УДК 517.935 + 517.938

© ***Л. И. Родина, Е. Л. Тонков***

СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

Получены условия, позволяющие оценивать относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в некотором заранее заданном множестве. Если относительная частота пребывания в этом множестве равна единице, то данное множество называется статистически инвариантным. Получены также условия, при которых заданное множество статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы, то есть для каждой начальной точки из этого множества по крайней мере одно решение управляемой системы, статистически инвариантно. Предполагается, что образы правой части дифференциального включения, отвечающего данной управляемой системе, замкнуты, но не обязательно компактны. Основные утверждения формулируются в терминах функций Ляпунова, метрики Хаусдорфа–Бебутова и динамической системы сдвигов, сопутствующей правой части дифференциального включения.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, слабо инвариантные и статистически слабо инвариантные множества.

Введение

Вопрос о существовании слабо инвариантных множеств имеет важное значение во многих задачах управления, в частности в задачах управления, возникающих в экономике. Основное требование к управлению системами, относящимися к экономическим системам, состоит в том, чтобы не нарушать заданных ограничений на множество допустимых управлений. Но если по ряду причин такие нарушения все-таки происходят и всякая траектория движения уходит из множества, обусловленного ограничениями, то надо научиться управлять таким образом, чтобы относительная частота попадания оптимальной траектории в данное множество равнялась единице. Одна из возможных математических постановок этой задачи состоит в том, чтобы научиться вычислять относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве M; если эта частота равна единице, то множество M будем называть *статистически инвариантным.* Не менее важно научиться строить для каждой начальной точки множества M такое управление, что решение управляемой системы при заданном управлении статистически инвариантно. В этом случае множество M будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы.

В этой статье мы продолжаем исследования, начатые в работах [1–4] и распространяем полученные в [4] теоремы о статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множествах на дифференциальные включения без предположения компактности образов правой части. Основные утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа—Бебутова, введенной в [1,3] и динамической системы (Σ, h^t), сопутствующей правой части дифференциального включения.

Кроме того, получены условия, позволяющие оценивать относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad \sigma \in \Sigma,$$

[1]Работа выполнена по программе фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления» и при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00380).

в заданном множестве $M(h^t\sigma)$ через характеристику $\varkappa(\sigma)$, называемую нами *относительной частотой попадания* верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0)=0, \quad t \geqslant 0$$

в множество $(-\infty, 0]$. Утверждения о статистической инвариантности и слабой статистической инвариантности множества M сформулированы в терминах функций Ляпунова и производной Ф. Кларка данной функции. Также получены условия, при которых характеристика $\varkappa(\sigma)$ равна единице в предположении, что $w(\sigma,z)=a(\sigma)z+b(\sigma)$, а точка σ периодична или почти периодична.

§ 1. Управляемые системы и дифференциальные включения

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t). Это означает, что на полном метрическом пространстве Σ с метрикой ρ_Σ задана *однопараметрическая группа преобразований* h^t пространства Σ в себя (то есть при всех $t,s\in\mathbb{R}$ выполнено равенство $h^{t+s}=h^t\circ h^s$), удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0}=\sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t,σ) на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$ (см., например, [5, гл. 5], [6, с. 204–227]). Пространство Σ называется *фазовым пространством* динамической системы (Σ, h^t), функция $t\to h^t\sigma$ — *движением* точки σ, функция $h^t:\Sigma\to\Sigma$ — *потоком* на фазовом пространстве Σ, а

$$\operatorname{orb}(\sigma)\doteq\{h^t\sigma : t\in\mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \operatorname{orb}_+(\sigma)\doteq\{h^t\sigma : t\geqslant 0\}$$

— *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство [2] размерности n со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\varrho(x,M)\doteq\min\limits_{y\in M}|x-y|$ — расстояние от точки $x\in\mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$, $O_r(x_0)\doteq\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|\leqslant r\}$ — замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r>0$ с центром в точке x_0. Обозначим через $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа, подпространство в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* компактных подмножеств, обозначим через $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, пространство всех непустых *выпуклых замкнутых* (не обязательно ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ — через $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Для заданного множества $U\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ введем в рассмотрение пространство с мерой $(U,\mathfrak{A},\eta)$, где $\mathfrak{A}$ — борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — мера Радона, сосредоточенная на множестве U (имеет в качестве носителя множество U). Мерой Радона с носителем U называется конечная регулярная счетно-аддитивная функция $\eta: A\to\mathbb{R}$ множеств $A\in\mathfrak{A}$. Мера η называется *регулярной*, если для любых $A\in\mathfrak{A}$ и $\varepsilon>0$ существуют открытое и замкнутое множества B и C такие, что $B,C\in\mathfrak{A}$, $C\subset A\subset B$ и $\eta(B\setminus C)\leqslant\varepsilon$. Положительная регулярная мера η называется *вероятностной* мерой, если $\eta(U)=1$. Обозначим через $\operatorname{frm}(U)$ пространство мер Радона с носителем в U, через $\operatorname{rpm}(U)$ обозначим подмножество в $\operatorname{frm}(U)$, состоящее из вероятностных мер Радона.

Предположим, что фиксирована топологическая динамическая система (Σ,h^t). Будем говорить, что задано *семейство управляемых систем*, если заданы непрерывная функция $f(\sigma,x,u)$ переменных $(\sigma,x,u)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ (задающая динамику управляемой системы) и функция $U(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ со значениями в $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ (задающая геометрические ограничения на управления).

Определение 1. *Допустимым процессом* (см. [8]) управляемой системы при фиксированном $\sigma\in\Sigma$ называется всякая функция $t\to(\varphi(t,\sigma),\eta_t)$ переменного t, определенная на полуинтервале $[0,\tau)$ и удовлетворяющая следующим двум условиям:

[2]То есть евклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом [7].

1) управление $t \to \eta_t$ является измеримой по Лебегу [3] мерозначной функцией со значениями в пространстве $\mathrm{rpm}(U(t))$ вероятностных мер Радона с носителем

$$U(t) \doteq U(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma));$$

2) функция $t \to \varphi(t,\sigma)$ является абсолютно непрерывным решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0,\tau), \tag{1}$$

где $[0,\tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (1).

В дальнейшем в этой статье будем рассматривать только такие допустимые процессы, которые определены на полуоси $\mathbb{R}_+ \doteq [0,\infty)$. Далее, допуская некоторую вольность, допустимые процессы $(\varphi(t,\sigma),\eta_t)$ будем называть *допустимыми процессами управляемой системы* (1).

По функциям f и U построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma,x) = \mathrm{co}\{y \in \mathbb{R}^n : \, y = f(\sigma,x,u), \, u \in U(\sigma,x)\}, \tag{2}$$

где $\mathrm{co}\, G$ — замыкание выпуклой оболочки множества G. Между управляемой системой (1) и включением (2) существует следующая связь (см. например, [8, с. 404]). Если $(\varphi(t),\eta_t)$ — допустимый процесс системы (1), то $\varphi(t)$ — решение включения (2). При некоторых дополнительных предположениях верно и обратное: если $\varphi(t)$ — решение включения (2), то найдется такое управление $\eta_t \in \mathrm{rpm}(U(t))$, что $(\varphi(t),\eta_t)$ — допустимый процесс системы (1).

Основным объектом нашего исследования служит так называемое множество достижимости управляемой системы (1) или, что эквивалентно, дифференциального включения (2), отвечающего системе (1).

Определение 2. Каждому множеству $X \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $A(t,\sigma,X)$, состоящее из всех значений в момент времени t решений $t \to \varphi(t,\sigma,x_0)$ включения (2), когда начальное условие $x(0) = x_0$ пробегает все множество X. Множество $A(t,\sigma,X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (2). Оно называется *множеством достижимости* управляемой системы (1) в момент времени t из начального множества X.

§ 2. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$

В этом параграфе (написанном при участии Е. А. Панасенко) приведены основные свойства пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженного метрикой Хаусдорфа—Бебутова и доказано утверждение о замкнутости графика полунепрерывного сверху многозначного отображения.

2.1. Полуотклонения и метрика Хаусдорфа—Бебутова

Известно, что пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ является полным в метрике Хаусдорфа (см. [9, § 14]). В работах [1, 3] показано, что и в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ можно определить метрику, относительно которой $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ является полным метрическим пространством. Такая метрика принимает только конечные значения даже для неограниченных множеств и названа метрикой Хаусдорфа—Бебутова.

Напомним основные определения. Пусть $F \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и f_0 — точка множества F, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$, тогда $|f_0| = \min\limits_{f\in F}|f|$. Если, кроме того, задано множество $G \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $|g_0| = \min\limits_{g\in G}|g|$, то введем в рассмотрение компактные при каждом $r \in [0,\infty)$ множества $F_r = F\bigcap O_r(f_0)$, $G_r = G\bigcap O_r(g_0)$, полуотклонения

$$d(F_r,G_r), \quad d(G_r,F_r),$$

[3]Это означает, что для всякой непрерывной функции $a(t,u)$ переменных (t,u) функция $t \to \langle\eta_t,a\rangle$, где $\langle\eta_t,a\rangle \doteq \int_{U(t)} a(t,u)\eta_t(du)$, измерима по Лебегу.

где $d(F_r,G_r)=\max\limits_{f\in F_r}\varrho(f,G_r)$, $d(G_r,F_r)=\max\limits_{g\in G_r}\varrho(g,F_r)$ и метрику Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(F_r,G_r)\doteq\max\bigl(d(F_r,G_r),d(G_r,F_r)\bigr). \tag{3}$$

Пусть $F,G\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, введем в рассмотрение два полуотклонения (две полуметрики)

$$D(F,G)=\sup_{r>0}\min\Bigl\{d(F_r,G_r),\ 1/r\Bigr\},\quad D(G,F)=\sup_{r>0}\min\Bigl\{d(G_r,F_r),\ 1/r\Bigr\}$$

и расстояние

$$\operatorname{Dist}(F,G)=\max\bigl\{D(F,G),\ D(G,F)\bigr\}, \tag{4}$$

которое названо метрикой Хаусдорфа—Бебутова. Из определения (4) следует, что расстояние $\operatorname{Dist}(F,G)$ задается равенством $\sup\limits_{r>0}\min\bigl\{\operatorname{dist}(F_r,G_r),1/r\bigr\}$, где $\operatorname{dist}(F_r,G_r)$ — метрика Хаусдорфа (3). Следовательно, неравенство $\operatorname{Dist}(F,G)\leqslant\varepsilon$ эквивалентно неравенству $\operatorname{dist}(F_r,G_r)\leqslant\varepsilon$, выполненному при всех $r\in[0,1/\varepsilon]$. Аналогично, неравенство $D(F,G)\leqslant\varepsilon$ эквивалентно неравенству $d(F_r,G_r)\leqslant\varepsilon$, выполненному при всех $r\in[0,1/\varepsilon]$.

Расстояние (4) удовлетворяет всем аксиомам метрики, то есть справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любых $F,G,Q\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ имеют место следующие свойства:*
1. $0\leqslant D(F,G)<\infty$ *и равенство $D(F,G)=0$ выполнено в том и только в том случае, если $F\subseteq G$ и $f_0=g_0$, где $|f_0|=\min\limits_{f\in F}|f|$, $|g_0|=\min\limits_{g\in G}|g|$.*
2. *Имеют место неравенства треугольника*

$$D(F,G)\leqslant D(F,Q)+D(Q,G),\quad D(G,F)\leqslant D(G,Q)+D(Q,F).$$

3. $0\leqslant\operatorname{Dist}(F,G)=\operatorname{Dist}(G,F)<\infty$ *и равенство нулю $\operatorname{Dist}(F,G)=0$ выполнено в том и только в том случае, если $F=G$.*
4. *Имеет место неравенство треугольника*

$$\operatorname{Dist}(F,G)\leqslant\operatorname{Dist}(F,Q)+\operatorname{Dist}(Q,G).$$

2.2. Основные свойства пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$

Определение 3. Будем говорить, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$, где $F^i\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *сходится к множеству $F\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ равномерно на компактах* в $\mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon>0$, всех $r\in[0,1/\varepsilon]$ и всех, достаточно больших индексов i, имеют место неравенства $\operatorname{dist}(F_r^i,F_r)\leqslant\varepsilon$, означающие одновременное выполнение двух включений

$$F_r^i\subseteq F_r+O_\varepsilon(0),\quad F_r\subseteq F_r^i+O_\varepsilon(0).$$

Здесь, как и прежде, $F_r\doteq F\bigcap O_r(f_0)$, $F_r^i\doteq F^i\bigcap O_r(f_0^i)$, где $|f_0|=\min\limits_{f\in F}|f|$, $|f_0^i|=\min\limits_{f\in F^i}|f|$, $O_r(f_0)$, $O_r(f_0^i)$ — замкнутые шары радиуса r с центрами в точках f_0 и f_0^i.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ такова, что $F^i\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ при всех $i\in\mathbb{N}$. Тогда равенство $\lim\limits_{i\to\infty}\operatorname{Dist}(F^i,F)=0$ обеспечивает равномерную на компактах в $\mathbb{R}^n$ сходимость последовательности $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ к множеству $F\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.*

Определение 4. Будем говорить, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$, где $F^i\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел сверху* $F^*\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любых $\varepsilon>0$ и $r\in(0,1/\varepsilon]$ и каждого, достаточно большого индекса i, имеют место два включения

$$f_0^i\in O_\varepsilon(f_0^*)\quad\text{и}\quad F_r^i\subseteq F_r^*+O_\varepsilon(0).$$

В свою очередь, мы говорим, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел снизу* $F_* \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любых $\varepsilon > 0$, $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого, достаточно большого i, имеют место два включения

$$f_{*0} \in O_\varepsilon(f_0^i) \quad \text{и} \quad F_{*r} \subseteq F_r^i + O_\varepsilon(0).$$

Лемма 3. *Пусть задана последовательность* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *такая, что* $F^i \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда равенство*

$$\lim_{i\to\infty} D(F^i, F^*) = 0,$$

где $F^* \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *обеспечивает равномерный на компактах предел сверху, а равенство*

$$\lim_{i\to\infty} D(F_*, F^i) = 0,$$

где $F_* \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *обеспечивает равномерный на компактах предел снизу.*

Обозначим $p = (\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и рассмотрим функцию $p \to F(p)$, принимающую значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Напомним, что графиком функции $p \to F(p)$ называется множество

$$G \doteq \{(p, f) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : f \in F(p)\}.$$

Через $f_0(p)$ обозначим точку множества $F(p)$, ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ и будем рассматривать функцию $p \to f_0(p)$. Обозначим также через $O_\delta(p_0)$ замкнутую окрестность точки $p_0 = (\sigma_0, x_0)$, то есть

$$O_\delta(p_0) = \{p \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) + |x - x_0| \leqslant \delta\}.$$

Далее будем пользоваться определениями полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа—Бебутова.

Определение 5. Функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ называется *полунепрерывной сверху в точке* p_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек p множества $O_\delta(p_0)$ полуотклонение $D(F(p), F(p_0))$ не превосходит ε. Функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ называется *полунепрерывной снизу в точке* p_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что полуотклонение $D(F(p_0), F(p))$ не превосходит ε для всех $p \in O_\delta(p_0)$. Далее, если функция $F(p)$ одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке p_0, то она называется непрерывной (в точке p_0). Обычным образом понимается полунепрерывность сверху, снизу и непрерывность на множестве $\Sigma \times \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Функция* $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху в точке* p_0 *в метрике Хаусдорфа—Бебутова тогда и только тогда, когда для некоторой окрестности* $O_\delta(p_0)$ *график данной функции является замкнутым множеством и функция* $p \to f_0(p)$ *непрерывна в точке* p_0.

Доказательство. Предположим, что функция $p \to F(p)$ полунепрерывна сверху в точке $p_0 \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ в метрике Хаусдорфа—Бебутова. Это означает, что полуотклонение $D(F(p^i), F(p_0)) \to 0$ при $p^i \to p_0$; тогда, в силу леммы 3, последовательность $\{F(p^i)\}_{i=1}^{\infty}$ имеет равномерный на компактах предел сверху $F(p_0) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, то есть, для любых $\varepsilon > 0$ и $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого, достаточно большого индекса i, имеют место включения

$$f_0(p^i) \in O_\varepsilon(f_0(p_0)) \quad \text{и} \quad F_r(p^i) \subseteq F_r(p_0) + O_\varepsilon(0), \tag{5}$$

где $F_r(p) \doteq F_r(p) \bigcap O_r(f_0(p))$. Первое включения означает, что функция $p \to f_0(p)$ непрерывна в точке p_0, а второе означает, что функция $p \to F_r(p)$ полунепрерывна сверху в точке p_0 в метрике Хаусдорфа.

Покажем, что функция $p \to F_r(p)$ ограничена в некоторой окрестности $O_\delta(p_0)$. Предположим, что это не так, тогда найдутся такие точки $p^i \in O_\delta(p_0)$ и $f_r(p^i) \in F_r(p^i)$, что $|f_r(p^i)| \to \infty$ при $i \to \infty$. Из построения множества $F_r(p^i)$ следует, что для произвольной точки $f_r(p^i)$ из $F_r(p^i)$ и ближайшей к нулю точки $f_0(p^i)$ данного множества выполнено неравенство $|f_r(p^i) - f_0(p^i)| \leqslant r$, поэтому из условия $|f_r(p^i)| \to \infty$ следует, что $|f_0(p^i)| \to \infty$ при $i \to \infty$. Из включения (5) получаем неравенство $|f_0(p^i)| \leqslant |f_0(p_0)| + \varepsilon$, которое противоречит предположению $|f_r(p^i)| \to \infty$. Поскольку функция $p \to F_r(p)$ полунепрерывна сверху и ограничена в окрестности точки p_0, то график данной функции, то есть множество

$$G_r \doteq \big\{(p, f) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in O_\delta(p_0),\ f \in F_r(p)\big\}$$

является замкнутым множеством (см. [10, с. 53], [11, с. 204]). Возьмем $r = m \in \mathbb{N}$ и отметим, что график G функции $p \to F(p)$ можно представить через объединение $G = \bigcup\limits_m G_m$ конечного или бесконечного числа замкнутых множеств G_m. Если $G = \bigcup\limits_{m=0}^{m_0} G_m$, то множество G замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств. Пусть $G = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} G_m$ не является замкнутым, тогда существует сходящаяся последовательность точек $\{g^i\}_{i=1}^{\infty}$, $g^i = (p^i, f^i) \in G$, $f^i \in F(p^i)$ такая, что $p^i \to p_0$, $f^i \to f_0$ при $i \to \infty$ и $f_0 \notin F(p_0)$. Каждой точке $f^i \in F(p^i)$ поставим в соответствие точку f_0^i — ближайшую к нулю точку множества $F(p^i)$. Поскольку функция $p \to f_0(p)$ непрерывна в точке p_0, то последовательность $\{f_0^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к точке $f_0(p_0)$, ближайшей к нулю точке множества $F(p_0)$; следовательно, сходится и последовательность норм $\{|f^i - f_0^i|\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначим через m_1 наименьшее целое число, ограничивающее данную последовательность, тогда для всех i имеет место включение $f^i \in F_{m_1}(p^i)$, которое означает, что точка $g^i = (p^i, f^i)$ содержится в замкнутом множестве G_{m_1}. Следовательно, предельная точка $g = (p_0, f_0)$ принадлежит множеству G_{m_1}, которое содержится в G.

Предположим, что график G функции $p \to F(p)$, $p \in O_\delta(p_0)$ является замкнутым множеством и функция $p \to f_0(p)$ непрерывна в точке p_0. Обозначим

$$H_r(f_0(p)) \doteq \big\{(p, f) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in O_\delta(p_0),\ f \in O_r(f_0(p))\big\},$$

где $O_r(f_0(p))$ — замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке $f_0(p)$. Поскольку функция $f_0(p)$ непрерывна в точке p_0 и множество $O_\delta(p_0)$ замкнуто, то множество $H_r(f_0(p))$ замкнуто. Отметим, что график функции $p \to F_r(p)$ можно представить в виде $G_r = G \bigcap H_r(f_0(p))$, поэтому он также является замкнутым множеством для каждого $r \in [0, \infty)$. Из ограниченности $F_r(p)$ в окрестности $O_\delta(p_0)$ следует, что для любого $r \in [0, \infty)$ функция $p \to F_r(p)$ полунепрерывна сверху в точке p_0 в терминах метрики Хаусдорфа. Из определения полуотклонений D отсюда следует полунепрерывность сверху функции $p \to F(p)$ в точке p_0 в метрике Хаусдорфа—Бебутова. □

Аналогично теореме 1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 4. *Функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху на замкнутом множестве $P \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}^n$ в метрике Хаусдорфа—Бебутова тогда и только тогда, когда график данной функции является замкнутым множеством и функция $p \to f_0(p)$ непрерывна на множестве P.*

§ 3. Функции Ляпунова

В этом параграфе мы рассмотрим свойства функций Ляпунова, необходимые для дальнейшего. Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и задано подмножество $M = \Sigma \times M(\sigma)$ пространства Ω, где функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа—Бебутова. Построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ и внешнюю r-окрестность

$$N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$$

границы множества $M(\sigma)$.

Для формулировки основных результатов введем ряд обозначений и определений.

Определение 6. Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $M\subseteq\Omega$), если она локально липшицева по (σ,x) и выполнены следующие условия:
1) $V(\sigma,x)\leqslant 0$ при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times M(\sigma)$;
2) $V(\sigma,x)>0$ для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times N_+^r(\sigma)$.

Определение 7. Функцию $(\sigma,x)\to V(\sigma,x)$, определенную при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$, будем называть *бесконечно большой*, если для каждого $\sigma\in\Sigma$ и любой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $|x_i|\to\infty$, выполнено равенство $\lim\limits_{i\to\infty}V(\sigma,x_i)=+\infty$.

Определение 8. Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q\in\mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка, см. [12, с. 17]) будем называть следующий верхний предел:

$$V^o(\sigma,x;q)\doteq\limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)}\frac{V(h^{\varepsilon}\vartheta,y+\varepsilon q)-V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\doteq\inf_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q),\quad V^o_{\max}(\sigma,x)\doteq\sup_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q)$$

— *нижней и верхней производной* функции V в силу включения (2).

Имеют место необходимые для дальнейшего следующие свойства функции Ляпунова.

Лемма 5 (лемма 4 работы [1], лемма 3 работы [4]). *Имеют место равенства*

$$V^o_{\min}(\sigma,x)=\inf_{u\in U(\sigma,x)}V^o\big(\sigma,x;f(\sigma,x,u)\big),\quad V^o_{\max}(\sigma,x)=\sup_{u\in U(\sigma,x)}V^o\big(\sigma,x;f(\sigma,x,u)\big).$$

§ 4. Условия продолжаемости решений дифференциального включения

В этом параграфе выясним условия, при которых для каждой точки $\sigma\in\Sigma$ и любого начального условия $x_0\in\mathbb{R}^n$ существует решение $t\to\varphi(t;\sigma,x_0)$ задачи

$$\dot{x}\in F(h^t\sigma,x),\quad x(0)=x_0, \tag{6}$$

где $F(\sigma,x)=\operatorname{co}\{y\in\mathbb{R}^n: y=f(\sigma,x,u),\, u\in U(\sigma,x)\}$, определенное при всех $t\in\mathbb{R}_+$. Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1. Функция $(\sigma,x)\to U(\sigma,x)$ со значениями в $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ *полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа-Бебутова* при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$.

Напомним, что *верхним решением* скалярной задачи Коши

$$\dot{z}=w(h^t\sigma,z),\quad z(0,\sigma)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{7}$$

называется такое решение $z^*(t,\sigma)$, что для любого другого решения $z(t,\sigma)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t,\sigma)\geqslant z(t,\sigma)$. Если правая часть $w(\sigma,z)$ непрерывна, то верхнее решение существует (см. [13], [14, с. 38]). Аналогично определяется нижнее решение, которое тоже существует.

Обозначим через $S_\varrho\doteq\{x\in\mathbb{R}^n: |x|\geqslant\varrho\}$ внешность сферы радиуса ϱ. Следующее утверждение является аналогом теоремы Ла-Салля [15, с. 276].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1, *для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *существуют непрерывные скалярные функции* $V(\sigma, x)$ *и* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, *удовлетворяющие условиям:*

1) *для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *верхнее решение* $z^*(t, \sigma)$ *задачи* (7) *определено при всех* $t \geqslant 0$;

2) *для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *функция* $V(\sigma, x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times S_\varrho$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{8}$$

Тогда при каждом $\sigma \in \Sigma$ *для каждой точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует решение включения* (2), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0, \sigma) = x_0$ *и продолжаемое на полуось* $\mathbb{R}_+$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся следующие обозначения и утверждения. Для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times S_\varrho$ определим множество $\widehat{U}(\sigma, x)$ равенством

$$\widehat{U}(\sigma, x) \doteq \big\{\, u \in U(\sigma, x) : V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big) \big\}.$$

Отметим, что при любых фиксированных $(\sigma, x) \in \Sigma \times S_\varrho$ множество $\widehat{U}(\sigma, x)$ замкнуто (но не обязательно компактно). Действительно, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $u_i \in \widehat{U}(\sigma, x)$ и $u_i \to u$, то $f(\sigma, x, u_i) \to f(\sigma, x, u)$ и в силу липшицевости функции $q \to V^o(\sigma, x; q)$, выполнено неравенство

$$V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big) = \lim_{i \to \infty} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u_i)\big) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big).$$

Обозначим через $\widehat{u}_0(\sigma, x)$ ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^m$ точку множества $\widehat{U}(\sigma, x)$, через $O_r\big(\widehat{u}_0(\sigma, x)\big)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $\widehat{u}_0(\sigma, x)$, далее для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times S_\varrho$ определим множество

$$\widehat{U}_r(\sigma, x) \doteq \widehat{U}(\sigma, x) \bigcap O_r\big(\widehat{u}_0(\sigma, x)\big)$$

и множество $H_r(\sigma, x)$, состоящее из всех предельных значений функции $(\sigma, x) \to \widehat{U}_r(\sigma, x)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$ и дополненное значением $\widehat{U}_r(\sigma, x)$. Из второго условия теоремы следует, что множество $\widehat{U}(\sigma, x)$ непусто, тогда множество $H_r(\sigma, x)$ при фиксированных (σ, x) также непусто, замкнуто и, кроме того, компактно. Поставим в соответствие множеству H_r управляемую систему

$$\dot{x} = \int_{H_r(h^t\sigma, x)} f(h^t\sigma, x, u)\, \eta_t(du) \tag{9}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widehat{F}(h^t\sigma, x), \quad \widehat{F}(\sigma, x) = \mathrm{co}\{y \in \mathbb{R}^n : y = f(\sigma, x, u),\, u \in H_r(\sigma, x)\}. \tag{10}$$

Напомним, что допустимый процесс задачи (9) — это такая пара $(\varphi(t), \eta_t)$, что $\varphi(t)$ является решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{H_r(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0, \tau), \tag{11}$$

где $H_r(t) = H_r(h^t\sigma, \varphi(t))$, $\eta_t \in \mathrm{rpm}\big(H_r(t)\big)$, $[0, \tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (11). Если $(\varphi(t), \eta_t)$ — допустимый процесс, то $\varphi(t)$ — решение включения (10). Верно и обратное утверждение, если $\varphi(t)$ — решение включения (10), то найдется такое управление η_t, что пара $(\varphi(t), \eta_t)$ образует допустимый процесс задачи (9).

Лемма 6. *Если выполнено условие* 1, *то функция* $(\sigma, x) \to \widehat{F}(\sigma, x)$ *полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times S_\varrho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что график функции $(\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)$, $(\sigma,x)\in\Sigma\times S_\varrho$ — это замыкание графика функции $(\sigma,x)\to\widehat{U}_r(\sigma,x)$, поэтому этот график является замкнутым множеством. Так же, как в теореме 1, доказывается, что функция $(\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)$ ограничена в окрестности каждой точки $(\sigma,x)\in\Sigma\times S_\varrho$. Следовательно, для любого $r\in[0,\infty)$ функция $(\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)$ полунепрерывна сверху для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times S_\varrho$ в метрике Хаусдорфа. Кроме того, мы предполагаем, что функция $f(\sigma,x,u)$ является непрерывной функцией переменных $(\sigma,x,u)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, поэтому функции $(\sigma,x)\to f\bigl(\sigma,x,H_r(\sigma,x)\bigr)$ и $(\sigma,x)\to\widehat{F}(\sigma,x)$ ограничены в окрестности каждой точки и полунепрерывны сверху в метрике Хаусдорфа (см. [10, с. 53-54], [11, с. 204]).

Лемма 7 (см. [4]). *Фиксируем точку $(\sigma_0,x_0)\in\Sigma\times S_\varrho$ и $u_0\in\widehat{U}_r(\sigma_0,x_0)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех (σ,x), удовлетворяющих неравенству*

$$\rho_\Sigma(\sigma,\sigma_0)+|x-x_0|\leqslant\delta,$$

выполнено неравенство

$$V^o\bigl(\sigma,x;f(\sigma,x,u_0)\bigr)\leqslant w\bigl(\sigma,V(\sigma,x)\bigr)+\varepsilon. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. В силу леммы 6, условие 1 влечет полунепрерывность сверху функции $(\sigma,x)\to\widehat{F}(\sigma,x)$ в метрике Хаусдорфа. Следовательно, в силу теоремы А. Ф. Филиппова, через каждую точку (σ,x_0) множества

$$\Sigma\times\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|>\varrho\}$$

проходит решение $\varphi(t,\sigma)$ дифференциального включения (10), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma)=x_0$ (см. [11, с. 213]). Покажем, что $\varphi(t,\sigma)$ также является и решением исходного дифференциального включения (2). Для этого нужно показать, что для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times S_\varrho$ и любого $r\in[0,\infty)$ имеет место включение $H_r(\sigma,x)\subseteq U(\sigma,x)$. Напомним, что множество $H_r(\sigma,x)$ состоит из всех предельных значений функции $\widehat{U}_r(\sigma,x)$ при $(\sigma_i,x_i)\to(\sigma,x)$ и дополнено значением $\widehat{U}_r(\sigma,x)$. Очевидно, что выполнены следующие включения:

$$\widehat{U}_r(\sigma,x)\subseteq\widehat{U}(\sigma,x)\subseteq U(\sigma,x).$$

Покажем, что все предельные значения функции $(\sigma,x)\to\widehat{U}_r(\sigma,x)$ также содержатся в множестве $U(\sigma,x)$. Пусть $(\sigma_i,x_i)\to(\sigma,x)$, $u_i=u_i(\sigma_i,x_i)\in\widehat{U}_r(\sigma_i,x_i)$ и $u_i\to u$, тогда, в силу неравенства (12), найдется такая последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$, что $\varepsilon_i>0$, $\varepsilon_i\to0$ и выполнено неравенство

$$V^o\bigl(\sigma_i,x_i;f(\sigma_i,x_i,u)\bigr)\leqslant w\bigl(\sigma_i,V(\sigma_i,x_i)\bigr)+\varepsilon_i.$$

Переходя к пределу, получим неравенство $V^o\bigl(\sigma,x;f(\sigma,x,u)\bigr)\leqslant w\bigl(\sigma,V(\sigma,x)\bigr)$, из которого следует включение $u\in\widehat{U}(\sigma,x)\subseteq U(\sigma,x)$.

Аналогично лемме 6 можно показать, что через каждую точку (σ,x_0) множества

$$\Sigma\times\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|<\varrho_1\},$$

где $\varrho_1>\varrho$, также проходит решение $\varphi(t,\sigma)$ включения (2) (которое не обязательно является решением включения (10)). Предположим, что данное решение $\varphi(t,\sigma)$ не может быть продолжено на полуось $\mathbb{R}_+$, тогда найдется такой момент времени $t_1<\infty$, что $|\varphi(t,\sigma)|\to\infty$ при $t\to t_1$, $t<t_1$. Следовательно, при $t\in(t_0,t_1)$, где $t_0<t_1$, решение $\varphi(t,\sigma)$ целиком будет содержаться в множестве $S_{\varrho_1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|\geqslant\varrho_1\}$.

Рассмотрим функцию $v(t)=V\bigl(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma)\bigr)$. Из условия локальной липшицевости функции V следует, что функция $t\to v(t)$ локально липшицева (см. [1]); поэтому, в силу теоремы Радемахера, функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех t. Из неравенства (8) следует, что в точках дифференцируемости данной функции, принадлежащих интервалу (t_0,t_1), выполнено неравенство $\dot v(t)\leqslant w\bigl(h^t\sigma,v(t)\bigr)$. В силу теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах из этого неравенства при всех $t \in (t_0, t_1)$ следует неравенство $v(t) \leqslant z^*(t,\sigma)$, где $z^*(t,\sigma)$ — верхнее решение задачи (7) (см. [16]). Но функция V является бесконечно большой, поэтому $\lim\limits_{t\to t_1} v(t) = \infty$, что противоречит неравенству $v(t) \leqslant z^*(t,\sigma)$.

§ 5. Теорема об относительной частоте поглощения

Фиксируем множество $X \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Напомним, что множество $A(t,\sigma,X)$, состоящее из всех значений в момент времени t решений $t \to \varphi(t,\sigma,x)$ включения (2), когда начальное условие $\varphi(0,\sigma,x) = x$ пробегает все множество X, называется сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (2). Введем в рассмотрение следующее условие.

Условие 2. Для всех $\sigma \in \Sigma$ для каждой точки $x \in X$ каждое решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$, продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\omega = (\sigma, X)$. В предположении, что выполнено условие 2, рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega) \doteq \{t \in [\vartheta_0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}.$$

Определение 9. Обозначим

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{13}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если указанный предел существует, характеристику $\operatorname{freq}(\omega)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1) заданным множеством $M = \Sigma \times M(\sigma)$. Далее, если предел (13) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \underline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

будем называть соответственно *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1) множеством M.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 2, фиксировано $\omega = (\sigma, X) \in M$. Предположим, что существуют непрерывные скалярные функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и $(\sigma,z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ такие, что:*

1) *для каждого σ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи*

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

определено при всех $t \geqslant 0$;

2) *функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x) \leqslant w\bigl(\sigma, V(\sigma,x)\bigr). \tag{15}$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ множеством M удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma), \quad \text{где}$$

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \ \varkappa_*(\sigma) \doteq \underline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (2), определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in X$. Рассмотрим функцию

$$v(t)=V(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)).$$

В силу теоремы Радемахера функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех t и поскольку $\varphi(0,\sigma,x)\in X$, то $v(0)\leqslant 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнены неравенства (см. [1])

$$V^o_{\min}\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)\leqslant \dot v(t)\leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big),$$

поэтому, с учетом неравенства (15), имеем при всех $t\geqslant 0$ неравенство $\dot v(t)\leqslant w\big(h^t\sigma,v(t)\big)$. В силу теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах из этого неравенства при всех $t\geqslant 0$ следует неравенство $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$, где $z^*(t,\sigma)$ — верхнее решение задачи (14).

Отметим теперь, что каждое из множеств

$$\{t\in[0,\vartheta]: v(t)\leqslant 0\},\quad \{t\in[0,\vartheta]: z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}$$

измеримо по Лебегу; это доказывается так же, как лемма 4 работы [4]. Далее, в силу (16), из неравенства $v(t)\leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство

$$\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: v(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}\geqslant \varkappa^*(\sigma),$$

которое эквивалентно неравенству $\operatorname{freq}^*(\omega)\geqslant\varkappa^*(\sigma)$.

Неравенство $\operatorname{freq}_*(\omega)\geqslant\varkappa_*(\sigma)$ доказывается аналогично.

§ 6. Условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ и равенства $\varkappa(\sigma)=1$

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ,h^t) и функции $a(\sigma),b(\sigma)$, непрерывные на множестве Σ. Для каждого $\sigma\in\Sigma$ обозначим через $z(t,\sigma)$ решение задачи

$$\dot z=a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma),\quad z(0,\sigma)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{17}$$

тогда данное решение имеет вид

$$z(t,\sigma)=\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds.$$

Обозначим $I_-(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)\doteq\{t\in[\vartheta_0,\vartheta]: z(t,\sigma)\leqslant 0\}$, где $0\leqslant\vartheta_0<\vartheta<+\infty$. Рассмотрим характеристику

$$\varkappa(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}I_-(0,\vartheta,\sigma)}{\vartheta}=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая является относительной частотой попадания траектории решения $z(t,\sigma)$ в множество $(-\infty,0]$. Мы исследуем условия, при которых предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице.

6.1. Условия равенства $\varkappa(\sigma)=1$ для периодического движения

Напомним, что σ называется *периодической точкой* потока $h^t:\Sigma\to\Sigma$, допускающей период T, если для любого $t\in\mathbb{R}_+$ выполнено условие $h^{t+T}\sigma=h^t\sigma$. Наименьшее положительное число T, удовлетворяющее данному условию, называется *периодом движения* $t\to h^t\sigma$. Если у периодического движения такого наименьшего периода не существует, то данное движение сводится к покою, когда для всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполнено равенство $h^t\sigma=\sigma$.

Введем следующие обозначения:

$$z_0(t,\sigma)=\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds,\quad \beta(t,\sigma)=\exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big),$$

тогда $z(t,\sigma)=\beta(t,\sigma)z_0(t,\sigma)$ для всех $t\geqslant 0$.

Лемма 8. 1. *Пусть* σ *является периодической точкой потока* $h^t:\Sigma\to\Sigma$, *допускающей период* T. *Если выполнены неравенства*

$$z_0(T,\sigma)<0,\quad \beta=\beta(T,\sigma)\geqslant 1, \tag{18}$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ *существует и равен единице.*

2. *Если найдется периодическая точка* σ_0 *потока* h^t *такая, что*

$$\beta(T,\sigma_0)=1,\quad z_0(T,\sigma_0)\neq 0,$$

то $\varkappa(\sigma)=\varkappa$ *для всех* $\sigma\in\operatorname{orb}_+(\sigma_0)$. *Далее, если* $\beta(T,\sigma_0)=1$, $z_0(T,\sigma_0)<0$, *то* $\varkappa(\sigma)=1$ *для всех* $\sigma\in\operatorname{orb}_+(\sigma_0)$.

Доказательство. 1. Найдем зависимость решения $z(t,\sigma)$ от $z_0(T,\sigma)$ и $\beta(T,\sigma)$ для различных значений переменного t. Пусть $t\in[T,2T)$, тогда, используя условие периодичности функций $t\to a(h^t\sigma)$ и $t\to b(h^t\sigma)$, получаем:

$$\begin{gathered}
z(t,\sigma)=\beta(T,\sigma)\exp\Big(\int_T^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\bigg(z_0(T,\sigma)+\int_T^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\bigg)=\\
=\beta(T,\sigma)\exp\Big(\int_0^{t-T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\bigg(z_0(T,\sigma)+\int_0^{t-T} b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^{s+T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\bigg)=\\
=\beta(T,\sigma)\beta(t-T,\sigma)\bigg(z_0(T,\sigma)+\int_0^{t-T} b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^{T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\exp\Big(-\int_T^{s+T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\bigg)=\\
=\beta(T,\sigma)\beta(t-T,\sigma)z_0(T,\sigma)+\beta(t-T,\sigma)\int_0^{t-T} b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^{s} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds=\\
=\beta(T,\sigma)\beta(t-T,\sigma)z_0(T,\sigma)+\beta(t-T,\sigma)z_0(t-T,\sigma).
\end{gathered}$$

Пусть теперь $t\in[kT,(k+1)T)$, $k\in\mathbb{N}$. Проводя аналогичные вычисления, получаем следующую формулу:

$$z(t,\sigma)=z_0(T,\sigma)\beta(t-kT,\sigma)(\beta+\beta^2+\ldots+\beta^k)+\beta(t-kT,\sigma)z_0(t-kT,\sigma). \tag{19}$$

Отметим, что функции $\beta(t-kT,\sigma)$, $z_0(t-kT,\sigma)$ ограничены при $t-kT\in[0,T)$ и $\beta(t-kT,\sigma)>0$. Поэтому, если выполнены неравенства (18), то предел $\lim\limits_{t\to\infty}z(t,\sigma)=-\infty$. Следовательно, найдется такой момент времени $t_0>0$, что для всех $t>t_0$ выполнено неравенство $z(t,\sigma)<0$, в этом случае $\varkappa(\sigma)=1$.

2. Пусть $\sigma_0\in\Sigma$ является периодической точкой потока $h^t:\Sigma\to\Sigma$, допускающей период T. Если $\sigma\in\operatorname{orb}_+(\sigma_0)$, то $\sigma=h^{t_1}\sigma_0$, где $t_1\in[0,T)$. Далее, из условия $\beta(T,\sigma_0)=1$ следует, что $\displaystyle\int_0^T a(h^\tau\sigma_0)d\tau=0$, поэтому

$$\begin{gathered}
z_0(T,\sigma)=\int_0^T b(h^{t_1+s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_0^s a(h^{t_1+\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds=\\
=\int_0^T b(h^{t_1+s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s+t_1} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds=\\
=\int_{t_1}^T b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds+\int_T^{t_1+T} b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds=\\
=\int_{t_1}^T b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds+\\
+\exp\Big(-\int_0^T a(h^\tau\sigma_0)d\tau\Big)\int_0^{t_1} b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds=\\
=\exp\Big(\int_0^{t_1} a(h^\tau\sigma_0)d\tau\Big)\int_0^T b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_0^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds=\exp\Big(\int_0^{t_1} a(h^\tau\sigma_0)d\tau\Big)z_0(T,\sigma_0).
\end{gathered}$$

Следовательно, если для некоторого $\sigma_0 \in \Sigma$ выполнено неравенство $z_0(T,\sigma_0) < 0$, то $z_0(T,\sigma) < 0$ для всех $\sigma \in \mathrm{orb}_+(\sigma_0)$. Таким образом, на основании формулы (19) получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) = -\infty$, поэтому $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \mathrm{orb}_+(\sigma_0)$. Аналогично, если $z_0(T,\sigma_0) > 0$ для некоторого $\sigma_0 \in \Sigma$, то $\varkappa(\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in \mathrm{orb}_+(\sigma_0)$.

6.2. Условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ для почти периодического движения

Напомним, что числовое множество называется *относительно плотным* на действительной оси $\mathbb{R}$, если существует число $\ell > 0$ такое, что каждый отрезок $[a, a+\ell]$ длины ℓ содержит хотя бы один элемент данного множества. Движение $t \to h^t\sigma$ называется почти периодическим в смысле Бора, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\theta(\varepsilon) \doteq \bigl\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho_{\Sigma}(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma) \leqslant \varepsilon\bigr\}$$

ε-почти периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$. Функция $t \to \varphi(h^t\sigma)$ называется *почти периодической в смысле Бора,* если она непрерывна и для всякого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Theta(\varepsilon) \doteq \bigl\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(h^{t+\tau}\sigma) - \varphi(h^t\sigma)| \leqslant \varepsilon\bigr\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Лемма 9. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to A(t,\sigma) \doteq \int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, функции $t \to a(h^t\sigma)$, $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодические в смысле Бора. Если*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{z_0(t,\sigma)}{t} \doteq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Bigl(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr)ds < 0, \tag{20}$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ интеграл $A(t,\sigma)$ почти периодической функции $a(h^t\sigma)$ является функцией почти периодической. Далее, функции

$$\exp\bigl(-A(s,\sigma)\bigr) \quad \text{и} \quad b(h^s\sigma)\exp\bigl(-A(s,\sigma)\bigr)$$

— почти периодические, поэтому существует конечное среднее значение $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z_0(t,\sigma)}{t}$ (см. [15, с. 369-382]). Из неравенства (20) следует, что найдется такой момент времени $t_0 > 0$, что $\dfrac{z_0(t,\sigma)}{t} < 0$ при всех $t > t_0$. Отсюда получаем, что при всех $t > t_0$ выполнено неравенство

$$z(t,\sigma) = \exp\Bigl(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr)z_0(t,\sigma) < 0,$$

из которого следует, что $\varkappa(\sigma) = 1$. □

Будем говорить, что *движение $t \to h^t\sigma$ удовлетворяет условию Липшица,* если найдется постоянная $k_1 > 0$ такая, что неравенство $\rho_{\Sigma}(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma) \leqslant k_1|\tau|$ выполнено для любых $t \in \mathbb{R}$. Пусть также существует постоянная $k_2 > 0$ такая, что для всех $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ выполнено неравенство $|\varphi(\sigma_1) - \varphi(\sigma_2)| \leqslant k_2\rho_{\Sigma}(\sigma_1, \sigma_2)$, тогда функция $t \to \varphi(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $k_\sigma = k_1k_2$, т. е. $|\varphi(h^{t+\tau}\sigma) - \varphi(h^t\sigma)| \leqslant k_\sigma|\tau|$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Точку $\tau \in (0,\infty)$ назовем *точкой выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества* $(-\infty, 0]$, если $z(\tau,\sigma) = 0$ и для всякого $\delta > 0$ найдутся такие моменты времени $\tau_1 \in (\tau-\delta, \tau)$ и $\tau_2 \in (\tau, \tau+\delta)$, что $z(\tau_1,\sigma) \leqslant 0$, $z(\tau_2,\sigma) > 0$. Далее, назовем точку $s \in (0,\infty)$ *точкой входа траектории решения $z(t,\sigma)$ в множество* $(-\infty, 0]$, если эта точка не является точкой выхода из множества $(-\infty, 0]$, $z(s,\sigma) = 0$ и для любого $\delta > 0$ найдутся такие моменты времени $s_1 \in (s-\delta, s)$ и $s_2 \in (s, s+\delta)$, что $z(s_1,\sigma) > 0$, $z(s_2,\sigma) \leqslant 0$.

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ рассмотрим множество

$$B(\sigma) \doteq \{t \in [0,\infty) : b(h^t\sigma) = 0\},$$

и обозначим через $\nu\big(B(\sigma)\big)$ относительную частоту попадания в данное множество, тогда

$$\nu\big(B(\sigma)\big) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : t \in B(\sigma)\}}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} I_{B(\sigma)}(t)dt,$$

где $I_B(t)$ — характеристическая функция множества B. Предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие 3. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство $\nu\big(B(\sigma)\big) = 0$.

Лемма 10. *Пусть выполнено условие* 3, *для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *функция* $t \to a(h^t\sigma)$ *ограничена на* $\mathbb{R}_+$, *функция* $t \to b(h^t\sigma)$ *почти периодическая в смысле Бора и удовлетворяет условию Липшица. Если* $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) < 0$, *то предел* $\varkappa(\sigma)$ *существует и равен единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} b(h^t\sigma) \leqslant 0$, то $b(h^t\sigma) \leqslant 0$ и $z(t,\sigma) \leqslant 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, следовательно, $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0$ и $\varkappa(\sigma) = 1$. Если $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+} b(h^t\sigma) \geqslant 0$, то выполнены неравенства $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \geqslant 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \geqslant 0$, которые не удовлетворяют условию леммы. Далее будем предполагать, что выполнено условие $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+} b(h^t\sigma) < 0$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} b(h^t\sigma) > 0$. В этом случае почти периодическая функция $t \to b(h^t\sigma)$ имеет относительно плотное множество нулей (см. [15, с. 442]); следовательно, существует число $L > 0$ такое, что для любых соседних нулей t_1 и t_2 данной функции выполнено неравенство $|t_2 - t_1| \leqslant L$.

Предположим сначала, что существует конечное число точек выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty, 0]$, пусть это будут точки $\tau_1, \ldots, \tau_k$. Пусть нижний предел $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = \alpha < 0$, тогда найдется момент времени $\vartheta > \tau_k$ такой, что $z(\vartheta,\sigma) < \dfrac{\alpha}{2} < 0$, следовательно, для всех $t > \vartheta$ выполнено неравенство $z(t,\sigma) \leqslant 0$, в этом случае $\varkappa(\sigma) = 1$. Отметим, что если верхний предел $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma)$ отрицательный, то найдется такой момент времени $\tau > 0$, что для всех $t > \tau$ выполнено неравенство $z(t,\sigma) < 0$, следовательно, $\varkappa(\sigma) = 1$. Далее будем предполагать, что $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) < 0$ и число точек выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty, 0]$ бесконечно. Каждой точке выхода τ_i поставим в соответствие точку s_i входа траектории решения $z(t,\sigma)$ в $(-\infty, 0]$ такую, что $\tau_i < s_i < \tau_{i+1}$. Таким образом, $z(t,\sigma) \geqslant 0$ при $t \in [\tau_i, s_i]$, $z(\tau_i,\sigma) = z(s_i,\sigma) = 0$ и $z(t,\sigma)$ может обращаться в нуль в некоторых точках интервала (τ_i, s_i), которые являются точками касания графика функции $z(t,\sigma)$ и оси Ot.

Обозначим через b_i наибольшее значение функции $|b(h^t\sigma)|$ на отрезке $[\tau_i, s_i]$, пусть $b_i = |b(h^{\theta_i}\sigma)|$ для некоторого $\theta_i \in [\tau_i, s_i]$. Докажем, что если верхний предел решения

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = 0,$$

то $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = 0$. Для этого сначала нужно показать, что отрезок $[\tau_i, s_i]$ содержит хотя бы одну точку, в которой функция $b(h^t\sigma)$ обращается в нуль. Действительно, из непрерывности функции $a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma)$ по переменным t и z следует, что решение $z(t,\sigma)$ задачи (17) имеет непрерывные производные при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что

$$\dot z(\tau_i,\sigma) = b(h^{\tau_i}\sigma) \geqslant 0, \quad \dot z(s_i,\sigma) = b(h^{s_i}\sigma) \leqslant 0,$$

следовательно, отрезок $[\tau_i, s_i]$ содержит хотя бы одну точку, в которой выполнено равенство $b(h^t\sigma)=0$. Далее, из непрерывности функции $|b(h^t\sigma)|$ следует, что на отрезке $[\tau_i, s_i]$ найдется хотя бы одна точка, в которой значение данной функции равно $b_i/2$. Выберем точку $t_i \in [\tau_i, s_i]$ таким образом, чтобы $|b(h^{t_i}\sigma)| = b_i/2$ и на отрезке с концами t_i и θ_i выполнялось неравенство $|b(h^t\sigma)| \geqslant b_i/2$. Пусть функция $t \to b(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной $k_\sigma > 0$, тогда

$$\frac{b_i}{2} = |b(h^{\theta_i}\sigma) - b(h^{t_i}\sigma)| \leqslant k_\sigma|\theta_i - t_i|,$$

следовательно, $|\theta_i - t_i| \geqslant b_i/2k_\sigma$.

Предположим, что $t_i < \theta_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$ и обозначим через A постоянную, ограничивающую функцию $|a(h^t\sigma)|$. Из непрерывности функции $b(h^t\sigma)$ следует, что эта функция на отрезке $[t_i, \theta_i]$ сохраняет постоянный знак, тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
|z(\theta_i,\sigma)| + |z(t_i,\sigma)|\exp(AL) \geqslant |z(\theta_i,\sigma)| + |z(t_i,\sigma)|\exp\bigl(A(\theta_i - t_i)\bigr) \geqslant \\
\geqslant |z(\theta_i,\sigma)| + |z(t_i,\sigma)|\exp\left(\int_{t_i}^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right) \geqslant \left|z(\theta_i,\sigma) - z(t_i,\sigma)\exp\left(\int_{t_i}^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right)\right| = \\
= \left|\int_{t_i}^{\theta_i} b(h^s\sigma)\exp\left(\int_s^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right)ds\right| = \int_{t_i}^{\theta_i}\bigl|b(h^s\sigma)\bigr|\exp\left(\int_s^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right)ds \geqslant \\
\geqslant \exp\bigl(-A(\theta_i - t_i)\bigr)\int_{t_i}^{\theta_i}|b(h^s\sigma)|ds \geqslant \exp(-AL)\int_{t_i}^{\theta_i}|b(h^s\sigma)|ds \geqslant \\
\geqslant \frac{b_i}{2}(\theta_i - t_i)\cdot\exp(-AL) \geqslant \frac{b_i^2}{4k_\sigma}\cdot\exp(-AL).
\end{gathered}$$

Аналогичные неравенства справедливы для случая, когда $t_i > \theta_i$. Обозначим

$$I_+ \doteq \{t \in [0,\infty) : z(t,\sigma) \geqslant 0\},$$

тогда из условия $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} z(t,\sigma) = 0$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) = 0$ при $t \in I_+$. Значит, найдется момент времени ϑ_n такой, что $z(t,\sigma) \leqslant 1/n$ для всех $t \geqslant \vartheta_n$, $t \in I_+$; тогда для всех $\theta_i \geqslant \vartheta_n$ выполнено неравенство

$$\frac{b^2(h^{\theta_i}\sigma)}{4k_\sigma}\cdot e^{-AL} = \frac{b_i^2}{4k_\sigma}\cdot e^{-AL} \leqslant \frac{1}{n}\bigl(1 + e^{AL}\bigr),$$

из которого для всех $t \geqslant \vartheta_n$, $t \in I_+$ следует оценка

$$|b(h^t\sigma)| \leqslant b_i \leqslant 2\sqrt{\frac{k_\sigma}{n}\bigl(e^{2AL} + e^{AL}\bigr)} \doteq \frac{c}{\sqrt{n}}\,. \tag{21}$$

Пусть $0 \leqslant \vartheta_0 < \vartheta \leqslant +\infty$. Рассмотрим следующие множества:

$$\begin{gathered}
B(\vartheta_0,\vartheta,\sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0,\vartheta] :\ |b(h^t\sigma)| = 0\}, \\
B_n(\vartheta_0,\vartheta,\sigma) \doteq \left\{t \in [\vartheta_0,\vartheta] : \bigl|b(h^t\sigma)\bigr| \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{gathered}$$

Отметим, что $B_{n+1}(0,\vartheta,\sigma) \subseteq B_n(0,\vartheta,\sigma)$ и $B_n(0,\vartheta,\sigma) \to B(0,\vartheta,\sigma)$ при $n \to \infty$. Поскольку функция $b(h^t\sigma)$ является почти периодической, то $I_{B_n(0,\infty,\sigma)}(t)$ также почти периодическая (разрывная) функция, поэтому предел

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{1}{\vartheta}\int_0^\vartheta I_{B_n(0,\infty,\sigma)}(t)dt = \nu\bigl(B_n(0,\infty,\sigma)\bigr)$$

существует и равен среднему значению данной функции (см. [15, с. 379]). Функция множеств ν обладает всеми свойствами меры, в том числе свойствами счетной аддитивности и непрерывности (см. [17, с. 144]), следовательно, в силу условия 3 выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty}\nu\big(B_n(0,\infty,\sigma)\big)=\nu\big(B(0,\infty,\sigma)\big)=\nu\big(B(\sigma)\big)=0.$$

Далее, введем в рассмотрение множества

$$I_0(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)\doteq\{t\in[\vartheta_0,\vartheta]:z(t,\sigma)\geqslant 0\},$$
$$I_n(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)\doteq\{t\in[\vartheta_0,\vartheta]:z(t,\sigma)\in[0,1/n]\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку $z(t,\sigma)\leqslant 1/n$ для всех $t\geqslant\vartheta_n$, $t\in I_+$, то для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{gathered}\nu\big(I_n(0,\infty,\sigma)\big)=\nu\big(I_n(0,\vartheta_n,\sigma)\big)+\nu\big(I_n(\vartheta_n,\infty,\sigma)\big)=0+\nu\big(I_0(\vartheta_n,\infty,\sigma)\big)=\\=\nu\big(I_0(0,\vartheta_n,\sigma)\big)+\nu\big(I_0(\vartheta_n,\infty,\sigma)\big)=\nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big).\end{gathered}$$

Неравенство (21) выполнено для всех $t\geqslant\vartheta_n$, $t\in I_+$, для которых $z(t,\sigma)\in[0,1/n]$, поэтому для всех $\vartheta\geqslant\vartheta_n$ имеет место включение $I_n(\vartheta_n,\vartheta,\sigma)\subseteq B_n(\vartheta_n,\vartheta,\sigma)$, из которого следуют неравенства

$$\begin{gathered}\mathrm{mes}I_n(\vartheta_n,\vartheta,\sigma)\leqslant\mathrm{mes}B_n(\vartheta_n,\vartheta,\sigma),\\ \nu\big(I_n(0,\infty,\sigma)\big)=\nu\big(I_n(\vartheta_n,\infty,\sigma)\big)=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}I_n(\vartheta_n,\vartheta,\sigma)}{\vartheta}\leqslant\\ \leqslant\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}B_n(\vartheta_n,\vartheta,\sigma)}{\vartheta}=\nu\big(B_n(0,\infty,\sigma)\big).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$0\leqslant\nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big)=\nu\big(I_n(0,\infty,\sigma)\big)=\lim_{n\to\infty}\nu\big(I_n(0,\infty,\sigma)\big)\leqslant\lim_{n\to\infty}\nu\big(B_n(0,\infty,\sigma)\big)=0,$$

поэтому множества $I_n(0,\infty,\sigma)$, $n=0,1\ldots$ измеримы в смысле меры ν и выполнено равенство $\nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big)=0$. Таким образом,

$$\varkappa(\sigma)\geqslant\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z(t,\sigma)<0\}}{\vartheta}=1-\nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big)=1.$$

§ 7. Теорема о статистически слабой инвариантности

Напомним, что $\Omega\doteq\Sigma\times\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $M=\Sigma\times M(\sigma)$ — заданное подмножество пространства Ω. Предполагаем, что функция $\sigma\to M(\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа—Бебутова. Далее, через $M^r(\sigma)=M(\sigma)+O_r(0)$ обозначена замкнутая окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ и через $N_+^r(\sigma)=M^r(\sigma)\setminus M(\sigma)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(\sigma)$.

Определение 10. Множество M будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $(\sigma,x)\in M$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (2), определенное при всех $t\geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x$ и условию

$$\mathrm{freq}^*(\varphi)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}=1.$$

Далее, множество M будем называть *слабо инвариантным* относительно системы (1), если для любой точки $(\sigma,x)\in M$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (2), определенное при всех $t\geqslant 0$ и удовлетворяющее соотношению $\varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)$ также при всех $t\geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 2, для каждого $\sigma \in \Sigma$ существуют непрерывные скалярные функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:*

1) *для каждого σ верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи (14) определено при всех $t \geqslant 0$ и*

$$\varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1; \tag{22}$$

2) *функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{23}$$

Тогда множество M статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (1).

Замечание 1. Если для каждого $\sigma \in \Sigma$ верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи (14) определено при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет неравенству $z^*(t, \sigma) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$, то множество M является *слабо инвариантным.*

Доказательство теоремы 4. Пусть $\varphi(t, \sigma, x)$ — решение включения (2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, где $(\sigma, x) \in M$, и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию $v(t) = V\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\big)$. Так же, как при доказательстве теоремы 3, можно показать, что в точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнено неравенство $\dot{v}(t) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t)\big)$, а из условия $(\sigma, x) \in M$ следует, что $v(0) \leqslant 0$. Поэтому $v(t) \leqslant z^*(t, \sigma)$, где $z^*(t, \sigma)$ — верхнее решение задачи (14). Далее, в силу условия (22) из неравенства $v(t) \leqslant z^*(t, \sigma)$ следует равенство

$$\varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1,$$

которое эквивалентно равенству $\operatorname{freq}^*(\omega) = 1$. Таким образом, множество M статистически слабо инвариантно.

Предположим теперь, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи (14) при всех $t \geqslant 0$ определено и удовлетворяет неравенству $z^*(t, \sigma) \leqslant 0$. В этом случае из неравенства $v(t) \leqslant z^*(t, \sigma)$ следует неравенство $v(t) \leqslant 0$, выполненное при всех $t \geqslant 0$, которое означает, что для любой точки $(\sigma, x) \in M$ найдется решение $\varphi(t, \sigma, x)$ включения (2) такое, что $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и $\varphi(t, \sigma, x) \in M$ при всех $t \geqslant 0$. Следовательно, множество M является слабо инвариантным.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему (Σ, h^t), где Σ — окружность радиуса единица, σ — угловая координата, $h^t\sigma = t + \sigma \pmod{2\pi}$.

Пусть $z(t, \sigma)$ — решение задачи

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где функция $w(\sigma, z)$ определяется следующим образом:

$$w(\sigma, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \in [\tau_1, s_1) \cup [\tau_2, s_2) \cup \dots \cup [\tau_k, s_k), \\ -1, & \text{если } \sigma \in [0, \tau_1) \cup [s_1, \tau_2) \cup \dots \cup [s_k, 2\pi), \end{cases}$$

$0 \leqslant \tau_1 < s_1 < \tau_2 < s_2 < \ldots < \tau_k < s_k \leqslant 2\pi$, $k \geqslant 1$. Выясним, при каких условиях предел

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

существует и равен единице.

Обозначим через S_+ сумму длин отрезков, на которых функция $w(\sigma,z)$ принимает значение 1, через S_- обозначим сумму длин отрезков, на которых $w(\sigma,z)=-1$, тогда

$$S_+=\sum_{i=1}^{k}(s_i-\tau_i),\quad S_-=2\pi-S_+.$$

Покажем, что если $S_+-S_-<0$, то для всех $\sigma\in\Sigma$ выполнено равенство $\varkappa(\sigma)=1$. Несложно посчитать, что $z(2\pi,\sigma)=S_+-S_-<0$ и $z(2\pi m,\sigma)=m(S_+-S_-)$, $m\in\mathbb{N}$, тогда

$$z(2\pi m,\sigma)\to-\infty$$

при $m\to\infty$. Отметим также, что если $S_+-S_-<0$, то для любого натурального m отклонение

$$\max_{t\in[2\pi m,2\pi(m+1)]}\bigl|z(t,\sigma)-z(2\pi m,\sigma)\bigr|\leqslant 2\pi,$$

следовательно, найдется такое число $T>0$, что при всех $t\geqslant T$ выполнено неравенство $z(t,\sigma)<0$, тогда $\varkappa(\sigma)=1$. Если $S_+-S_-=0$, то $\varkappa(\sigma)$ может принимать различные значения от нуля до единицы, в зависимости от σ. Если $S_+-S_->0$, то $\varkappa(\sigma)=0$.

Пример 2. Пусть (Σ,h^t) — динамическая система, описанная в примере 1. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases}\dot x_1=-x_1-x_2+\cos^2(t+\sigma)+\Bigl(\dfrac{3\sqrt2}{2}+u_1\Bigr)\cos(t+\sigma),\\ \dot x_2=x_1-x_2+\sin(t+\sigma)\cos(t+\sigma)+\Bigl(\dfrac{3\sqrt2}{2}+u_2\Bigr)\sin(t+\sigma),\end{cases}\tag{24}$$

где $u_1,u_2\in[0,\infty)$. Покажем, что множество

$$M=\Sigma\times M(\sigma),\quad\text{где}\quad M(\sigma)=\bigl\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2\leqslant 8\bigr\}$$

статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (24). Функция

$$V(\sigma,x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}-2\sqrt2$$

является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно множества M и при каждом $q=(q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2$ производная функции V по направлению $q\in\mathbb{R}^2$ равна

$$V^o(\sigma,x;q)=\frac{x_1q_1+x_2q_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=-\sqrt{x_1^2+x_2^2}+$$
$$+\Bigl(\frac{3\sqrt2}{2}+\cos\sigma\Bigr)\frac{x_1\cos\sigma+x_2\sin\sigma}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\frac{u_1x_1\cos\sigma+u_2x_2\sin\sigma}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

Несложно проверить, что для всех $(\sigma,x_1,x_2)\in\Sigma\times\mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$x_1\cos\sigma+x_2\sin\sigma\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$

поэтому нижняя производная в силу включения, соответствующего системе (24), удовлетворяет неравенству

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant-\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\frac{3\sqrt2}{2}+\cos\sigma=-V(\sigma,x)+\cos\sigma-\frac{\sqrt2}{2}.\tag{25}$$

В силу теоремы 4 нужно показать, что существует непрерывная функция $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$ такая, что для каждого σ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (14) определено при всех $t\geqslant0$, выполнено равенство (22) и неравенство

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant w\bigl(\sigma,V(\sigma,x)\bigr).$$

Из неравенства (25) следует, что в качестве функции $w(\sigma, z)$ мы можем взять функцию $w(\sigma, z) = -z + \cos\sigma - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и исследовать поведение решений $z(t,\sigma)$ задачи

$$\dot{z} = -z + \cos(t+\sigma) - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Отметим, что функция $V(\sigma, x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно множества M и удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому при каждом $\sigma \in \Sigma$ для каждой точки $x_0 \in M(\sigma)$ существует решение включения, соответствующего системе (24), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma) = x_0$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Функция $t \to b(h^t\sigma) = \cos(h^t\sigma) - \sqrt{2}/2$ периодическая и удовлетворяет условию 3, поэтому, согласно лемме 10, если $\varlimsup\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) \leqslant 0$ и $\varliminf\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) < 0$, то $\varkappa(\sigma) = 1$. Найдем

$$z(t,\sigma) = \frac{1}{2}\cos(t+\sigma) + \frac{1}{2}\sin(t+\sigma) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cos\sigma - \frac{1}{2}\sin\sigma\Big)e^{-t}.$$

Поскольку максимальное значение функции $f(\sigma) = \cos\sigma + \sin\sigma$ на $[0,\infty)$ равно $\sqrt{2}$ и минимальное значение равно $-\sqrt{2}$, то верхний и нижний пределы решения $z(t,\sigma)$ равны

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma) = 0, \quad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma) = -\sqrt{2} < 0,$$

следовательно, предел $\kappa(\sigma)$ существует и равен единице. Таким образом, мы показали, что множество M статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (24).

Отметим также, что при всех $\sigma \neq \pi/4$ для любого как угодно большого $T > 0$ найдется точка $t_0 > T$ выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty, 0]$, поскольку для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $z(\pi/4 - \sigma + 2\pi k, \sigma) > 0$. При $\sigma = \pi/4$ траектория решения $z(t,\sigma)$ не выходит из множества $(-\infty,0]$, но найдется точка $t_0 > T$, $t_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$ такая, что $z(t_0,\sigma) = 0$.

Похожие результаты справедливы для множества $M = \Sigma \times M(\sigma)$, где

$$M(\sigma) = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\big\}, \quad r > 2\sqrt{2}.$$

Так же, как и ранее, можно показать, что данное множество статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (24). В отличие от случая $r = 2\sqrt{2}$, при $r > 2\sqrt{2}$ верхний предел решения $z(t,\sigma)$ соответствующей задачи Коши отрицательный, поэтому для любой точки $(\sigma, x) \in M$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ системы (24) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x$, которое содержится в множестве M при всех $t > T(\sigma,x)$ для некоторого $T(\sigma,x) \geqslant 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений и функции Ляпунова // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2008. — Т. 262. — С. 202–221.

2. Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л. Поглощаемость, неблуждаемость и рекуррентность множества достижимости управляемой системы (соавторы) // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 97–105.

3. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 185–201.

4. Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, № 2. — С. 265–288.

5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

6. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Арнольд В. И., Бронштейн И. У., Гринес В. З., Ильяшенко Ю. С. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — Т. 1. — М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. — 244 с.

7. Аносов Д. В. Лекции по линейной алгебре. — М.: Регулярная и хаотич. динамика, 1999. — 105 с.

8. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 623 с.

9. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 335 с.

10. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 223 с.

11. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1985. — Т. 169. — С. 194–252.

12. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 300 с.

13. Peano G. Sull' integrabilitá delle equazione differenziali di primo ordine // Atti. R. Accad. — Torino, 1885/1886. — № 21. — P. 667–685.

14. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

15. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

16. Перов А. И. Несколько замечаний относительно дифференциальных неравенств // Известия вузов. Математика. — 1965. — № 4(47). — С. 104–112.

17. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 768 с.

Поступила в редакцию 10.10.10

L. I. Rodina, E. L. Tonkov

The statistically weak invariant sets of control systems

We obtain the conditions that allow to estimate the relative frequency of occurence of the attainable set of a control system in some given set. The set is called statistically invariant if the relative frequency of occurence in this set is equal to one. We also derive the conditions of the statistically weak invariance of the given set with respect to controllable system, that is, for every initial point from this set, at least one solution of the control system is statistically invariant. We suggest that the images of the right hand part of the differential inclusions corresponding for the given control system are closed but may be not compact. The main results are formulated in the terms of Lyapunov functions, metric of Hausdorff-Bebutov and the dynamical system of shifts that attended in the right hand part of the differential inclusion.

Keywords: controllable systems, dynamical systems, differential inclusions, weakly invariant and statistically weakly invariant sets.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

Родина Людмила Ивановна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Удмуртского государственного университета, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: rdl@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: eltonkov@udm.ru