определения. Пусть параметрически заданная плоская кривая  $\gamma : x = X(a), y = Y(a), a \in I$  имеет бесконечную ветвь при  $a \rightarrow a_0$ . Будем говорить, что кривая  $\gamma$  (или её названная ветвь) асимптотически стремится при  $a \rightarrow a_0$  к плоской кривой  $\Gamma : y = g(x)$ , и писать  $\gamma \sim \Gamma (a \rightarrow a_0)$ , если  $\lim_{a \rightarrow a_0} (Y(a) - g(X(a))) = 0$ . При этом функция  $Y(a) - g(X(a)), a \in I$  характеризует взаимное расположение кривых  $\gamma, \Gamma$ . Если кривая  $\gamma$  задана явным уравнением, то определение очевидным образом упрощается.

Линии мультипликаторов 1-, 2- и 3-циклов будем обозначать для краткости символами  $\alpha_t^s, \beta_t^s, \gamma_t^s$  соответственно.

Укажем некоторые общие свойства кубических отображений.

Решения любого отображения  $f \in A$ , начинающиеся достаточно далеко от 0, неограничены. Действительно, пусть  $q = 1$  при  $a > 0, q = 2$  при  $a < 0, x_\star$  и  $x^\star$  – наименьшая и наибольшая неподвижные точки отображения  $f_q (x_\star \leq x^\star)$ . Так как старший коэффициент многочлена нечетной степени  $f_q(x) - x$  положителен, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_q(x) - x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_q(x) - x) = +\infty.$$

Поэтому

$$f_q(x) - x < 0 \text{ при } x \in I_* = (-\infty, x_*), \quad f_q(x) - x > 0 \text{ при } x \in I^* = (x^*, +\infty),$$

откуда следует, что  $I_*$ ,  $I^*$  — инвариантные промежутки отображения  $f_q$ . Но тогда

$$(a) \quad \forall x \in I_* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{qn}(x) = -\infty; \quad (b) \quad \forall x \in I^* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{qn}(x) = +\infty. \quad (17)$$

Проверим, например, (17a). Зафиксируем  $x \in I_*$ . Последовательность  $\{f_{qn}(x)\}$  (строго) убывает и имеет при  $n \rightarrow \infty$  предел  $\nu < x$ . Если  $\nu \in \mathbb{R}$ , то  $\nu$  — неподвижная точка отображения  $f_q$ , что невозможно. Поэтому  $\nu = -\infty$ .

Особо выделим случай

$$x_* = x^*. \quad (18)$$

Из (17) следует, что в случае (18) все решения  $\{f_n(x)\}$  отображения  $f$  при  $x \neq x_*$  уходят в бесконечность. Если  $s = 1$  ( $s = -1$ ), то названные решения монотонны (обладают колебательным характером). Такое отображение  $f$  будем называть *расходящимся*. Случай (18) реализуется тогда и только тогда, когда отображение  $f$  не содержит 2-циклов и имеет единственную НТ  $x_*$ . Поэтому множества расходимости  $\hat{P}^s$  отображения  $f$  определяются следующим образом:

$$\hat{P}^s = D_{11}^s \setminus D_2^s. \quad (19)$$

Прямая  $u = 0$  разбивает полуплоскости  $P^s$  на два множества

$$s \cdot u \geq 0, \quad (20)$$

$$s \cdot u < 0 \quad (21)$$

с качественно различным поведением отображений  $f$ .

В случае (20) отображение  $f$  обратимо, поскольку монотонно: возрастает при  $s = 1$  и убывает при  $s = -1$ . Первая ситуация рассмотрена в конце § 2. Если же справедливо неравенство (21), то отображение  $f$  необратимо. Оно бимодально, то есть имеет два экстремума. Поведение решений может быть чрезвычайно разнообразным, включая хаотические режимы.

**Замечание 1.** В работе [12] выбрана следующая нормальная форма кубических многочленов:

$$sx^3 - 3Ax + \sqrt{|B|}.$$

Предполагается, что  $B \geq 0$  ( $B < 0$ ) при  $s = 1$  ( $s = -1$ ). Поэтому обе полуплоскости существенных параметров  $A, B$ , отвечающие случаям  $s = \pm 1$ , не пересекаются и изображаются на одном экземпляре плоскости  $(A, B)$ . Зависимость между соответствующими парами параметров  $u$  и  $A$ ,  $v$  и  $B$  в обоих случаях взаимно однозначна:  $u = -3A$ ,  $v = \sqrt{|B|}$ .

## § 2. Неподвижные точки

При изучении неподвижных точек (1-циклов) кубических отображений выберем произвольную функцию  $f \in A_s(u, v)$ , но запишем ее в виде многочлена относительно  $x - \tilde{x}$ :

$$f(x) = a(x - \tilde{x})^3 + u(x - \tilde{x}) + \Lambda + \tilde{x}.$$

Напомним, что  $D_1^s = P^s$ . Разбиение  $P^s = \bigcup_{m=1}^3 D_{1m}^s$  полуплоскостей  $P^s$  на множества существования  $m$  различных неподвижных точек  $D_{1m}^s$  (см. (13)) происходит в соответствии с теорией Кардано [16, с. 235]. Уравнение  $f(x) - x = 0$  преобразуется так:

$$(x - \tilde{x})^3 + \frac{u-1}{a}(x - \tilde{x}) + \frac{\Lambda}{a} = 0. \quad (22)$$

Число неподвижных точек совпадает с числом вещественных корней уравнения (22) и определяется дискриминантом этого уравнения

$$D_s(u, v) = -4 \left( \frac{u-1}{a} \right)^3 - 27 \left( \frac{\Lambda}{a} \right)^2 = \frac{1}{a^3} (4(1-u)^3 - 27sv^2).$$

Условие  $D_s(u, v) = 0$  задает на каждой полуплоскости  $P^s$  полукубическую параболу

$$\alpha^s : v = \frac{2}{\sqrt{27}} \cdot \sqrt{s(1-u)^3}.$$

При  $D_s(u, v) < 0$  отображение имеет одну НТ, при  $D_s(u, v) > 0$  — три различные НТ. Если же  $D_s(u, v) = 0$ , то у уравнения (22) наблюдаются кратные корни, существует или одна, или две различные НТ функции  $f$ , причем первая ситуация реализуется лишь в случае  $u = 1, v = 0$ . Поэтому

$$D_{11}^s = \{D_s(u, v) < 0\} \cup \{(1, 0)\}, D_{12}^s = \alpha^s \setminus \{(1, 0)\}, D_{13}^s = \{D_s(u, v) > 0\}.$$

Найдем линии мультипликаторов 1-циклов  $\alpha_t^s$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), исключая  $x$  из системы

$$\begin{cases} f(x) = x, \\ f'(x) = t. \end{cases}$$

Она приводится к виду

$$\begin{cases} a(x - \tilde{x})^3 + (u-1)(x - \tilde{x}) = -\Lambda, \\ 3a(x - \tilde{x})^2 + u = t. \end{cases} \quad (23)$$

Второе уравнение системы (23) запишется следующим образом:  $3|a|(x - \tilde{x})^2 = s(t - u)$ . Следовательно,

$$s(t - u) \geq 0. \quad (24)$$

Преобразуем теперь первое уравнение системы (23):

$$|x - \tilde{x}| \cdot |a(x - \tilde{x})^2 + u - 1| = |\Lambda|, \quad \frac{\sqrt{s(t-u)}}{\sqrt{3|a|}} \cdot \left| \frac{t-u}{3} + u - 1 \right| = \frac{v}{\sqrt{|a|}}.$$

Поэтому

$$\alpha_t^s : v = \frac{2}{\sqrt{27}} \sqrt{s(t-u)} \cdot |u - u_0|,$$

где  $u_0 = (3-t)/2$ .

Линия  $\alpha_t^s$  — график функции, которую обозначим через  $\alpha_t^s(u)^2$ . Эта функция определена на множестве (24). Так как  $\alpha^s = \alpha_1^s$ , то линия  $\alpha^s$  отвечает 1-циклам с единичным мультипликатором.

При  $s = 1$  и  $s = -1$  наблюдаем различные семейства линий мультипликаторов  $\{\alpha_t^s\} \subset P^s$  (рис. 1–2). Однако эти семейства связаны равенством

$$\alpha_t^1(u) = \alpha_{2-t}^{-1}(2-u). \quad (25)$$

Поэтому полуплоскость  $P^{-1}$  с семейством  $\{\alpha_t^{-1}\}$  получается движением полуплоскости  $P^1$  с семейством  $\{\alpha_t^1\}$ , сопровождающимся изменением параметра линий по закону  $2-t \rightarrow t$ .

Для исследования семейств  $\{\alpha_t^s\}$  найдем (при  $u \neq u_0, u \neq t$ )

$$\frac{d\alpha_t^s(u)}{du} = -\frac{s \cdot \operatorname{sgn}(u - u_0)(u - u_m)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{s(t-u)}}, \quad (26)$$

<sup>2</sup>Аналогичные обозначения будут и далее.

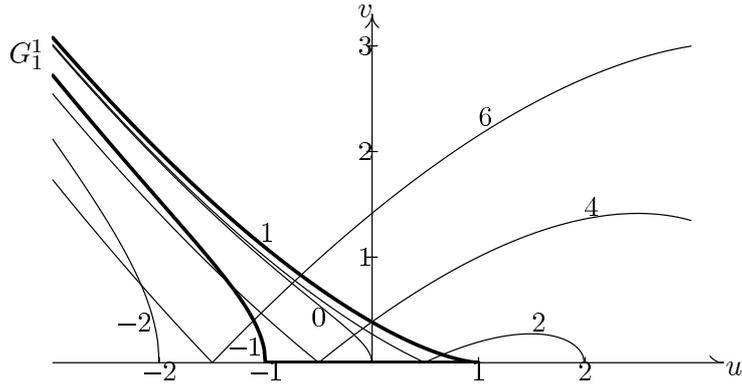


Рис. 1. Линии мультипликаторов  $\alpha_t^1$

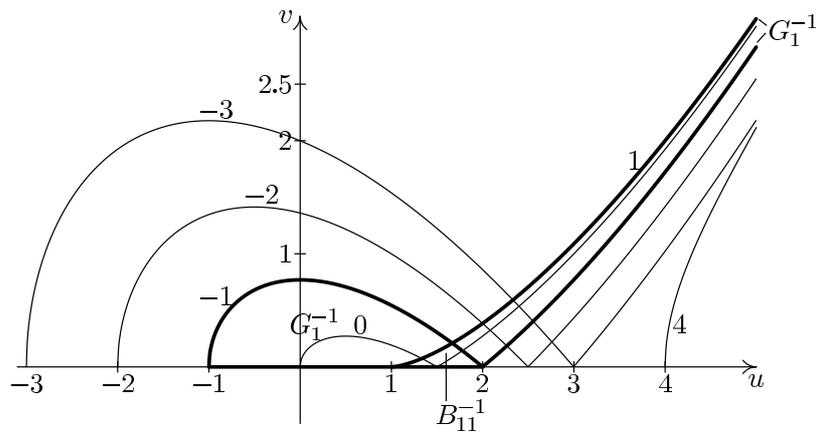


Рис. 2. Линии мультипликаторов  $\alpha_t^{-1}$

$$\frac{\partial \alpha_t^s(u)}{\partial t} = \frac{s \cdot \operatorname{sgn}(u - u_0)(t - 1)}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{s(t - u)}}. \tag{27}$$

Здесь  $u_m = (t + 1)/2$ .

Кривые каждого семейства  $\{\alpha_t^s\}$  подразделяются на простые и сложные.

Простая кривая пересекает ось  $Ou$  лишь в одной, граничной точке  $(t, 0)$ . Сложная кривая пересекается с осью ещё и в угловой точке  $(u_0, 0)$ . Эта точка разделяет кривую на две гладкие ветви – ограниченную и неограниченную. Кривая  $\alpha_t^s$  сложна тогда и только тогда, когда

$$s(t - 1) > 0. \tag{28}$$

Как вытекает из формулы (26), простые кривые и неограниченные ветви сложных кривых – графики монотонных функций: убывающих при  $s = 1$  и возрастающих при  $s = -1$ . Каждая ограниченная ветвь сложной кривой – график немонотонной функции с точкой локального максимума  $u_m$ .

Линии семейства  $\{\alpha_t^1\}$  ( $\{\alpha_t^{-1}\}$ ) при  $u \rightarrow -\infty$  ( $u \rightarrow +\infty$ ) асимптотически стремятся к кривой  $\alpha^1$  ( $\alpha^{-1}$ ):

$$(a) \quad \alpha_t^1 \sim \alpha^1 (u \rightarrow -\infty); \quad (b) \quad \alpha_t^{-1} \sim \alpha^{-1} (u \rightarrow +\infty). \tag{29}$$

Из формулы (25) следует, что достаточно проверить соотношение (29a). Рассмотрим разность

$$\Delta_t(u) = \alpha_t^1(u) - \alpha^1(u) = \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \frac{(t - 1)^2(3u - 4 + t)}{2\sqrt{(1 - u)^3 + \sqrt{(t - u)(2u + t - 3)^2}}}. \tag{30}$$

Поскольку числитель последней дроби в (30) – многочлен первой степени относительно  $u$ , а подкоренные выражения в её знаменателе суть многочлены третьей степени, то  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \Delta_t(u) = 0$ , что и означает справедливость (29a).

Простые кривые и левые ветви сложных кривых семейства  $\{\alpha_t^1\}$  располагаются ниже асимптотической кривой  $\alpha^1$ , так как вдоль них  $u < (4-t)/3$  и  $\Delta_t(u) < 0$ . Аналогично, простые кривые и правые ветви сложных кривых семейства  $\{\alpha_t^{-1}\}$  располагаются ниже асимптотической линии  $\alpha^{-1}$ .

Разобьём множества линий мультипликаторов 1-циклов  $\{\alpha_t^s\}$  на три класса кривых: простые кривые, неограниченные ветви сложных кривых, ограниченные ветви сложных кривых. Из формулы (27) вытекает, что *различные кривые каждого класса не пересекаются*. Поэтому пересечение нескольких линий мультипликаторов в некоторой точке полуплоскости  $P^s$  возможно лишь за счёт того, что пересекаются ветви этих линий различных классов.

Опишем топографию множеств устойчивости 1-циклов  $G_1^1, G_1^{-1}$ .

Кривые  $\alpha_t^1$  являются сложными тогда и только тогда, когда  $t > 1$ . Множество  $G_1^1$  образовано попарно непересекающимися простыми кривыми, причём  $G_1^1 \subset D_{13}^1$ . Поэтому кубическое отображение  $f \in A_1$  может содержать лишь одну устойчивую НТ, а остальные НТ имеют мультипликаторы, большие 1. Следовательно, не существует множества бистабильности  $B_{11}^1$ . Если же неподвижная точка отображения  $f \in A_1$  единственна, то она неустойчива.

Множество  $G_1^{-1}$  состоит из сложных кривых. Их левые ветви образуют множество, расположенное внутри левой ветви кривой  $\alpha_{-1}^{-1}$  и ограниченное снизу интервалом  $(-1, 2)$  оси  $Ou$ . Аналогично, правые ветви кривых образуют множество, расположенное между кривой  $\alpha^{-1}$  и правой ветвью кривой  $\alpha_{-1}^{-1}$ , снизу оно ограничено интервалом  $(1, 2)$  оси  $Ou$ . Пересечение этих двух множеств определяет множество бистабильности  $B_{11}^{-1} \subset D_{13}^{-1}$ .

Каждое из множеств  $G_1^s$  имеет характерный бесконечный утончающийся язык, примыкающий снизу к асимптотической линии  $\alpha^s$ .

Опишем поведение решений отображения  $f$  при  $s = 1, u \geq 0$ . В этом случае отображение возрастает, содержит лишь 1-циклы, все его нестационарные решения монотонны и либо а) притягиваются к устойчивой НТ, либо б) уходят в бесконечность.

Если  $(u, v) \in D_{11}^1$ , то отображение  $f$  имеет одну, причем неустойчивую НТ  $\bar{x}$  и является расходящимся: его решения  $\{f_n(x)\}$  при  $x \neq \bar{x}$  имеют тип б).

Если  $(u, v) \in D_{13}^1$ , то отображение  $f$  обладает тремя различными неподвижными точками чередующейся устойчивости  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  ( $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3$ ), среди которых  $\bar{x}_2$  – устойчивая НТ. Тогда решения при  $x \in (\bar{x}_1, \bar{x}_3)$  имеют тип а), при  $x \notin [\bar{x}_1, \bar{x}_3]$  – тип б).

Пусть, наконец,  $(u, v) \in D_{12}^1$ . Тогда существуют неподвижная точка  $\bar{x}$  кратности 2 с единичным мультипликатором и неустойчивая неподвижная точка. Пусть  $X$  – отрезок с концами в этих НТ. Тогда при  $x \notin X$  решения убегают в бесконечность, а при  $x \in X$  – притягиваются к точке  $\bar{x}$ ; следовательно,  $\bar{x}$  – полустойчивая НТ.

### § 3. 2-циклы

Переходим к случаю  $k = 2$ . Пусть отображение  $f \in A_s(u, v)$  содержит нормированный 2-цикл  $N_2 = (0, 1)$ . Система (15) записывается в виде равенств

$$d = 1, \quad c = -1 - a - b. \quad (31)$$

При любых  $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$  функция  $f$  с коэффициентами  $c, d$ , определенными в соответствии с (31), имеет 2-цикл  $N_2$ .

Укажем (ортогональные) проекции  $Pr_u D_2^s$  множеств 2-циклов  $D_2^s$  на ось  $Ou$  (сами множества найдены ниже, см. (47)–(48)). Из (3), (31) следует, что в случае существования 2-цикла

$$u = -1 - s \cdot \frac{3a^2 + 3ab + b^2}{3|a|}.$$

Так как квадратичная форма  $3a^2 + 3ab + b^2$  положительно определена, то множество значений функции  $(3a^2 + 3ab + b^2)/3|a|$  является интервалом  $(0, +\infty)$ . Поэтому

$$Pr_u D_2^1 = (-\infty, -1), \quad Pr_u D_2^{-1} = (-1, +\infty). \quad (32)$$

Выведем уравнения линий мультипликаторов 2-циклов  $\beta_t^s$ . Соотношение (16) при  $k = 2$  записывается следующим образом:

$$c \cdot (3a + 2b + c) = t. \tag{33}$$

Из системы (31), (33) выразим коэффициенты  $b, c$  через  $a, t$ . Это позволит нам линии  $\beta_t^s$  описать параметрическими уравнениями с параметром  $a$ :

$$\beta_t^s: \quad u = u(a, t), \quad v = v(a, t), \quad a \in I_t^s.$$

При исследовании 2-циклов полезно привлечение вспомогательной плоскости  $(a, t)$ . Рассмотрим на ней параболы

$$A_m(a, t) = 0 \quad (m \neq 0), \tag{34}$$

где  $A_m(a, t) = a^2 - 4a + m(t - 1)$ . Кривая (34) имеет вершину в точке  $(2, 1 + 4/m)$ ; она проходит через точки  $(0, 1), (4, 1)$ . Нам понадобятся параболы  $L: A_{-4}(a, t) = 0, L': A_{1/2}(a, t) = 0$ .

Найдем функции  $u(a, t), v(a, t)$  и множество  $I_t^s$ . Равенство (33) с учетом (31) преобразуется к квадратному уравнению относительно  $b$

$$b^2 + 3ab + 2a^2 + a + t - 1 = 0.$$

Поскольку дискриминант этого уравнения  $A_{-4}(a, t)$ , то при

$$A_{-4}(a, t) \geq 0, \quad a \neq 0 \tag{35}$$

находим  $b = 1/2 \cdot (\sqrt{A_{-4}(a, t)} - 3a)$  (выбираем знак  $+$  перед квадратным корнем, противоположный знак приведет к тому же результату). Но тогда  $c = 1/2 \cdot (a - \sqrt{A_{-4}(a, t)} - 2)$ . Поэтому

$$u(a, t) = \frac{t - (a + 1)^2}{3a}, \tag{36}$$

$$v(a, t) = \frac{2\sqrt{A_{-4}(a, t)}}{27|a|^{3/2}} \cdot |A_{1/2}(a, t)|. \tag{37}$$

Выделим на плоскости  $(a, t)$  множество  $T$ , определяемое условиями (35), и разобьем его на множества  $T^s$  такие, что  $s = \text{sgn } a$  (рис. 3). Множества  $T^1, T^{-1}$  лежат не выше граничной параболы  $L$  на полуплоскостях  $a > 0, a < 0$  соответственно. Рассмотрим также множества  $K_t^s = T^s \cap \{t = \text{const}\}$ . Тогда  $I_t^s = \text{Pr}_a K_t^s$ . Поэтому

$$I_t^1 = \begin{cases} (0, +\infty), & t \leq 0, \\ (0, a_1(t)] \cup [a_2(t), +\infty), & 0 < t < 1, \\ [a_2(t), +\infty), & t \geq 1; \end{cases} \quad I_t^{-1} = \begin{cases} (-\infty, 0), & t \leq 1, \\ (-\infty, a_1(t)], & t > 1. \end{cases} \tag{38}$$

Здесь

$$a_{1,2}(t) = 2(1 \mp \sqrt{t}) \tag{39}$$

— абсциссы точек пересечения параболы  $L$  с прямой  $t = \text{const}$ . В формулах (38) учтены знаки  $a_{1,2}(t): a_2(t) > 0, a_1(1) = 0$ , при  $t \neq 1 \text{ sgn } a_1(t) = \text{sgn}(1 - t)$ .

Из (38) следует, что  $I_t^s$  — либо промежуток, либо объединение двух промежутков, причем последнее реализуется лишь при

$$s = 1, \quad t \in (0, 1). \tag{40}$$

В этом случае линия  $\beta_t^s$  несвязна и состоит из двух непрерывных компонент.

Линии  $\beta_t^s$  заданы параметрически. Однако при  $t = 1$  параметр  $a$  исключается. Нетрудно проверить, что  $\beta_t^1, \beta_t^{-1}$  — различные фрагменты кривой

$$v = \frac{2}{\sqrt{27}} \cdot |u + 2|^{3/2}. \tag{41}$$

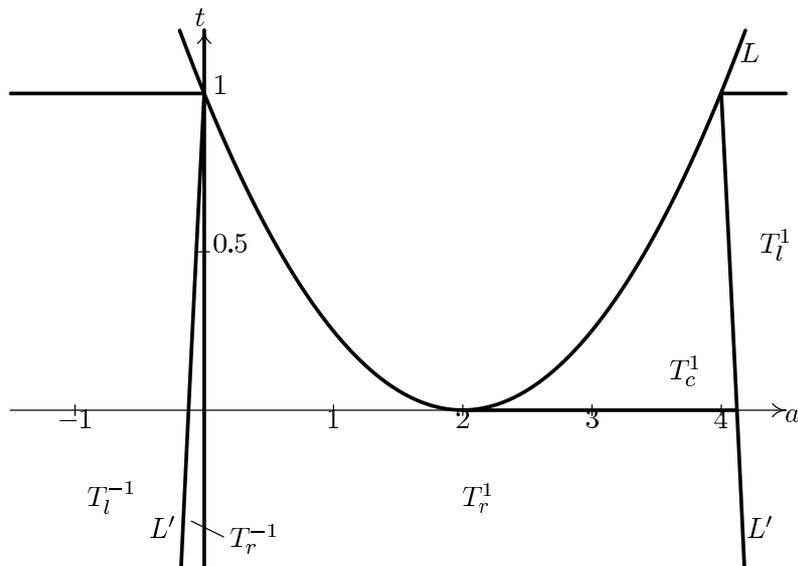


Рис. 3. Вспомогательная плоскость для исследования 2-циклов

Именно,

$$u \leq -2 \text{ при } s = 1, \quad u > -\frac{2}{3} \text{ при } s = -1. \tag{42}$$

Таким образом,  $\beta_1^1$  — левая ветвь кривой (41), а  $\beta_1^{-1}$  — часть ее правой ветви, лежащая правее своей граничной точки  $(-2/3, 16/27)$ .

Формулами  $u = u(a, t), v = v(a, t)$  определяется непрерывное отображение  $\varphi$  множества  $T$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $(u, v)$ . Подробнее,  $\varphi(a, t) \in P^1$  ( $\varphi(a, t) \in P^{-1}$ ) в случае  $a > 0$  ( $a < 0$ ). При этом  $\varphi(T^s) = D_2^s$ ,  $\varphi(K_t^s) = \beta_t^s$ . Отображение  $\varphi$  является удобным инструментом изучения 2-циклов.

Дальнейшее исследование 2-циклов кубического отображения  $f$  будем проводить по следующей схеме: 1) ареалы 2-циклов  $D_2^s$ , 2) подмножества множеств  $D_2^s$  с одинаковым числом различных 2-циклов, 3) гладкие ветви линий  $\beta_t^s$  ( $t \neq 1$ ), 4) асимптотика линий  $\beta_t^s$ , 5) взаимное расположение ветвей линий  $\beta_t^s$ , 6) множества устойчивости  $G_2^s$ . Линии мультипликаторов 2-циклов  $\beta_t^s$  изображены на рис. 4 ( $s = 1$ ) и на рис. 5 ( $s = -1$ ).

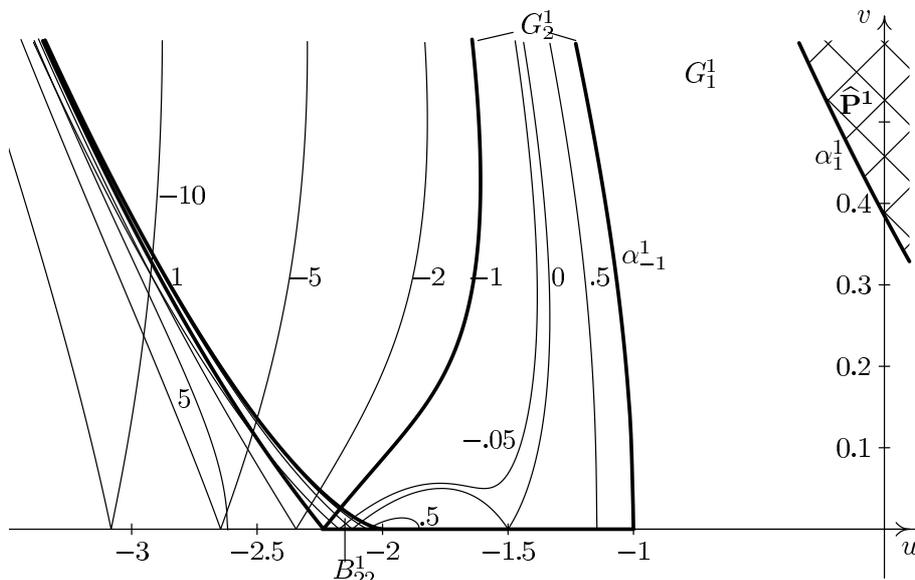


Рис. 4. Линии мультипликаторов  $\beta_t^1$

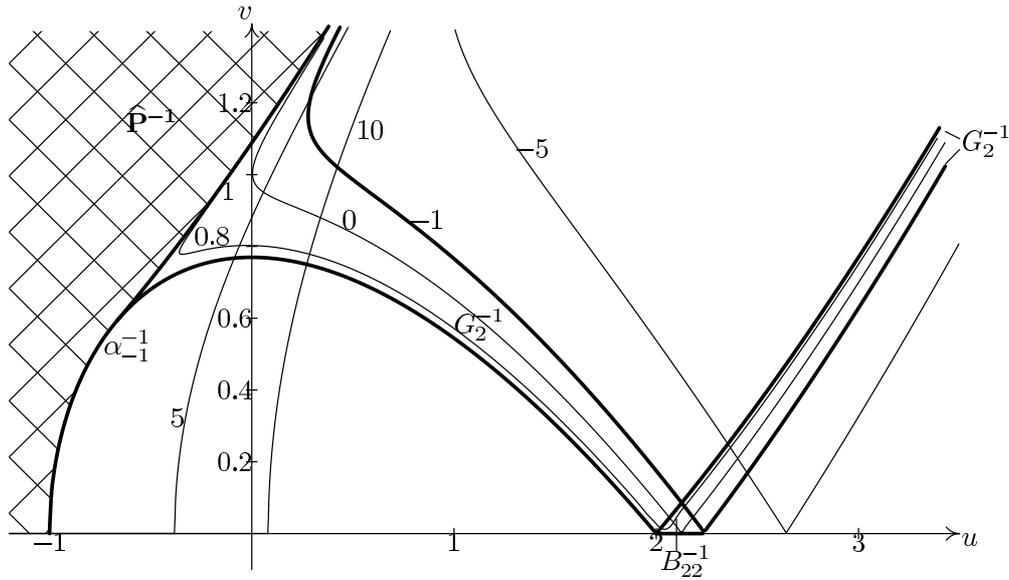


Рис. 5. Линии мультипликаторов  $\beta_t^{-1}$

1) Представим множества  $D_2^s$  через их пересечения с прямыми  $u = \text{const}$  :

$$D_2^1 = \bigcup_{u < -1} \varphi(L_u), \quad D_2^{-1} = \bigcup_{u > -1} \varphi(L_u).$$

Здесь  $L_u \subset T$  ( $u \neq -1$ ) — линия, переходящая в силу отображения  $\varphi$  в точки прямой  $u = \text{const}$ . Как следует из формулы  $u = u(a, t)$  и условия  $L_u \subset T$ , она является дугой параболы

$$t = a^2 + (2 + 3u)a + 1, \tag{43}$$

заключенной между точками  $(0, 1) \notin L_u$ ,  $(-4(u + 1), (2u + 3)^2) \in L_u$ . В этих точках парабола (43) пересекается с граничной параболой  $L$  множества  $T$ . Таким образом,

$$L_u : t = a^2 + (2 + 3u)a + 1, \quad a \in i_u,$$

где

$$i_u = (0, -4(u + 1)] \text{ при } u < -1, \quad i_u = [-4(u + 1), 0) \text{ при } u > -1.$$

Но тогда

$$\varphi(L_u) = \{(u, V_u(a)), \quad a \in i_u\}. \tag{44}$$

Здесь

$$V_u(a) = v(a, t)|_{L_u} = v(a, a^2 + (2 + 3u)a + 1) = \frac{1}{\sqrt{27}} \sqrt{\text{sgn}(u + 1) \cdot (a + 4(u + 1)) \cdot |a + u - 2|}.$$

В то время как функция  $v(a, t)$  не определена вдоль луча  $a = 0, v \geq 0$ , функция  $V_u(a)$  допускает доопределение в точке  $a = 0$  :  $V_u(0) = \alpha_{-1}^s(u)$ . Далее,  $V_u(-4(u + 1)) = 0$ . В случае  $2 - u \in i_u$  функция  $V_u(a)$  принимает нулевое значение также и в точке  $2 - u$ .

Согласно (44),  $V_u(a)$  — ордината той точки линии  $\varphi(L_u)$ , которая является образом в силу отображения  $\varphi$  точки кривой  $L_u$  с абсциссой  $a$ . Поэтому для построения  $D_2^s$  осталось найти множества  $j_u$  ординат линий  $\varphi(L_u)$ . При фиксированном  $u \neq 1$   $j_u$  — множество значений функции  $V_u(a), a \in i_u$ . Из непрерывности функции следует, что  $j_u$  — промежуток. Учитывая, что эта функция неотрицательна, находим  $\min j_u = V_u(-4(u + 1)) = 0$ .

Из формулы

$$V_u'(a) = \frac{-s \cdot \text{sgn}(a + u - 2)}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-s(a + 4(u + 1))}} \cdot (a + 3u + 2)$$

вытекает, что в случае

$$-3u - 2 \in i_u \quad (45)$$

функция  $V_u(a)$  имеет на  $i_u$  единственную критическую точку  $(-3u - 2)$ . В ней достигается локальный (возможно, односторонний) максимум функции. Условие (45) справедливо тогда и только тогда, когда существуют кривые  $\beta_1^s$  (см. (42)), причем

$$V_u(-3u - 2) = \frac{2}{\sqrt{27}} \sqrt{-s(u+2)^3} = \beta_1^s(u).$$

Найдем при таких  $u$

$$\alpha_{-1}^s(u) - \beta_1^s(u) = \frac{2s(3u+2)^2}{\sqrt{27}(\sqrt{-s(u+1)(u-2)^2} + \sqrt{-s(u+2)^3})}. \quad (46)$$

Пусть  $s = 1$ , то есть  $u < -1$ . При  $u \leq -2$  существует кривая  $\beta_1^1$  и, согласно (46),  $\alpha_{-1}^1(u) > \beta_1^1(u)$ , что влечет  $\sup j_u = \alpha_{-1}^1(u)$ . Когда  $-2 < u < -1$ , то нет кривой  $\beta_1^1$ , но по-прежнему  $\sup j_u = \alpha_{-1}^1(u)$ . Поэтому  $j_u = [0, \alpha_{-1}^1(u)]$ . Таким образом,

$$D_2^1: \quad 0 \leq v < \alpha_{-1}^1(u). \quad (47)$$

Пусть  $s = -1$ . При  $-1 < u \leq -2/3$   $\sup j_u = \alpha_{-1}^{-1}(u)$ . Если же  $u > -2/3$ , то теперь  $\beta_1^{-1}(u) > \alpha_{-1}^{-1}(u)$  и существует  $\max j_u = \beta_1^{-1}(u)$ . Следовательно,

$$D_2^{-1} = \{-1 < u \leq -2/3, 0 \leq v < \alpha_{-1}^{-1}(u)\} \cup \{u > -2/3, 0 \leq v \leq \beta_1^{-1}(u)\}. \quad (48)$$

Множество  $D_2^{-1}$  сверху ограничено частью линии  $\alpha_{-1}^{-1}$  и линией  $\beta_1^{-1}$ , причем в точке пересечения  $(-2/3, 16/27)$  обе кривые касаются друг друга.

Множество  $D_2^1$  не пересекается с множеством устойчивости 1-циклов  $G_1^1$ , примыкая к нему снизу. Линия  $\alpha_{-1}^1$  является общей границей этих множеств. Отсюда, в частности, следует отсутствие множеств бистабильности  $B_{1i}^1$  ( $i > 1$ ). В то же время  $G_1^{-1} \subset D_2^{-1}$ . Поэтому кубические отображения с устойчивыми 1-циклами при  $s = 1$  не содержат  $k$ -циклов ( $k \geq 2$ ), а при  $s = -1$  имеют 2-циклы.

Уточним характер множеств расходимости  $\widehat{P}^s$  кубического отображения, определенных формулой (19). Поскольку  $D_2^1 \cap D_{11}^1 = \emptyset$ , а  $P^{-1} \setminus D_2^{-1} \subset D_{11}^{-1}$ , то

$$\widehat{P}^1 = D_{11}^1, \quad \widehat{P}^{-1} = P^{-1} \setminus D_2^{-1}.$$

Множества  $\widehat{P}^s$  на рис. 4-7 обозначены штриховкой.

2) Продолжая работать с функциями  $V_u(a)$ ,  $a \in i_u$ , построим разбиения  $D_2^s = \bigcup_{m=1}^3 D_{2m}^s$ .

Зафиксировав  $u \neq -1$ , выберем  $s = -\operatorname{sgn}(u+1)$  и для каждого  $v = V_u(a)$ ,  $a \in i_u$  укажем число  $m$  различных 2-циклов отображений  $f \in A_s(u, v)$ . Когда точка  $(a, t)$  пробегает кривую  $L_u$ , ее образ  $\varphi(a, t)$  движется на полуплоскости  $P^s$  вдоль линии  $\varphi(L_u)$ , попадая в каждую точку  $(u, v)$  линии  $m$  раз.

Для нахождения  $m$  необходимо исследовать функцию  $V_u(a)$  на монотонность и сравнить её значения в граничных точках промежутков монотонности. Таковыми, помимо 0,  $-4(u+1)$ , могут быть лишь точки  $2-u$ ,  $-3u-2$ . Включение  $2-u \in i_u$  записывается в виде

$$u \leq -2 \text{ при } s = 1, \quad u > 2 \text{ при } s = -1.$$

Рассмотрим случай  $s = 1$ . Если  $u < -2$ , то  $2-u$ ,  $-3u-2$  — внутренние точки промежутка  $i_u$ , причем  $2-u < -3u-2$ , и в силу (46)  $\alpha_{-1}^1(u) > \beta_1^1(u)$ . Функция  $V_u(a)$  имеет три промежутка монотонности и  $m = 3$  при  $v \in [0, \beta_1^1(u))$ ,  $m = 2$  при  $v = \beta_1^1(u)$ ,  $m = 1$  при  $v \in (\beta_1^1(u), \alpha_{-1}^1(u))$ .

В случае  $-2 \leq u < -1$  функция  $V_u(a)$  убывает и при всех  $v \in j_u = [0, \alpha_{-1}^1(u))$  справедливо равенство  $m = 1$ . Следовательно,

$$D_{21}^1 = \{u < -2, \beta_1^1(u) < v < \alpha_{-1}^1(u)\} \cup \{-2 \leq u < -1, 0 \leq v < \alpha_{-1}^1(u)\},$$

$$D_{22}^1 = \beta_1^1 \setminus \{(-2, 0)\}, \quad D_{23}^1 = \{a < -2, 0 \leq v < \beta_1^1(u)\}.$$

Перейдем к случаю  $s = -1$ . Если  $-1 < u \leq -2/3$ , то функция  $V_u(a)$  возрастает и  $m = 1$  при  $v \in j_u = [0, \alpha_{-1}^{-1}(u))$ . Пусть  $u > -2/3$ , тогда  $-3u - 2 \in i_u$  и, согласно (46),  $\beta_1^{-1}(u) > \alpha_{-1}^{-1}(u)$ . Если при этом  $-2/3 < u \leq 2$ , то  $2 - u \notin i_u$  и функция  $V_u(a)$  имеет два промежутка монотонности. Поэтому  $m = 1$  при  $v \in [0, \alpha_{-1}^{-1}(u)]$  и при  $v = \beta_1^{-1}(u)$ ,  $m = 2$  при  $v \in (\alpha_{-1}^{-1}(u), \beta_1^{-1}(u))$ . Если же  $u > 2$ , то  $2 - u \in i_u$ , причем  $-3u - 2 < 2 - u$ . Поэтому  $m = 3$  при  $v \in [0, \alpha_{-1}^{-1}(u))$ ,  $m = 2$  при  $v \in [\alpha_{-1}^{-1}(u), \beta_1^{-1}(u))$ ,  $m = 1$  при  $v = \beta_1^{-1}(u)$ . Таким образом,

$$D_{21}^{-1} = \{-1 < u \leq -2/3, 0 \leq v < \alpha_{-1}^{-1}(u)\} \cup \{-2/3 < u \leq 2, 0 \leq v \leq \alpha_{-1}^{-1}(u)\} \cup \beta_1^{-1},$$

$$D_{22}^{-1} = \{-2/3 < u \leq 2, \alpha_{-1}^{-1}(u) < v < \beta_1^{-1}(u)\} \cup \{u > 2, \alpha_{-1}^{-1}(u) \leq v < \beta_1^{-1}(u)\},$$

$$D_{23}^{-1} = \{u > 2, 0 \leq v < \alpha_{-1}^{-1}(u)\}.$$

3) Зафиксируем любое  $t \neq 1$  и выделим точки  $(u(a, t), 0)$  пересечения линий  $\beta_t^1, \beta_t^{-1}$  с осью  $Ou$ . Они задаются нулями функции  $v(a, t)$  (37), удовлетворяющими условию

$$a \in I_t^1 \cup I_t^{-1}. \tag{49}$$

Точнее, каждый нуль  $a$  функции с условием (49) определяет точку пересечения с осью  $Ou$  той линии  $\beta_t^s$ , что  $s = \text{sgn } a$ .

Нули функции  $v(a, t)$  возникают при решении уравнений  $A_{-4}(a, t) = 0, A_{1/2}(a, t) = 0$ . Корни первого уравнения, связанные условием (49), определены выше равенством (39). Корни второго уравнения, удовлетворяющие тому же условию, задаются формулой

$$a'_{1,2}(t) = 2 \mp \sqrt{9 - t/2} \quad (t < 1).$$

Величины  $a_{1,2}(t)$  и  $a'_{1,2}(t)$  находятся геометрически как абсциссы точек пересечения прямой  $t = \text{const}$  с параболой  $L$  и  $L'$  соответственно.

Точки пересечения линий  $\beta_t^s$  с осью  $Ou$  разбиваются на граничные и угловые. Как правило, граничные точки линий  $\beta_t^s$  являются образами в силу отображения  $\varphi$  граничных точек  $(a_{1,2}(t), t)$  множеств  $K_t^s$ , а угловые точки  $\beta_t^s$  — образы точек  $(a'_{1,2}(t), t)$ . Исключение составляет случай  $t = 0$ , тогда  $\sqrt{A_{-4}(a, 0)} = |a - 2|$  и  $(u(2, 0), 0) = (-3/2, 0)$  — также угловая точка линии  $\gamma_0^1$ . Отметим также специфику случая (40): граничные точки  $((-3 \pm \sqrt{t})/2, 0)$  несвязной кривой  $\beta_t^1, t \in (0, 1)$  являются ее точками разрыва.

Когда  $t > 1$ , линии  $\beta_t^s$  представляют собой гладкие кривые без угловых точек (простые кривые).

Пусть  $t < 1$ . Теперь кривые  $\beta_t^s$  являются сложными; угловые точки и точки разрыва делят их на гладкие ветви. Каждая ветвь соответствует определённому промежутку множества  $I_t^s$ . Число ветвей в случае (40) равно трём, в остальных случаях — двум.

Каждая линия  $\beta_t^1$  содержит левую ветвь  $\beta_{ul}^1$ , где  $a \in [a'_2(t), +\infty)$ , и правую ветвь  $\beta_{tr}^1$ , где либо  $a \in (0, a'_2(t)]$  в случае  $t < 0$ , либо  $a \in (0, a_1(t)]$  в случае  $0 \leq t < 1$ . Обе эти ветви неограничены. Если же  $t \in [0, 1)$ , то, помимо  $\beta_{ul}^1, \beta_{tr}^1$ , линия  $\beta_t^1$  включает также ограниченную среднюю ветвь  $\beta_{tc}^1$ , соответствующую промежутку  $[a_2(t), a'_2(t)]$ . Она примыкает к левой ветви, но отделена от правой ветви. Средняя ветвь расположена между двумя точками оси  $Ou$  и имеет вид арки. При  $t < 0$   $\beta_t^1 = \beta_{ul}^1 \cup \beta_{tr}^1$ .

Каждая из линий  $\beta_t^{-1}$  ( $t < 1$ ) угловой точкой  $(u(a'_1(t), t), 0)$  разбивается на неограниченные ветви: левую ветвь  $\beta_{ul}^{-1}$ , отвечающую промежутку  $(-\infty, a'_1(t)]$ , и правую ветвь  $\beta_{tr}^{-1}$ , где  $a \in [a'_1(t), 0)$ .

Выделим на множествах  $T^s \cap \{t < 1\}$  подмножества  $T_l^s$ ,  $T_r^s$ ,  $T_c^1$ , соответствующие ветвям  $\beta_{tl}^s$ ,  $\beta_{tr}^s$ ,  $\beta_{tc}^1$  кривых  $\beta_t^s$ :

$$T_l^1 = \{a > 0, A_{1/2}(a, t) \geq 0, t < 1\}, T_c^1 = \{a \geq a_2(t), A_{1/2}(a, t) \leq 0, t \geq 0\},$$

$$T_r^1 = \{0 < a \leq a_1(t), t \geq 0\} \cup \{a > 0, A_{1/2}(a, t) \leq 0, t < 0\};$$

$$T_l^{-1} = \{a < 0, A_{1/2}(a, t) \geq 0, t < 1\}, T_r^{-1} = \{a < 0, A_{1/2}(a, t) \leq 0\}.$$

Например, включение  $(a, t) \in T_l^s$  означает, что  $(u(a, t), v(a, t)) \in \beta_{tl}^s$ . Границами указанных подмножеств являются дуги парабол  $L$ ,  $L'$  и прямых  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $a = 0$  (см. рис. 3).

4) Линии мультипликаторов 2-циклов  $\beta_t^s$  обладают асимптотикой:

$$\beta_t^s \sim \beta_1^s (a \rightarrow \infty), \quad (50)$$

$$\beta_t^s \sim \alpha_{-1}^s (a \rightarrow 0) \text{ при } t < 1. \quad (51)$$

В случае  $t < 1$ , когда линия  $\beta_t^s$  содержит две бесконечные ветви  $\beta_{tl}^s$ ,  $\beta_{tr}^s$ , существует две ее асимптотические кривые (и при  $a \rightarrow \infty$ , и при  $a \rightarrow 0$ ).

Докажем, например, формулу (51). Нужно убедиться, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Delta_0(a, t) = 0. \quad (52)$$

Здесь

$$\Delta_0(a, t) = v(a, t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{-s(u(a, t) + 1)} \cdot |u(a, t) - 2|.$$

Преобразовав функцию  $\Delta_0(a, t)$  к виду

$$\Delta_0(a, t) = -\frac{|a| \cdot ((t-1)^2 - 8a(t-1) + 4a^3)}{\sqrt[4]{A_{-4}(a, t)} \cdot \sqrt{|A_{1/2}(a, t)|} + \sqrt{(a^2 - a + 1 - t)(a^2 + 8a + (t-1)^2)}}, \quad (53)$$

сразу приходим к формуле (52).

Как следует из (50), асимптотической кривой для линий каждого семейства  $\{\beta_t^s\}$  при  $a \rightarrow \infty$  является «своя» линия  $\beta_1^s$ , поэтому в силу непрерывности этих семейств по  $t$  каждое из них непосредственно примыкает к асимптотической кривой. Уточним, что это означает. Проведем на полуплоскости  $P^s$  прямую  $u = \text{const}$ , пересекающуюся с асимптотической кривой  $\beta_1^s$ . Тогда точки линий  $\beta_t^s$ , лежащие на прямой, при  $t \rightarrow 1$  стремятся к точке пересечения кривой  $\beta_1^s$  с этой прямой.

Если двигаться вдоль линий  $\beta_t^s$  ( $t < 1$ ) в направлении убывания  $|a|$  так, что  $a \rightarrow 0$ , то  $u \rightarrow \infty$ . Поэтому из (29), (51) вытекает, что каждое семейство  $\{\beta_t^s\}$  обладает различными асимптотическими линиями  $\alpha^s$ ,  $\alpha_{-1}^s$  при  $a \rightarrow 0$ . Убедимся, однако, что линии  $\beta_t^s$  непосредственно примыкают к кривой  $\alpha_{-1}^s$ . Для этого проверим, что

$$\lim_{t \rightarrow 1} \Delta_0(a, t)|_{T_r^s} = 0. \quad (54)$$

Рассматриваем предел при  $t \rightarrow 1$  сужения функции  $\Delta_0(a, t)$  на множество  $T_r^s$ . Как вытекает из конфигурации этих множеств (см. рис.3), ситуация  $t \rightarrow 1$  возможна лишь при  $a \rightarrow 0$ , что влечет (54) в силу (53).

5) Разобьём множества линий мультипликаторов 2-циклов  $\{\beta_t^s\}$  на следующие классы кривых: простые кривые  $\{\beta_t^s\}$  ( $t > 1$ ), левые ветви  $\{\beta_{tl}^s\}$ , правые ветви сложных кривых  $\{\beta_{tr}^s\}$ , а также при  $s = 1$  средние ветви сложных кривых  $\{\beta_{tc}^1\}$ . Убедимся, что различные линии каждого класса не пересекаются. Для этого нужно проверить, что на каждом из множеств

$$T^s \cap \{t > 1\}, T_l^s, T_r^s, T_c^1 \quad (55)$$

отображение  $\varphi$  обратимо. Пусть, напротив, на каком-то из множеств (55) отображение необратимо. Тогда найдутся различные точки этого множества  $(a_1, t_1)$ ,  $(a_2, t_2)$  такие, что

$$\varphi(a_1, t_1) = \varphi(a_2, t_2) = (u, v). \quad (56)$$

Поэтому  $(a_1, t_1) \in L_u$ ,  $(a_2, t_2) \in L_u$ . Справедливо следующее утверждение: отображение  $\varphi$  обратимо на пересечении линии  $L_u$  с каждым из множеств (55) (если пересечение непусто). Это утверждение вытекает из монотонности соответствующего сужения функции  $V_u(a)$ . Действительно, нарушение монотонности функции происходит лишь в точках  $2 - u$ ,  $3 - 2u$ , принадлежащих промежутку  $i_u$ . Но при  $a = 2 - u$  кривая  $L_u$  пересекает параболу  $L'$  и переходит из одного множества совокупности (55) в соседнее. Аналогично, при  $a = -3u - 2$  кривая  $L_u$  пересекает прямую  $t = 1$ . Из утверждения следует, что равенство (56) невозможно.

6) Множество устойчивости 2-циклов  $G_2^1$  снизу ограничено интервалом  $(-\sqrt{5}, -1)$  оси  $Ou$ . Оно имеет подковообразную форму с двумя бесконечно утончающимися языками. Левая часть этой «подковы» ограничена слева кривой  $\beta_{-1l}^1$ , справа — асимптотической линией  $\beta_1^1$ ; она образована левыми ветвями  $\beta_{tl}^1$  линий  $\beta_t^1$  ( $|t| < 1$ ). Правая часть «подковы»  $G_2^1$  образована остальными ветвями этих линий. Она справа примыкает к множеству устойчивости 1-циклов  $G_1^1$ , имея с ней общую границу  $\alpha_{-1}^{-1}$ . Пересечение названных двух частей «подковы» образует множество бистабильности  $B_{22}^1$ .

Множество  $G_2^{-1}$  также имеет вид «подковы» с двумя языками, но несколько другой конфигурации. Снизу оно ограничено частью кривой  $\alpha_{-1}^{-1}$ , вдоль которой  $u \in (-2/3, 2]$ , интервалом  $(2, \sqrt{5})$  оси  $Ou$  и линией  $\beta_{-1r}^{-1}$ . Левая часть множества  $G_2^{-1}$  образована линиями  $\beta_{tl}^{-1}$  и ограничена слева асимптотической линией  $\beta_1^{-1}$ , а справа — кривой  $\beta_{-1l}^{-1}$ . Правая часть множества  $G_2^{-1}$  образована линиями  $\beta_{tr}^{-1}$  и ограничена слева  $\alpha_{-1r}^{-1}$ , справа —  $\beta_{-1r}^{-1}$ . Пересечение двух частей «подковы»  $G_2^{-1}$  является множеством бистабильности  $B_{22}^{-1}$ . Кроме того, левая часть множества  $G_2^{-1}$  пересекается с  $G_1^{-1}$ , образуя еще одно множество бистабильности  $B_{12}^{-1}$ . Три множества бистабильности  $B_{11}^{-1}$ ,  $B_{12}^{-1}$ ,  $B_{22}^{-1}$  примыкают друг к другу (рис. 7).

В каждой точке линий  $\alpha_{-1}^s$  (за исключением той дуги, где  $s = -1$ ,  $-1 < u \leq -2/3$ ) возникает бифуркация рождения устойчивого 2-цикла, сопровождаемая потерей устойчивости 1-цикла. Эта перестройка происходит при переходе через линию  $\alpha_{-1}^s$  из множества  $G_1^s$  во множество  $G_2^s$ .

#### § 4. 3-циклы

Пусть функция  $f \in A_s(u, v)$  имеет нормированный 3-цикл  $N_3 = (0, z, 1)$ ,  $0 < z < 1$ .

Поясним, почему можем считать, что  $z \in (0, 1)$ . Если  $z > 1$ , то, переходя к функции  $g \asymp f$  посредством сопрягающей функции  $h(x) = -x$ , убеждаемся, что функция  $g$  имеет 3-цикл  $(-z, -1, 0)$  с наименьшей точкой  $(-z)$ . Нормируя его, приходим к 3-циклу  $(0, 1 - 1/z, 1)$ , где  $0 < 1 - 1/z < 1$ . Такой цикл имеет некоторая функция того же класса  $A_s(u, v)$ .

Метка  $z$  характеризует расположение точек 3-циклов, соответствующих  $N_3$ , у всех функций класса  $A_s(u, v)$ : средняя точка каждого 3-цикла отстоит от крайних в отношении  $z : (1 - z)$ .

Система (15) при  $k = 3$  запишется в виде

$$\begin{cases} d = z, \\ az^3 + bz^2 + cz + d = 1, \\ a + b + c + d = 0. \end{cases}$$

Из этой линейной (относительно  $a, b, c, d$ ) системы выражаем  $b, c, d$  через  $a, z$ :

$$b = \frac{(-z^3 + z)a + z^2 - z + 1}{z^2 - z}, \quad c = \frac{(z^3 - z^2)a - z^3 + z - 1}{z^2 - z}, \quad d = z. \quad (57)$$

Таким образом, при любых  $a \neq 0$ ,  $z \in (0, 1)$  отображение  $f$  с коэффициентами  $b, c, d$ , определенными в соответствии с (57), имеет 3-цикл  $N_3$ . Применяя формулы (3), (10), найдем параметры  $u = u(a, z)$ ,  $v = v(a, z)$  названного отображения:

$$u(a, z) = -\frac{K_u(a, z)}{3a(z^2 - z)^2}, \quad (58)$$

$$v(a, z) = \frac{|K_v(a, z)|}{27(z - z^2)^3 |a|^{3/2}}.$$

Здесь  $K_u(a, z) = (z^2 - z + 1)((z^2 - z)a)^2 + (z^3 - 3z + 1)(z^2 - z)a + (z^2 - z + 1)^2$ ;  
 $K_v(a, z) = (z + 1)(z - 2)(2z - 1)((z^2 - z)a)^3 + 3(z^2 - z + 1)^2((z^2 - z)a)^2 - 3(z^2 - z + 1)(z^3 + 3z^2 - 6z + 1)(z^2 - z)a - 2(z^2 - z + 1)^3$ .

Укажем проекции  $Pr_u D_3^s$  множеств 3-циклов  $D_3^s$  на ось  $Ou$  (сами множества не найдены). Преобразуем правую часть формулы (58) двумя способами, выделяя в ней слагаемые  $(-2), 1$ :

$$u(a, z) = -2 - \frac{K'(a, z)}{3a(z^2 - z)^2} = 1 - \frac{K''(a, z)}{3a(z^2 - z)^2}. \quad (59)$$

Символами  $K'(a, z), K''(a, z)$  обозначены квадратные трехчлены относительно  $a$ , отличающиеся от  $K_u(a, z)$  лишь вторым слагаемым, которое теперь принимает соответственно вид

$$(z^3 - 6z^2 + 3z + 1)(z^2 - z)a, \quad (z^3 + 3z^2 - 6z + 1)(z^2 - z)a.$$

Дискриминанты этих квадратных трехчленов

$$-3(z^3 - 3z + 1)^2(z^2 - z)^2, \quad -3(z^3 - 3z^2 + 1)^2(z^2 - z)^2$$

на интервале  $(0, 1)$  неположительны, причем каждый из них на этом интервале однажды обращается в нуль. Отсюда и из положительности при тех же  $z$  старшего коэффициента  $(z^2 - z + 1)(z^2 - z)^2$  трехчленов  $K'(a, z), K''(a, z)$  следует, что

$$\forall a \neq 0 \forall z \in (0, 1) \quad K'(a, z) \geq 0, \quad K''(a, z) \geq 0.$$

Поэтому множество значений каждой функции

$$\frac{K'(a, z)}{3|a|(z^2 - z)^2}, \quad \frac{K''(a, z)}{3|a|(z^2 - z)^2}$$

составляет промежуток  $[0, +\infty)$  и из (59) вытекает, что

$$Pr_u D_3^1 = (-\infty, -2], \quad Pr_u D_3^{-1} = [1, +\infty). \quad (60)$$

Рассмотрим мультипликатор 3-цикла  $N_3$

$$\mu(N_3) = f'(0) \cdot f'(z) \cdot f'(1) = c \cdot (3az^2 + 2bz + c) \cdot (3a + 2b + c).$$

Используя формулы (57), запишем равенство (16) при  $k = 3$  в виде уравнения третьей степени относительно  $a$

$$(z^2(z - 1)a - M_1(z)) \cdot ((z^2 - z)^2 a - M_2(z)) \cdot (-z(z - 1)^2 a + M_3(z)) = (z^2 - z)^3 \cdot t. \quad (61)$$

Здесь  $M_1(z) = z^3 - z + 1$ ,  $M_2(z) = -z^3 + 2z^2 - 3z + 1$ ,  $M_3(z) = -z^3 + 2z^2 - z + 1$ .

Уравнение (61), где  $z \in (0, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , имеет вещественные решения  $a_i(z, t)$  (числом не более трёх). При фиксированных  $z, t$  каждое решение  $a_i(z, t) \neq 0$  определяет на полуплоскости  $P^s$  точку  $(u(a_i(z, t), z), v(a_i(z, t), z))$  линии мультипликаторов 3-циклов  $\gamma_t^s$ , здесь  $s = \text{sgn } a_i(z, t)$ . Линия  $\gamma_t^s$ , вообще говоря, состоит из нескольких параметрически заданных (с параметром  $z$ ) непрерывных ветвей, отвечающих определенному решению уравнения (61) и определенному промежутку интервала  $(0, 1)$ .

Линии мультипликаторов *сверхустойчивых* 3-циклов  $\gamma_0^s$  исследуются аналитически. Тогда  $t = 0$  и уравнение (61) принимает простой вид

$$(z^2(z - 1)a - M_1(z)) \cdot ((z^2 - z)^2 a - M_2(z)) \cdot (z(z - 1)^2 a - M_3(z)) = 0.$$

Это уравнение при  $z \in (0, 1)$  имеет в точности 3 корня

$$a_1(z) = \frac{-M_1(z)}{z^2(1-z)}, \quad a_2(z) = \frac{M_2(z)}{(z^2-z)^2}, \quad a_3(z) = \frac{M_3(z)}{z(z-1)^2}. \quad (62)$$

Чтобы выделить ветви линий  $\gamma_0^s$ , определим знаки функций  $a_i(z)$ . При  $z \in (0, 1)$  многочлены, стоящие в знаменателях дробей (62), и многочлены  $M_1(z)$ ,  $M_3(z)$  положительны. Однако многочлен  $M_2(z)$  имеет единственный корень  $z_0 = 0,430159709\dots \in (0, 1)$ , меняя в этой точке знак с (+) на (-). Поэтому каждая кривая  $\gamma_0^1$ ,  $\gamma_0^{-1}$  состоит из двух ветвей:  $\gamma_0^1 = \gamma_{02}^1 \cup \gamma_{03}^1$ ,  $\gamma_0^{-1} = \gamma_{01}^{-1} \cup \gamma_{02}^{-1}$ . Здесь второй нижний индекс  $i$ , ветвь  $\gamma_{02}^1$  отвечает промежутку  $(0, z_0)$ , ветвь  $\gamma_{02}^{-1}$  – промежутку  $(z_0, 1)$ . Запишем уравнения этих ветвей:

$$\gamma_{01}^{-1}: \quad u = u(a_1(z), z), \quad v = v(a_1(z), z), \quad z \in (0, 1);$$

$$\gamma_{02}^1: \quad u = u(a_2(z), z), \quad v = v(a_2(z), z), \quad z \in (0, z_0);$$

$$\gamma_{02}^{-1}: \quad u = u(a_2(z), z), \quad v = v(a_2(z), z), \quad z \in (z_0, 1);$$

$$\gamma_{03}^1: \quad u = u(a_3(z), z), \quad v = v(a_3(z), z), \quad z \in (0, 1).$$

Оказывается,  $u(a_i(z), z)$  – дробно-рациональные функции, в числителях которых стоят полные квадраты:

$$u(a_1(z), z) = \frac{(z^4 - z + 1)^2}{3z^2(1-z)M_1(z)}, \quad u(a_2(z), z) = -\frac{(z^4 - 3z^3 + 6z^2 - 4z + 1)^2}{3(z^2 - z)^2 M_2(z)},$$

$$u(a_3(z), z) = -\frac{(z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1)^2}{3z(z-1)^2 M_3(z)}.$$

Функции  $v(a_i(z), z)$  сложнее:

$$v(a_1(z), z) = \frac{K_1(z)}{27z^3(1-z)^{3/2}(M_1(z))^{3/2}}, \quad v(a_2(z), z) = \frac{|K_2(z)|}{27(z-z^2)^3 \cdot |M_2(z)|^{3/2}},$$

$$v(a_3(z), z) = \frac{|K_3(z)|}{27(1-z)^3 z^{3/2} (M_3(z))^{3/2}}.$$

Здесь

$$K_1(z) = 2z^{12} - 18z^{10} + 12z^9 + 51z^8 - 99z^7 + 42z^6 + 69z^5 - 102z^4 + 52z^3 - 3z^2 - 6z + 2,$$

$$K_2(z) = 2z^{12} - 36z^{10} + 147z^9 - 300z^8 + 342z^7 - 147z^6 - 165z^5 + 339z^4 - 272z^3 + 114z^2 - 24z + 2,$$

$$K_3(z) = 2z^{12} - 18z^{11} + 63z^{10} - 132z^9 + 231z^8 - 369z^7 + 483z^6 - 498z^5 + 393z^4 - 227z^3 + 96z^2 - 24z + 2.$$

При  $z \in (0, 1)$  многочлен  $K_1(z)$  положителен, а многочлены  $K_{2,3}(z)$  имеют по два корня, причем корни  $K_2(z)$  больше  $z_0$ . Поэтому ветви  $\gamma_{02}^1$ ,  $\gamma_{01}^{-1}$  лежат выше оси  $Ou$ , а ветви  $\gamma_{03}^1$  и  $\gamma_{02}^{-1}$  пересекают ось в точках с абсциссами  $-2,700314\dots$ ,  $-2,924990\dots$  и  $2,453154\dots$ ,  $2,981797\dots$  соответственно.

При стремлении параметра  $z$  к граничным точкам ветви кривых  $\gamma_0^s$  обладают асимптотикой:

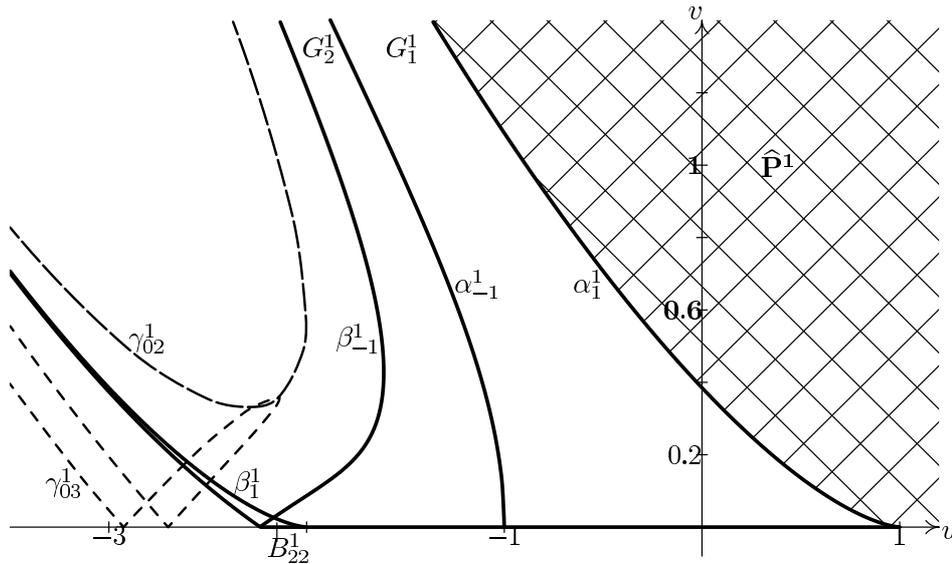
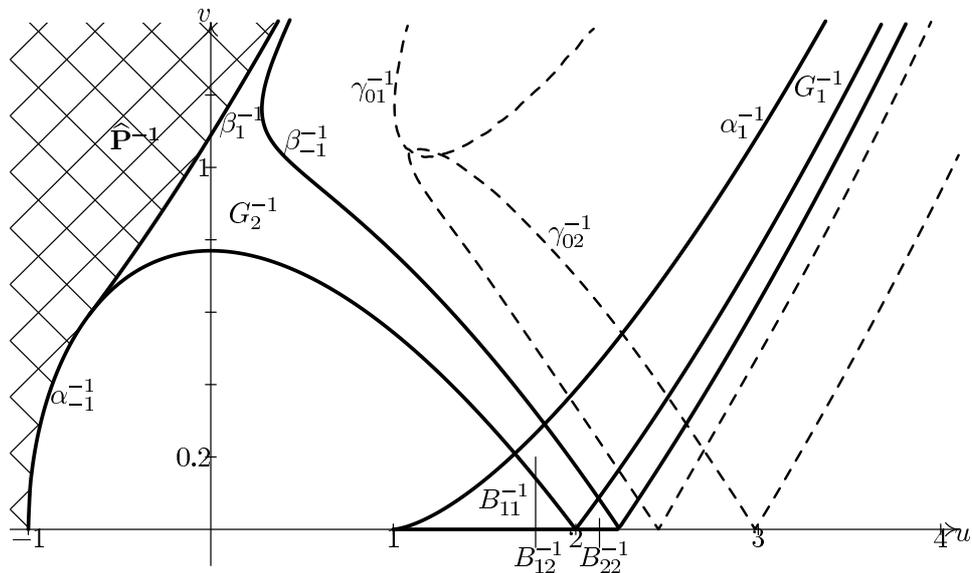
$$\gamma_{01}^{-1} \sim \alpha^{-1} + 1 \quad (z \rightarrow 0), \quad \gamma_{01}^{-1} \sim \beta_1^{-1} \quad (z \rightarrow 1);$$

$$\gamma_{02}^1 \sim \beta_1^1 \quad (z \rightarrow 0), \quad \gamma_{02}^1 \sim \alpha^1 \quad (z \rightarrow z_0);$$

$$\gamma_{02}^{-1} \sim \alpha^{-1} \quad (z \rightarrow z_0), \quad \gamma_{02}^{-1} \sim \alpha^{-1} - 1 \quad (z \rightarrow 1);$$

$$\gamma_{03}^1 \sim \beta_1^1 \quad (z \rightarrow 0, z \rightarrow 1).$$

Проверка этих асимптотических формул проводится по той же схеме, что и ранее.

Рис. 6. Карта динамических режимов,  $s = 1$ Рис. 7. Карта динамических режимов,  $s = -1$ 

Укажем *крайние* 3-циклы (правый при  $s = 1$ , левый при  $s = -1$ ), см. (60). Метка правого 3-цикла  $z' = 2 \sin \pi/18 = 0,347296\dots$  — единственный корень многочлена  $z^3 - 3z + 1$  на интервале  $(0, 1)$ . Ему отвечает точка  $(-2, 1/\sqrt{3}) \in P^1$ . При  $u = -2$  3-цикл существует лишь в случае  $v = 1/\sqrt{3}$ . Аналогично, метка левого 3-цикла  $1 - z'$  является единственным корнем многочлена  $z^3 - 3z^2 + 1$  на интервале  $(0, 1)$ , этот 3-цикл соответствует точке  $(1, 2/\sqrt{3}) \in P^{-1}$ . Крайние 3-циклы имеют мультипликатор 1. Левый 3-цикл был известен и ранее [6].

Множества  $G_1^s, G_2^s$  и кривые  $\gamma_0^s$  изображены на рис. 6 ( $s = 1$ ) и рис. 7 ( $s = -1$ ).

Как следует из данных компьютерного счёта [8, рис. 4,5], бифуркации рождения циклов новых периодов  $(4, 8, \dots, 3)$ , возникающие в соответствии с порядком Шарковского, происходят в зазорах между  $G_2^s$  и  $\gamma_0^s$ . Достаточно большие участки множеств устойчивости 3-циклов  $G_3^s$  наблюдаются на этих рисунках вблизи точек пересечения ветвей кривых  $\gamma_0^s$ .

**Замечание 2.** В работе [12] введены мультипликаторы  $k$ -циклов, указаны формулы вычисления линий мультипликаторов 1-циклов и кривых  $\beta_1^s$ . В ситуациях, когда отображение  $f$  имеет наибольшее число (три) 1- и 2-циклов, установлены связи между их мультипликаторами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика одномерных отображений / Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. — Киев: Наукова думка, 1989. — 216 с.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — Москва; Ижевск: ИКИ, 2002. — 560 с.
3. Шапиро А. П., Луппов А. П. Рекуррентные уравнения в популяционной биологии. — М.: Наука, 1982. — 131 с.
4. Scjolding H., Branner-Jorgensen B., Christiansen P. L., Jensen H. E. Bifurcations in Discrete Dynamical Systems with Cubic Maps // SIAM J. Appl. Math. — 1983. — Vol. 43, № 3. — P. 520–534.
5. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // Регулярная и хаотическая динамика. — 1997. — Т. 2, № 3–4. С. 90–105.
6. Li M.-C. Point Bifurcations and Bubbles for a Cubic Family // Journ. Difference Equat. and Appl. — 2003. Vol. 9, № 6. — P. 553–558.
7. Cabral F., Lago A., Gallas J. A Picture Book of Two Families of Cubic Maps // International Journal of Modern Physics C. — 1993. — Vol. 4, № 3. — P. 553–568.
8. Кузнецов А. П. Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1998. — Т. 6, № 5. — С. 89–101.
9. Густомесов В. А. Изучение итераций квадратичных функций с позиций линейной сопряжённости: сб. докл. Всерос. конф., ч. 1. Самара: Самар. гос. пед. ун-т, 2007. — С. 92–96.
10. Branner B., Hubbard J. H. The Iteration of Cubic Polynomials, part 1: The Global Topology of Parameter Space // Acta Matem. — 1988. Vol. 160.— P. 143–206.
11. Branner B., Hubbard J. H. The Iteration of Cubic Polynomials, part 2: Patterns and Parapatterns // Acta Matem. — 1992. — Vol. 169. — P. 229–325.
12. Milnor J. Remarks on Iterated Cubic Maps // Experimental Math. — 1992. — Vol. 1. — P. 5–24.
13. Nishizawa K., Nojiri A. Center Curves in the Moduli Space of the Real Cubic Maps // Proc. Japan Acad., ser. A. — 1993. — Vol. 69, № 6. — P. 179–184.
14. Густомесов В. А. Исследование циклов кубических отображений с позиции линейной сопряжённости: тез. докл. II Украинского математического конгресса. Киев, 2009. <http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Gustomesov>
15. Гаушус Э. В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований. — М.: Наука, 1976. — 368 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968. — 350 с.

Поступила в редакцию 23.06.10

**V. A. Gustomesov**

**A study of iteration of cubic maps with the position of linear conjugacy**

The device of a linear conjugacy is applied to research of real cubic maps. The program of studying of map cycles is proposed. This program is connected with construction of multipliers constancy lines on the half-plane of material parameters. We study the cycles of small periods: 1 and 2-cycles, and also — it is less detailed — 3-cycles.

*Keywords:* cubic mapping, linear conjugacy, line multipliers cycles, the stability region of cycles.

Mathematical Subject Classifications: 37Fxx, 37F10

Густомесов Валерий Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики, Российский государственный профессионально-педагогический университет, 620012, Россия, г. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11. E-mail: valgust@yandex.ru