

УДК 519.168

© *Е. Е. Иванко***КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА
В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА ПРИ ДОБАВЛЕНИИ ВЕРШИНЫ¹**

Получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие сохранение оптимальности маршрута обхода множества вершин при вставке новой вершины между двумя последовательными (в смысле существующего оптимального маршрута) вершинами. Предложен алгоритм построения областей устойчивости, проведен ряд экспериментов для задачи коммивояжера на евклидовой плоскости.

Ключевые слова: задача коммивояжера, устойчивость.

Введение

В настоящей работе мы интересуемся устойчивостью кратчайшего маршрута в задаче коммивояжера при изменении множества посещаемых вершин. Задача коммивояжера считается одной из классических труднорешаемых задач. Главным образом эта задача возникает при выявлении целесообразного порядка на множествах, например в маршрутных постановках, проблемах восстановления хронологии событий и упорядочивания многомерных данных. Задача коммивояжера хорошо изучена как теоретически, так и алгоритмически, например в таких работах, как [1–3].

Исследование влияния изменения начальных данных на решение задачи представляет интерес в различных областях математики. Одним из важных частных случаев в экстремальных задачах является выявление изменений начальных данных, при которых найденный экстремум сохраняется. В таких случаях говорят об устойчивости решения экстремальной задачи. Существует большое количество работ, посвященных устойчивости решений дискретных оптимизационных задач в целом [4–7] и задачи коммивояжера в частности [8–10]. Обычно, однако, устойчивость оптимального решения задачи коммивояжера исследуется в случае изменения стоимостей попарных перемещений между вершинами при неизменном количестве вершин.

Ранее [11] автором были получены достаточные условия устойчивости оптимального маршрута при добавлении или удалении одной вершины. В настоящей работе предлагается критерий устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении одной вершины, рассматривается алгоритм построения областей устойчивости, приводятся результаты ряда экспериментов на евклидовой плоскости.

§ 1. Необходимые и достаточные условия

Введем ряд базовых обозначений. Рассмотрим некоторое множество X , в рамках которого будем вести все дальнейшие рассуждения. Зададим на X произвольную функцию стоимости перемещений для каждой упорядоченной пары элементов из X :

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

где \mathbb{R} — множество действительных чисел. Пусть в X выделено n -элементное подмножество $S = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$, которое мы будем называть далее *исходным множеством вершин*. Сужение функции d на множество S определяет традиционную для задач TSP матрицу стоимостей перемещений между элементами исходного множества.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-08-00484-а, 10-01-96020-р_урал_а) и программы 09-П-1-1014.

Рассмотрим множество $G(n)$ всех перестановок индексов элементов множества S , сохраняющих начальный и конечный индексы:

$$G(n) = \{\gamma : \overline{1, n} \leftrightarrow \overline{1, n} \mid \gamma(1) = 1, \gamma(n) = n\}.$$

Иными словами, мы считаем вершину старта и вершину финиша заданными и неизменными, в связи с чем считаем далее $|S| > 2$. С помощью множества $G(n)$ определим множество $T(S)$ всех маршрутов обхода элементов множества S , проходящих через каждую вершину S ровно один раз, начинающихся в вершине $a_1 \triangleq s$ и заканчивающихся в вершине $a_n \triangleq e$:

$$M_s^e(S) = \{(a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) : \gamma \in G(n)\}.$$

Введем функцию длины $D : M_s^e(S) \rightarrow \mathbb{R}$, где для всякого маршрута $\alpha = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S)$

$$D(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} d(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}). \quad (2)$$

Для произвольного множества вершин $S : |S| < \infty$ с заданными начальной s и конечной e вершинами введем длину оптимального обхода

$$\mathbf{D}_{(s,e)}(S) = \min_{\alpha \in M_s^e(S)} D(\alpha). \quad (3)$$

Все маршруты, длина которых совпадает с $\mathbf{D}_{(s,e)}(S)$, будем называть оптимальными на $M_s^e(S)$. Введем операцию вставки вершины в маршрут. Пусть задан маршрут

$$\alpha = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S),$$

отмечена некоторая позиция в маршруте $i \in \overline{1, n-1}$ и зафиксирован $z \in X \setminus S$, тогда операцией вставки будем называть функцию

$$Ins : (X \setminus S) \times \overline{1, n-1} \times M_s^e(S) \rightarrow \bigcup_{z \in X \setminus S} M_s^e(S \cup \{z\}), \quad (4)$$

определенную как

$$Ins(z, i, (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)})) = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(i)}, z, a_{\gamma(i+1)}, \dots, a_{\gamma(n)}). \quad (5)$$

Далее для компактной записи нам потребуется множество

$$S^* = \{(x, y) \in S^2 \setminus \{(s, e)\} : x \neq y \ \& \ x \neq e \ \& \ y \neq s\}, \quad (6)$$

являющееся множеством всевозможных упорядоченных пар последовательных вершин во всех маршрутах из $M_s^e(S)$. Докажем следующее простое утверждение.

Лемма. Пусть заданы множество X , функция стоимости $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X : |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s, e) \in S^2$. Тогда совокупность всех пар последовательных вершин во всех маршрутах из $M_s^e(S)$ совпадает с множеством S^* :

$$S^* = \{(x, y) \in S^2 \mid \exists \alpha = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S) \exists i \in \overline{1, n-1} : (x = a_{\gamma(i)}) \ \& \ (y = a_{\gamma(i+1)})\} \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in S^*$. Если $x \neq s \ \& \ y \neq e$, то рассмотрим маршрут $\alpha = (s, x, y, b_1, \dots, b_{n-4}, e)$, где $\{b_1, \dots, b_{n-4}\} = S \setminus \{x, y, s, e\}$. Если $x = s \ \& \ y \neq e$, то $\alpha = (x, y, b_1, \dots, b_{n-3}, e)$, где $\{b_1, \dots, b_{n-3}\} = S \setminus \{e, x, y\}$. Наконец, если $x \neq s \ \& \ y = e$,

то $\alpha = (s, b_1, \dots, b_{n-3}, x, y)$, где $\{b_1, \dots, b_{n-3}\} = S \setminus \{s, x, y\}$. Во всех рассмотренных случаях очевидно $\alpha \in M_s^e(S)$, а иные случаи невозможны по построению S^* . Обратно, если $\exists \alpha = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S) \exists i \in \overline{1, n-1} : (x = a_{\gamma(i)}) \& (y = a_{\gamma(i+1)})$, то для (x, y) условия, определяющие множество (6), очевидно выполнены, если только $|S| > 2$. \square

Введем теперь удобные обозначения для длин измененных маршрутов. Пусть, как прежде $\alpha = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S)$, $i \in \overline{1, n-1}$, $z \in X \setminus S$, тогда

$$D(Ins(z, i, \alpha)) = D(\alpha) + \Delta_I(z, a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}), \quad (8)$$

где

$$\forall z \in X \setminus S \quad \forall (x, y) \in S^* \\ \Delta_I(z, x, y) \triangleq d(x, z) + d(z, y) - d(x, y). \quad (9)$$

Для всякой упорядоченной пары из S^* зададим совокупность маршрутов обхода исходного множества вершин S , содержащих заданную пару как ребро

$$\forall (x, y) \in S^* \\ \widetilde{M}_s^e(S, x, y) = \{(a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S) : \exists k \in \overline{1, n-1} \ (x = a_{\gamma(k)}) \& (y = a_{\gamma(k+1)})\}. \quad (10)$$

Для всякого множества вершин $S : |S| < \infty$ с заданными начальной s , конечной e вершинами и фиксированной парой $(x, y) \in S^*$ введем длину оптимального обхода S , содержащего ребро (x, y) :

$$\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) = \min_{\tilde{\alpha} \in \widetilde{M}_s^e(S, x, y)} D(\tilde{\alpha}). \quad (11)$$

Теперь мы готовы сформулировать основное выражение для $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S \cup \{z\})$ через $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$.

Теорема. Пусть заданы множество X , функция стоимости $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X : |S| < \infty$, начальная и конечная вершины $(s, e) \in S^2$, произвольный элемент $z \in X \setminus S$. Тогда

$$\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S \cup \{z\}) = \min_{(x,y) \in S^*} (\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) + \Delta_I(z, x, y)). \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный маршрут обхода множества $S \cup \{z\} : \beta' = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(i)}, z, a_{\gamma(i+1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S \cup \{z\})$, где $\gamma \in G(n)$.

Пусть $\beta = (a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}, \dots, a_{\gamma(n)}) \in M_s^e(S) : \beta' = Ins(z, i, \beta)$, тогда согласно (8)

$$D(\beta') = D(\beta) + \Delta_I(z, a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}).$$

По Лемме $(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}) \in S^*$, кроме того, $(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)})$ является ребром маршрута β , следовательно по (11)

$$\mathbf{D}_{(s,e)}^{(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)})}(S) \leq D(\beta)$$

и отсюда имеет место неравенство

$$\mathbf{D}_{(s,e)}^{(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)})}(S) + \Delta_I(z, a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}) \leq D(\beta'). \quad (13)$$

Вновь учитывая, что $(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}) \in S^*$, имеем

$$\min_{(x,y) \in S^*} (\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) + \Delta_I(z, x, y)) \leq \mathbf{D}_{(s,e)}^{(a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)})}(S) + \Delta_I(z, a_{\gamma(i)}, a_{\gamma(i+1)}). \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\min_{(x,y) \in S^*} (\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) + \Delta_I(z, x, y)) \leq D(\beta').$$

Мы показали, что длина произвольного маршрута обхода $S \cup \{z\}$ не менее правой части (12). Покажем теперь, что найдется маршрут $\beta'_0 \in M_s^e(S \cup \{z\})$, длина которого в точности совпадает с правой частью (12). Пусть минимум в правой части (12) достигается на некоторой паре $(x^0, y^0) \in S^*$. Далее рассмотрим любой из маршрутов $\tilde{\alpha}_0 \in \widetilde{M}_s^e(S, x^0, y^0)$, на котором реализуется минимум в (11) при $(x, y) = (x^0, y^0)$

$$\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x^0, y^0)}(S) = D(\tilde{\alpha}_0).$$

Пусть $\tilde{\alpha}_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \dots, a_{\gamma_0(i_0)}, a_{\gamma_0(i_0+1)}, \dots, a_{\gamma_0(n)})$, где для некоторого $i_0 \in \overline{1, n-1}$ $a_{\gamma_0(i_0)} \triangleq x^0, a_{\gamma_0(i_0+1)} \triangleq y^0$, тогда искомым маршрут β'_0 можно записать как

$$\beta'_0 = \text{Ins}(z, i_0, \tilde{\alpha}_0).$$

Действительно, $\text{Ins}(z, i_0, \tilde{\alpha}_0) \in M_s^e(S \cup \{z\})$, а по построению $\tilde{\alpha}_0$, следуя (8), имеем

$$\begin{aligned} D(\text{Ins}(z, i_0, \tilde{\alpha}_0)) &= D(\tilde{\alpha}_0) + \Delta_I(z, a_{\gamma_0(i_0)}, a_{\gamma_0(i_0+1)}) = \mathbf{D}_{(s,e)}^{(x^0, y^0)}(S) + \Delta_I(z, x^0, y^0) = \\ &= \min_{(x,y) \in S^*} (\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) + \Delta_I(z, x, y)). \end{aligned}$$

□

Следствие (критерий устойчивости). Пусть заданы множество X , функция стоимости $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X : |S| = n$, начальная и конечная вершины $(s, e) \in S^2$, оптимальный маршрут $\alpha_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \dots, a_{\gamma_0(n)}) \in M_s^e(S)$. Тогда для произвольного элемента $z \in X \setminus S$ маршрут $\text{Ins}(z, i, \alpha_0) \in M_s^e(S \cup \{z\})$, где $i \in \overline{1, n-1}$, оптимален тогда и только тогда, когда

$$D(\text{Ins}(z, i, \alpha_0)) = \min_{(x,y) \in S^*} (\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) + \Delta_I(z, x, y)). \quad (15)$$

Обсудим кратко полученный результат. Выражение (15) позволяет нам для каждой тройки («новой» вершины, позиции в маршруте и самого маршрута) выяснить, возможно ли вставить «новую» вершину в данный маршрут на $i + 1$ -ю позицию. Если оптимальный маршрут однажды рассчитан и фиксирован, то наиболее трудоемкий расчет множества n^2 значений $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$ можно проделать однажды, после чего для произвольного $z \in X \setminus S$ проверка возможности включения элемента z в существующий оптимальный маршрут займет не более $O(n^2)$ операций.

Сформулируем теперь алгоритм, с помощью которого в следующем разделе будут построены несколько примеров оптимальных маршрутов на евклидовой плоскости с соответствующими их ребрам областями устойчивости.

Алгоритм

1. Пусть задано конечное множество $X : |X| < \infty$, функция стоимости $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, исходное множество вершин $S \subset X : |S| = n$, начальная и конечная вершины $(s, e) \in S^2$ и оптимальный маршрут $\alpha_0 = (a_{\gamma_0(1)}, \dots, a_{\gamma_0(n)}) \in M_s^e(S)$. Пусть, кроме того, каждому ребру $(a_{\gamma_0(i)}, a_{\gamma_0(i+1)})$ маршрута α_0 , где $i \in \overline{1, n-1}$, поставлен в соответствие свой «цвет» $C_i \in \mathbb{N}$.

2. Для всякого $(x, y) \in S^*$ рассчитаем $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$. Такой расчет можно провести, используя любой метод решения задачи поиска оптимального маршрута обхода множества S , выбирая при этом стоимость перехода $d(x, y)$ достаточно маленьким отрицательным числом так, чтобы все маршруты, содержащие ребро (x, y) , гарантированно имели меньшую длину, чем маршруты, это ребро не содержащие. Например, переопределим функцию d :

$$\forall (a, b) \in X^2 \setminus \{(x, y)\} \quad \tilde{d}(a, b) \triangleq d(a, b)$$

$$\tilde{d}(x, y) \triangleq - \sum_{i,j=1}^n |d(a_i, a_j)|.$$

От полученного выражения для $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$ потребуется лишь отнять величину $\tilde{d}(x, y)$ и добавить исходное значение $d(x, y)$. Следует заметить, что предложенный метод нахождения $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$ неединственен и неоптимален, так как мы не используем сужение области допустимых маршрутов при фиксации ребра (x, y) .

3. Для всякого $z \in X \setminus S$:

(а) рассчитаем

$$D^* = \min_{(x,y) \in S^*} (\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S) + \Delta_I(z, x, y)); \quad (16)$$

(б) переберем позиции $i \in \overline{1, n-1}$ в оптимальном маршруте α_0 . Если $\exists i_0 \in \overline{1, n-1} : D(\text{Ins}(z, i_0, \alpha_0)) = D^*$, то $\text{Ins}(z, i_0, \alpha_0)$ – оптимальный маршрут на $M_s^e(S \cup \{z\})$; отметим в этом случае точку z «цветом» C_{i_0} . Иначе z невозможно вставить в маршрут α_0 с сохранением оптимальности.

Предложение. Верхнюю асимптотическую оценку вычислительной сложности Алгоритма можно записать как $O(n^{42^n} + n^2|X|)$.

Доказательство. На шаге 2 Алгоритма нам потребуется вычислить $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$ для всякого $(x, y) \in S^*$. Как мы показали выше, вычисление $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$ можно свести к решению задачи коммивояжера размерности $|S| = n$. Вычислительная сложность этой задачи не превышает $O(n^2 2^n)$ [12]. Мощность множества S^* не превосходит n^2 , следовательно, суммарную вычислительную сложность шага 2 Алгоритма можно оценить сверху выражением $O(n^{42^n})$.

На шаге 3а Алгоритма для всякого $z \in X \setminus S$ производится расчет минимума (16), что потребует $O(n^2)$ операций. На шаге 3б производится перебор $n-1$ ребра оптимального маршрута, что потребует $O(n)$ операций. Следовательно, вычислительную сложность шага 3 можно оценить как $(O(n^2) + O(n))|X| = O(n^2|X|)$. Суммируя вычислительную сложность шагов 2 и 3, имеем оценку: $O(n^{42^n} + n^2|X|)$.

Следует отметить, что вычислительная сложность дается здесь с точностью до логарифмического множителя, обычного при использовании алгоритмов поиска, которые будут неизбежно возникать в явном или неявном виде при учете значений $\mathbf{D}_{(s,e)}^{(x,y)}(S)$ в расчете (16). \square

Решая задачу построения области устойчивости «перебором по X » — с помощью вычисления для каждого $z \in X \setminus S$ оптимального маршрута за $O((n+1)^2 2^{n+1})$ операций, мы бы получили вычислительную сложность проверки устойчивости на всем X порядка $O((n+1)^2 2^{n+1}|X|)$. Данное выражение существенно превосходит полученное в Предложении $O(n^{42^n} + n^2|X|)$ при естественном условии $|X| \gg n^2$ (например, в экспериментах следующего раздела $|X| = 160000$, $n^2 \leq 2500$).

§ 2. Эксперименты

В настоящем разделе мы используем Алгоритм раздела 1 для построения областей устойчивости оптимального маршрута обхода вершин, заданных координатами на евклидовой плоскости. Везде в экспериментах

$$\begin{aligned}
 X &= \{(x, y) : x, y \in \overline{1, 400}\}; \\
 \forall (a_x, a_y), (b_x, b_y) \in X \quad d(a, b) &= \left[\sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2} \right] \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \\
 \forall S \subset X \quad \forall i \in \overline{1, |S| - 1} \quad C_i &\in \overline{1, 255}.
 \end{aligned}$$

Задача коммивояжера решалась всякий раз при помощи программы Concorde TSP Solver [13], использующей инструментарий целочисленного линейного программирования. Именно это обусловило необходимость выбора натуральных значений функции d . Результаты экспериментов для 5, 10, 20, 30, 40 и 50 вершин приводятся на Рисунке 1.

Отметим, что с формой областей неустойчивости (белые области на рисунках) не всегда легко интуитивно согласиться. Для наглядности на Рисунке 2 приведена последовательность экспериментов, в которых количество вершин возрастает от 6 до 10, при этом всякий раз новая вершина добавляется в область неустойчивости, построенную для существующих вершин. Таким образом, можно проследить, как разрушается существующий оптимальный маршрут при «неустойчивом добавлении» новых вершин.

Заключение

В статье рассматривались необходимые и достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении одной вершины. Предложенный метод целесообразно использовать в случае, когда требуется проверить возможность устойчивого включения «новой вершины» в существующий оптимальный маршрут для большого количества возможных «новых вершин». Действительно, расчет оптимальных маршрутов, содержащих заданное ребро, для всякого ребра по сути требует решения n^2 задач коммивояжера (по количеству ребер), однако после того как данные вычисления проведены, мы в состоянии установить возможность устойчивого включения произвольной вершины в существующий маршрут за $O(n^2)$ операций.

Похожим образом можно сформулировать критерии устойчивости в случае удаления или перемещения вершины, что станет предметом будущей работы. Кроме того, планируется изучить возможность применения схожего инструментария к исследованию устойчивости иных задач комбинаторной оптимизации при изменении мощности множеств начальных данных, в частности, предполагается исследовать устойчивость задачи оптимального распределения заданий при изменении количества распределяемых заданий.

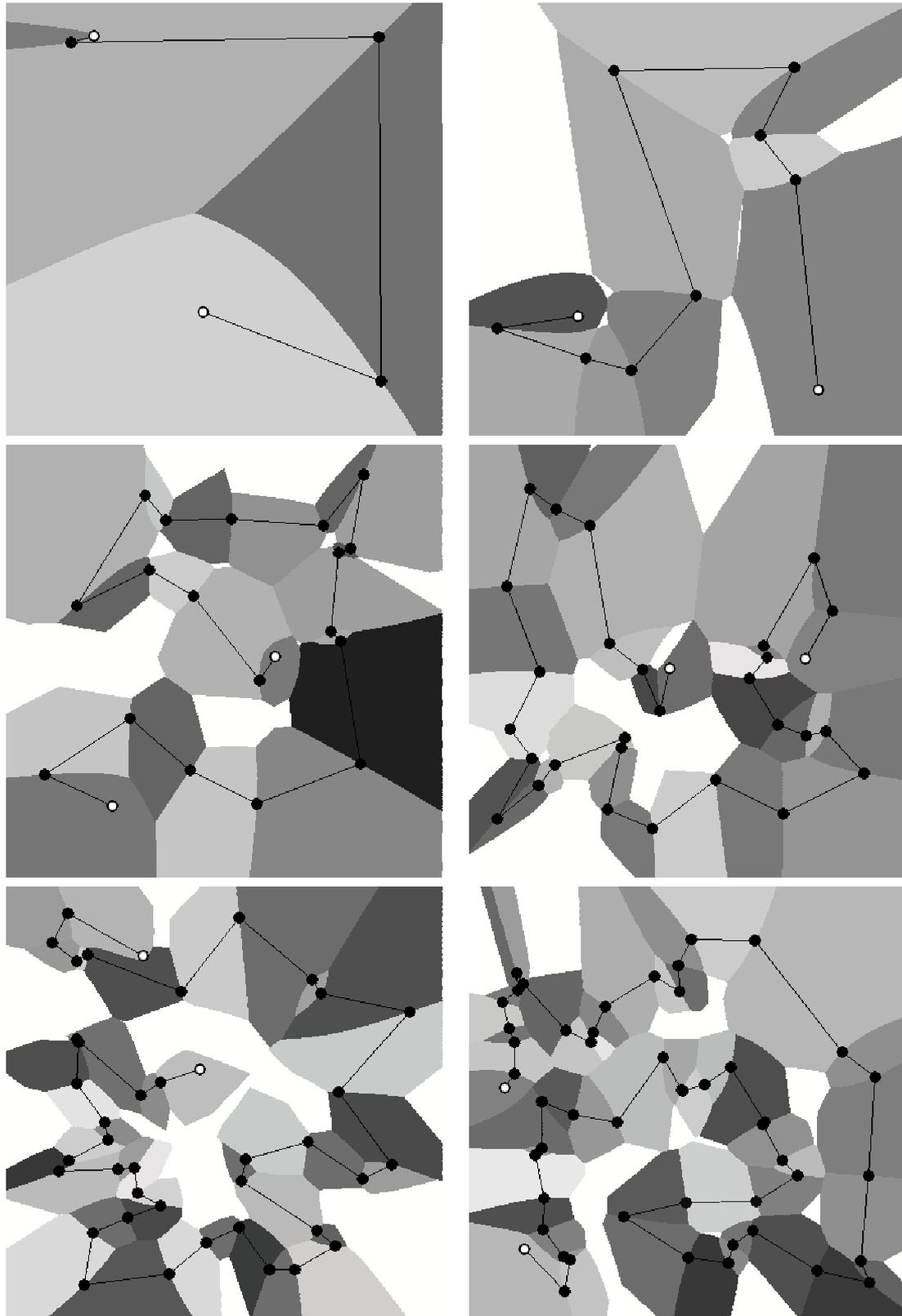


Рисунок 1. Примеры областей устойчивости для задачи коммивояжера на евклидовой плоскости. Выколотыми кружками обозначены фиксированные начало и конец маршрута. Каждому ребру поставлена в соответствие область плоскости определенного цвета. Добавление новой вершины внутрь области на позицию с целыми координатами позволяет включить добавленную вершину между началом и концом соответствующего данной области ребра существующего оптимального маршрута с сохранением оптимальности.

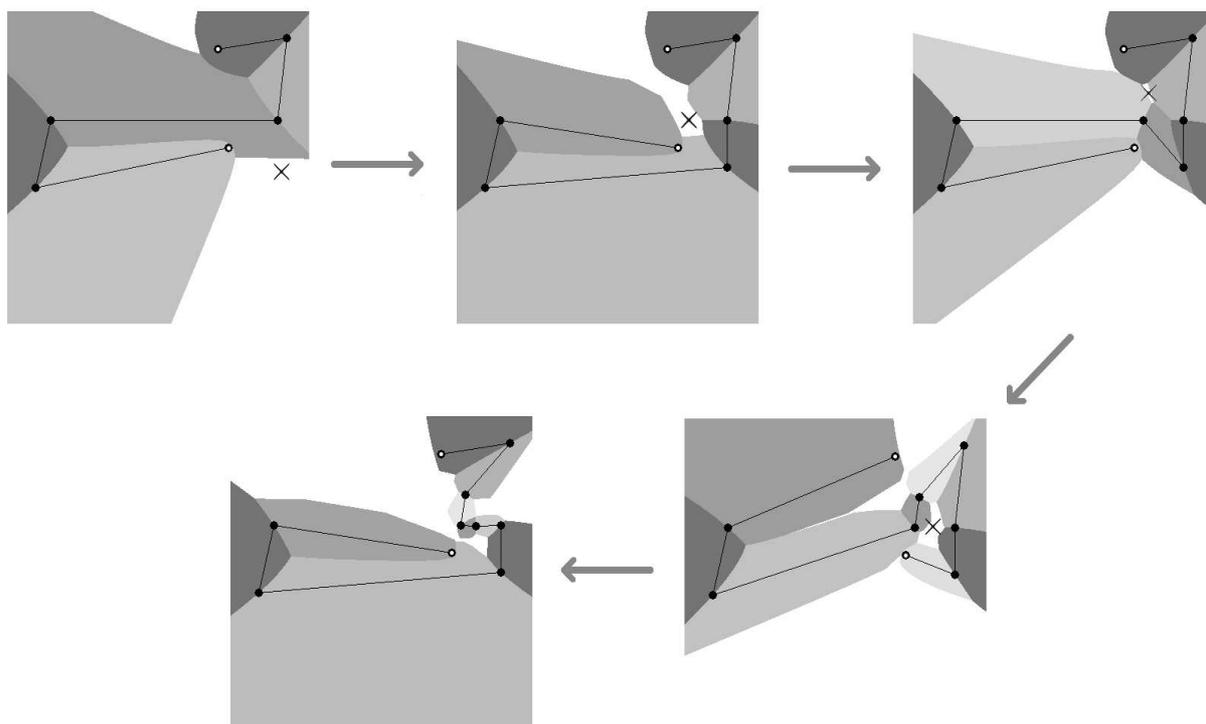


Рисунок 2. На рисунках демонстрируется разрушение оптимального порядка при последовательном добавлении вершин в области неустойчивости оптимального маршрута (белая область, не покрытая ни одной из областей устойчивости). Крестиком обозначается точка на плоскости, в которую на следующем шаге добавляется новая вершина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // *АиТ*. — 1989. — № 9. — С. 3-34.
2. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // *АиТ*. — 1989. — № 10. — С. 3-29.
3. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // *АиТ*. — 1989. — № 11. — С. 3-26.
4. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // *АиТ*. — 2004. — № 2. — С. 79-92
5. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // *Discrete Applied Mathematics*. — 1995. — Vol. 58. — P. 169-190.
6. Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // *Кибернетика и системный анализ*. — 2005. — Т. 41, № 4. — С. 89-100.
7. Девятерикова М. В., Колоколов А. А. Об устойчивости некоторых алгоритмов целочисленного программирования // *Изв. вузов. Матем.* — 2003. — № 12. — С. 41-48.
8. Poort E. S. Aspects of sensitivity analysis for the traveling salesman problem: PhD dissertation, University of Groningen. — Groningen, 1997. — 191 p.
9. Леонтьев В. К. Устойчивость задачи коммивояжера // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. — 1975. — Т. 15, №5 — С. 1298-1409.
10. Libura M., van der Poort E. S., Sierksma G., van der Veen J. A. Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions // *Discrete Applied Mathematics*. — 1998. — Vol. 87. — P. 159-185.
11. Иванко Е. Е. Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. — 2010. — №1. — С. 46-56.

12. Bellman R. Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem // J. Assoc. Comput. Mach. — 1962. — №9. — P. 61–63.
13. Concorde TSP Solver.
<http://www.tsp.gatech.edu/concorde/index.html>

Поступила в редакцию 04.08.10

E. E. Ivanko

Criterion of the stability of optimal route in the Travelling Salesman Problem in case of a single vertex addition

The criterion for the stability of optimal travelling salesman route in case of the insertion of a new vertex between two consequent vertexes is deduced. Number of experiments demonstrating stability areas are suggested for the Euclidean plane.

Keywords: travelling salesman problem, stability.

Mathematical Subject Classifications: 90C27

Иванко Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник отдела управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16, E-mail: ivanko@ural.ru