УДК 515.124, 517.911.5

© *Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко*

ОБ ОДНОЙ МЕТРИКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПУСТЫХ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^n$ [1]

Построена метрика в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ всех непустых замкнутых (необязательно ограниченных) подмножеств $\mathbb{R}^n$. Сходимость последовательности множеств в этой метрике оказывается равносильной сходимости в метрике Хаусдорфа последовательности пересечений этих множеств с центрированными в нуле шарами любого положительного радиуса, дополненных соответствующими сферами. В этой метрике доказана полнота пространства $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ и замкнутость подпространства всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Получены условия равносильности сходимости по предложенной метрике и сходимости по метрикам Хаусдорфа и Хаусдорфа–Бебутова. Полученные результаты могут применяться в задачах управления, теории дифференциальных включений.

Ключевые слова: полное метрическое пространство непустых замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$, подпространства, сходимость.

Введение

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$; $\varrho(x,M) \doteq \min\limits_{y\in M}|x-y|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ от точки x до замкнутого множества M; $S_r(x_0) \doteq \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}$, $O_r(x_0) \doteq \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| \leqslant r\}$, $O_r^o(x_0) \doteq \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\}$ — сфера, замкнутый и, соответственно, открытый шары в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r>0$ с центром в x_0; $O_r \doteq O_r(0)$; $O_r^o \doteq O_r^o(0)$; $S_r \doteq S_r(0)$; $O_0(x_0) = S_0(x_0) = \{x_0\}$.

Пространства *непустых компактных* и *непустых выпуклых компактных* подмножеств $\mathbb{R}^n$ обозначим, соответственно, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Эти пространства будем рассматривать с метрикой Хаусдорфа dist :

$$\mathrm{dist}(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}, \tag{1}$$

$$d(A,B) \doteq \max_{a\in A}\varrho(a,B), \quad d(B,A) \doteq \max_{b\in B}\varrho(b,A). \tag{2}$$

Далее обозначим пространство всех *непустых замкнутых* подмножеств $\mathbb{R}^n$ через $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$, а пространство, состоящее из *непустых выпуклых замкнутых* подмножеств $\mathbb{R}^n$ — через $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем $r>0$ и определим пространство $\mathrm{cl}(O_r^o)$ всех *замкнутых подмножеств* (*включая пустое подмножество*) пространства O_r^o, то есть элементами $\mathrm{cl}(O_r^o)$ являются пересечения замкнутых в $\mathbb{R}^n$ множеств с открытым шаром O_r^o.

Как известно, изучение управляемых систем вида

$$\dot x = f(t,x,u), \quad (t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}, \quad u\in U(t,x)\subset\mathbb{R}^m$$

приводит к исследованию неавтономных дифференциальных включений

$$\dot x \in F(t,x), \quad F(t,x) \doteq f(t,x,U(t,x)). \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11–01–00645, 11–01–00626) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

В ряде задач множество $U(t,x)$ не предполагается ограниченным, что приводит к дифференциальному включению (3) с неограниченной правой частью и пространству $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. Для изучения асимптотических свойств траекторий управляемой системы удобно перейти от неавтономного включения (3) к дифференциальному включению с параметром, которое является стационарным относительно сдвигов решений по временной переменной. Такой переход, ставший уже стандартным, осуществляется с помощью динамической системы сдвигов, порожденной правой частью включения (3), при этом использование «традиционной» расширенной метрики Хаусдорфа в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ (которая определяется формулами (1), (2) с заменой max в (2) на sup) оказывается малоэффективным, поскольку расстояние между неограниченными множествами в этом случае, как правило, равно бесконечности. Применение этой схемы к решению многих задач для включения (3) стало бы возможным, если бы удалось ввести метрику, относительно которой $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ было бы полным, а сходимость последовательности множеств $A^i \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n),\ i=1,2,\ldots$ означала бы сходимость в метрике Хаусдорфа при каждом $r>0$ множеств $A^i_r = A^i \cap O_r \subset A^i$ (представляющих собой компакты, «отрезанные» сферой радиуса r от множеств исходной последовательности). Для определения такой метрики Е. Л. Тонковым было предложено использовать аналог метрики Бебутова пространства непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Сходимость последовательности непрерывных функций в метрике Бебутова равносильна равномерной сходимости их сужений на отрезок $[-r,r]$ при каждом положительном r. Однако при применении этой идеи для определения метрики в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ возникают трудности, которые иллюстрирует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим последовательность замкнутых неограниченных множеств

$$A^i = \left\{ \frac{(-1)^i}{i}, 1+\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}, 2+\frac{(-1)^{i+2}}{i+2}, 3+\frac{(-1)^{i+3}}{i+3}, \ldots \right\} \subset \mathbb{R}, \quad i=1,2,\ldots.$$

В метрике Хаусдорфа эта последовательность сходится к множеству $A=\{0,1,2,\ldots\}$. Было бы естественно, чтобы и в «новой» метрике данная последовательность сходилась к тому же множеству A, а последовательность множеств $A^i_r = A^i \cap O_r,\ i=1,2,\ldots$, соответственно, к $A\cap O_r$. Однако, если радиус r принимает целое значение, то $\{A^i_r\}_{i=1}^{\infty}$ не является фундаментальной в метрике Хаусдорфа, например, для четного r имеем

$$A^{2j}_r = \left\{ \frac{1}{2j},\ 1-\frac{1}{2j+1},\ \ldots,\ r-1-\frac{1}{2j+r-1} \right\},$$
$$A^{2j+1}_r = \left\{ -\frac{1}{2j+1},\ 1+\frac{1}{2j+2},\ \ldots,\ r-1+\frac{1}{2j+r},\ r-\frac{1}{2j+r+1} \right\}$$

(с увеличением i в множество A^i_r то «попадает», то из него «исчезает» ближайшая к границе r точка; в результате $\mathrm{dist}(A^{2j}_r, A^{2j+1}_r) \geqslant 1$).

Такой ситуации не возникает, если рассматривать только выпуклые замкнутые (необязательно ограниченные) множества. В работах [1, 2] для пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ была построена метрика Хаусдорфа–Бебутова, которая принимает только конечные значения и относительно которой $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ является полным. Эти результаты позволили исследовать дифференциальные включения с неограниченной выпуклозначной правой частью и управляемые системы, приводящие к таким включениям.

Ниже предлагается несколько иной подход к построению «отрезанных сферой» множеств и определению расстояния между ними, позволяющий преодолеть указанные трудности и основанный на следующей идее.

Пусть $A,B \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. Выберем радиус r и найдем пересечения этих множеств с открытым шаром: $A(r) \doteq A\cap O^o_r,\ B(r) \doteq B\cap O^o_r$. Далее, положим

$$\varrho_r\big(A(r),B(r)\big) \doteq \inf\left\{ \mathrm{dist}(\widetilde{A},\widetilde{B}) : \widetilde{A},\widetilde{B} \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n),\ \widetilde{A}\cap O^o_r = A(r), \widetilde{B}\cap O^o_r = B(r) \right\}.$$

Нетрудно видеть, что inf достигается на множествах $\widetilde{A} \doteq A(r) \cup S_r$, $\widetilde{B} \doteq B(r) \cup S_r$, то есть

$$\varrho_r\big(A(r), B(r)\big) = \operatorname{dist}\big(A(r) \cup S_r, B(r) \cup S_r\big).$$

Отметим, что для любого r отображение $\varrho_r(\cdot,\cdot)$ задает метрику в пространстве $\operatorname{cl}(O_r^o)$. Теперь несложно построить метрику в пространстве $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$: осталось применить к функции $r \longmapsto \varrho_r(A(r), B(r))$ конструкцию метрики Бебутова, и будет получено требуемое расстояние между множествами A, B. Сходимость в такой метрике последовательности $\{A^i\}_{i=1}^\infty \subset \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ будет равносильна сходимости при любом r последовательности $\{A^i(r)\}_{i=1}^\infty$ в метрике ϱ_r или сходимости $\{A^i(r) \cup S_r\}_{i=1}^\infty$ в метрике Хаусдорфа. Возвращаясь к рассмотренному выше примеру 1, теперь получаем

$$\varrho_r\big(A^{2j}(r), A^{2j+1}(r)\big) = \operatorname{dist}\big(A_r^{2j} \cup S_r,\ A_r^{2j+1} \cup S_r\big) = \frac{1}{4j^2 + 2j},$$

и последовательность $\{A^i(r)\}_{i=1}^\infty$ является фундаментальной в метрике ϱ_r (а последовательность $\{A_r^i \cup S_r\}_{i=1}^\infty$ будет фундаментальной в метрике Хаусдорфа).

Отметим, что вместо системы шаров $\{O_r^o\}_{r\geqslant 0}$ для определения множеств $A(r), B(r)$ и функции ϱ_r можно использовать любую систему вложенных множеств $\{\mathfrak{O}_r\}_{r\geqslant 0}$, удовлетворяющую равенству $\bigcup\limits_{r\geqslant 0} \mathfrak{O}_r = \mathbb{R}^n$.

Руководствуясь изложенной идеей, дадим точные определения и опишем свойства вводимой метрики.

§ 1. Пространство $\big(\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$

Для любого $r \geqslant 0$ и произвольного множества $H \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\mathfrak{S}_r H \doteq (H \cap O_r^o) \cup S_r. \tag{4}$$

Определим отображение

$$\mathbb{R}_+ \times \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n) \ni (r, F, G) \longmapsto \varrho_r(F, G) \doteq \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_r F,\ \mathfrak{S}_r G) \in \mathbb{R}_+,$$

которое потребуется для введения метрики в пространстве $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим свойства этого отображения.

Лемма 1. *Для любых $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ функция $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \varrho_r(F, G) \in \mathbb{R}_+$ непрерывна.*

Доказательство. Прежде всего, для всякого множества $F \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и произвольных $\bar{r} > r \geqslant 0$ оценим $\operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F, \mathfrak{S}_r F)$. Так как $S_r \subset S_{\bar{r}} + O_{\bar{r}-r}$ и $F \cap O_r^o \subset F \cap O_{\bar{r}}^o$, то $\mathfrak{S}_r F \subset \mathfrak{S}_{\bar{r}} F + O_{\bar{r}-r}$. Таким образом, $d(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_{\bar{r}} F) \leqslant \bar{r} - r$. С другой стороны, вследствие включений $\mathfrak{S}_{\bar{r}} F \subset \mathfrak{S}_r F + O_{\bar{r}-r}$, $S_{\bar{r}} \not\subset \mathfrak{S}_r F + O_\alpha$ для $\alpha < \bar{r} - r$ имеем $d(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F, \mathfrak{S}_r F) = \bar{r} - r$. Таким образом,

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F, \mathfrak{S}_r F) = \bar{r} - r.$$

Теперь, используя полученное соотношение, для произвольных $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \leqslant \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_{\bar{r}} F) + \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F, \mathfrak{S}_{\bar{r}} G) + \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar{r}} G, \mathfrak{S}_r G) = \\ = 2(\bar{r} - r) + \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F, \mathfrak{S}_{\bar{r}} G);\end{aligned}$$

и, учитывая симметричность,

$$|\operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F, \mathfrak{S}_{\bar{r}} G) - \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G)| \leqslant 2(\bar{r} - r).$$

Итак, доказано, что функция $r \mapsto \varrho_r(F, G)$ является непрерывной, и, более того, липшицевой с константой 2. $\square$

Лемма 2. *Для любых $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и любого $r \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\varrho_r(F,G) \leqslant \operatorname{dist}(F,G).$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\operatorname{dist}(F,G)=\infty$. Рассмотрим ситуацию, когда расстояние по Хаусдорфу между F и G конечно. Покажем сначала, что

$$\operatorname{dist}(F\cup S_r, G\cup S_r) \leqslant \operatorname{dist}(F,G). \tag{5}$$

Пусть $\alpha \doteq d(F,G)$. Тогда $F \subset G+O_\alpha \subset (G\cup S_r)+O_\alpha$, а так как $S_r \subset (G\cup S_r)+O_\alpha$, то $F\cup S_r \subset (G\cup S_r)+O_\alpha$. Таким образом, $d(F\cup S_r, G\cup S_r) \leqslant \alpha = d(F,G)$. Аналогично, $d\big(G\cup S_r, F\cup S_r\big) \leqslant d\big(G,F\big)$, и (5) имеет место.

Далее, определим множества $\overline{F}_r \doteq F\backslash O_r$, $\overline{G}_r \doteq G\backslash O_r$. Воспользовавшись представлением множеств $F\cup S_r$ и $G\cup S_r$ в виде объединений непересекающихся множеств

$$F\cup S_r = \mathfrak{S}_r F \cup \overline{F}_r, \quad G\cup S_r = \mathfrak{S}_r G \cup \overline{G}_r,$$

получим

$$d(F,G) \geqslant d(F\cup S_r, G\cup S_r) = d\left(\mathfrak{S}_r F\cup\overline{F}_r, \mathfrak{S}_r G\cup\overline{G}_r\right) =$$
$$= \max_{f\in\mathfrak{S}_r F\cup\overline{F}_r}\ \min_{g\in\mathfrak{S}_r G\cup\overline{G}_r} |f-g| \geqslant \max_{f\in\mathfrak{S}_r F}\ \min_{g\in\mathfrak{S}_r G\cup\overline{G}_r} |f-g| = \max_{f\in\mathfrak{S}_r F}\ \min_{g\in\mathfrak{S}_r G} |f-g|.$$

Последнее равенство вытекает из того факта, что для любой точки $\overline{g} \in \overline{G}_r$ найдется такая точка $g \in \mathfrak{S}_r G$ (например, точка пересечения сферы S_r и отрезка, соединяющего точки f и $\overline{g}$), что $|f-g| \leqslant |f-\overline{g}|$. Итак, $d(F,G) \geqslant d\big(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\big)$. Аналогично доказывается неравенство $d(G,F) \geqslant d\big(\mathfrak{S}_r G, \mathfrak{S}_r F\big)$. □

Приведем еще одну эквивалентную формулировку леммы 2, позволяющую несколько поиному взглянуть на это утверждение.

Лемма 3. *Пусть заданы произвольные $r \geqslant 0$, $F(r), G(r) \in \operatorname{cl}(O_r^o)$. Тогда для любых множеств $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$, таких, что $\widetilde{F}\cap O_r^o = F(r)$, $\widetilde{G}\cap O_r^o = G(r)$, имеет место неравенство*

$$\varrho_r\big(F(r), G(r)\big) \leqslant \operatorname{dist}(\widetilde{F}, \widetilde{G}).$$

Следствие 1. *Для любых $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ функция $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \varrho_r(F,G) \in \mathbb{R}_+$ является неубывающей.*

Доказательство. Пусть $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $\bar r > r \geqslant 0$. Тогда справедливы равенства $\mathfrak{S}_r\big(\mathfrak{S}_{\bar r} F\big) = \mathfrak{S}_r F$, $\mathfrak{S}_r\big(\mathfrak{S}_{\bar r} G\big) = \mathfrak{S}_r G$, и, согласно лемме 2, получаем

$$\varrho_r(F,G) = \operatorname{dist}\left(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G\right) = \operatorname{dist}\left(\mathfrak{S}_r(\mathfrak{S}_{\bar r} F), \mathfrak{S}_r(\mathfrak{S}_{\bar r} G)\right) \leqslant \operatorname{dist}\left(\mathfrak{S}_{\bar r} F, \mathfrak{S}_{\bar r} G\right) = \varrho_{\bar r}(F,G).$$

Лемма 4. *Для любого $r > 0$ отображение $\varrho_r(\cdot,\cdot)$ задает метрику в пространстве $\operatorname{cl}(O_r^o)$. В этой метрике пространство $\operatorname{cl}(O_r^o)$ является полным.*

Доказательство. Пусть $r > 0$. Вначале отметим, что для множества $H \in \operatorname{cl}(O_r^o)$ определение (4) означает $\mathfrak{S}_r H = H \cup S_r$. Поскольку $\varrho_r(F,G) = \operatorname{dist}(F\cup S_r, G\cup S_r)$ для любых $F, G \in \operatorname{cl}(O_r^o)$, то, очевидно, ϱ_r удовлетворяет всем аксиомам метрики. Далее, для любой фундаментальной в этой метрике последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty \subset \operatorname{cl}(O_r^o)$ последовательность компактных множеств $\mathfrak{S}_r F^i = F^i \cup S_r$, $i = 1, 2, \ldots$ является фундаментальной в метрике Хаусдорфа и в силу полноты $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ сходится к некоторому множеству $G \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, $S_r \subset G$ и $G \subset O_r$. Таким образом, $\varrho_r(F^i, F) \to 0$, где $F \doteq G \backslash S_r \in \mathrm{cl}(O_r^o)$. □

Теперь определим метрику в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. Для любых $F, G \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) \doteq |\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| + \sup_{r>0} \min\left\{\varrho_r(F, G),\ \frac{1}{r}\right\}. \tag{6}$$

Заметим, что согласно приведенным выше утверждениям в этом определении можно заменить sup на max, причем максимальное значение достигается в точке r, удовлетворяющей уравнению $\varrho_r(F, G) = 1/r$.

Теорема 1. *Равенство* (6) *определяет метрику в пространстве* $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. *В этой метрике пространство* $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ *является полным, а его подмножество* $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *— замкнутым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале проверим, что для любых $F, G, H \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ выполнено:
1) $0 \leqslant \rho_{\mathrm{cl}}(F, G) < \infty$, причем, $\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) = 0$ тогда и только тогда, когда $F = G$;
2) $\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) = \rho_{\mathrm{cl}}(G, F)$;
3) $\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) \leqslant \rho_{\mathrm{cl}}(F, H) + \rho_{\mathrm{cl}}(H, G)$.

Очевидно, что $\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) \geqslant 0$ и $|\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| < \infty$ для любых множеств $F, G \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $r_* \doteq \min\{\varrho(0, F), \varrho(0, G)\}$. Тогда при $r \leqslant r_*$ получаем $\varrho_r(F, G) = 0$, а при $r > r_*$ выполнено $\varrho_r(F, G) \leqslant r - r_*$. Так как

$$\sup_{r>0} \min\left\{r - r_*, \frac{1}{r}\right\} \leqslant \sup_{r>0} \min\left\{r, \frac{1}{r}\right\} = 1,$$

то $\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) \leqslant |\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| + 1 < \infty$. Далее,

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F, G) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| = 0 \\ \mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = 0 \quad \forall\, r > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{F \cap O_r^o = G \cap O_r^o \quad \forall\, r > 0\right\} \Leftrightarrow F = G.$$

Свойство 2) очевидно. Свойство 3) вытекает из неравенств

$$|\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| \leqslant |\varrho(0, F) - \varrho(0, H)| + |\varrho(0, H) - \varrho(0, G)|,$$

$$\mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \leqslant \mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r H) + \mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r H, \mathfrak{S}_r G) \quad \forall r \geqslant 0,$$

которые легко проверяются.

Итак, установлено, что $\big(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$ — метрическое пространство. Докажем его полноту. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ является фундаментальной, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $i, j > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F^j) = |\varrho(0, F^i) - \varrho(0, F^j)| + \sup_{r>0} \min\left\{\varrho_r(F^i, F^j), \frac{1}{r}\right\} \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что последовательность чисел $\big\{\varrho(0, F^i)\big\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна и, значит, является сходящейся; обозначим ее предел через r_0; очевидно, что $r_0 \geqslant 0$.

Выберем произвольный радиус $r > r_0$ и рассмотрим последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^{\infty}$. Из (7) следует, что для произвольного $\varepsilon \in (0, 1/r)$ при всех $i, j > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\varrho_r(F^i, F^j) = \mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F^j) < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^{\infty}$ является фундаментальной в метрике Хаусдорфа dist, и, следовательно, она сходится в этой метрике к некоторому компактному «предельному» множеству G_r, при этом $\varrho(0, G_r) = r_0$.

Далее, для произвольного $r > r_0$ множество $F_r \doteq G_r \cap O_r^o$ не пусто, так как $\varrho(0, G_r) = r_0$. Покажем, что при любом $\bar{r} > r$ справедливо равенство $G_{\bar{r}} \cap O_r^o = G_r \cap O_r^o = F_r$. Пусть $x \in G_{\bar{r}} \cap O_r^o$. Тогда найдется последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in \mathfrak{S}_{\bar{r}} F^i$, сходящаяся к x. Начиная с некоторого номера, эта последовательность обязана содержаться в шаре радиуса r, то есть $x_i \in \mathfrak{S}_r F^i$ при достаточно больших i. Поэтому $x \in G_r$, кроме того, $x \in O_r^o$. Далее, если $x \in G_r \cap O_r^o$, то очевидно, $x \in G_{\bar r} \cap O_r^o$.

Из доказанного следует, что с увеличением r множества F_r «расширяются»: если $\bar r \geqslant r$, то $F_r = G_r \cap O_r^o = G_{\bar r} \cap O_r^o \subset G_{\bar r} \cap O_{\bar r}^o = F_{\bar r}$. Определим теперь множество $F \doteq \bigcup\limits_{r>r_0} F_r$ и покажем, что оно замкнуто. Отметим, что для любого r выполнено $F \cap O_r^o = F_r$, и множество $F_r \cup S_r = \mathfrak{S}_r F$ является замкнутым. Возьмем некоторую последовательность $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset F$, сходящуюся к y. В силу сходимости эта последовательность ограничена, поэтому, начиная с некоторого номера i, имеют место включения $y_i \in O_p^o$, $y_i \in \mathfrak{S}_p F$, где $p = 2|y|$. Тогда в силу замкнутости $\mathfrak{S}_p F$ получаем, что $y \in \mathfrak{S}_p F$; с другой стороны, $y \notin S_p$. Таким образом, $y \in F_p \subset F$, и F замкнуто.

Покажем теперь, что в метрике (6) последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится именно к множеству F. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\bar r(\varepsilon) = 2/\varepsilon$. Так как последовательность $\left\{\mathfrak{S}_{\bar r(\varepsilon)} F^i\right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к множеству $G_{\bar r(\varepsilon)}$ (в метрике Хаусдорфа), то при всех i, начиная с некоторого номера I, будут выполнены неравенства

$$\varrho_{\bar r(\varepsilon)}(F^i, F) = \operatorname{dist}(\mathfrak{S}_{\bar r(\varepsilon)} F^i, \mathfrak{S}_{\bar r(\varepsilon)} F) < \varepsilon/2\,, \quad |\varrho(0, F^i) - \varrho(0, F)| < \varepsilon/2\,. \tag{8}$$

Тогда, поскольку, согласно следствию 1, функция $r \mapsto \varrho_r(F^i, F)$ не убывает, то из (8) следует, что для любого $r \leqslant \bar r(\varepsilon)$ выполнено $\varrho_r(F^i, F) < \varepsilon/2$. Далее, при $r > \bar r(\varepsilon)$ имеем $1/r < \varepsilon/2$. Таким образом, для всех $i > I$ получаем $\sup\limits_{r>0} \min\left\{\varrho_r(F^i, F), 1/r\right\} \leqslant \varepsilon/2$ и, следовательно, $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) = 0$.

Проверим замкнутость подпространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\left(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\right)$. Пусть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность замкнутых выпуклых множеств. Тогда, рассуждая как и выше, получаем, что множество F_r выпукло для любого r, и, следовательно, множество F выпукло, как объединение расширяющихся выпуклых множеств (см. [3]). $\square$

Пример 2. Рассмотрим последовательность множеств $F^i = \{0, i\} \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность невыпуклых множеств является фундаментальной в метрике ρ_{cl}. Действительно, для произвольных i, j $(j > i)$ получаем

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F^j) = \frac{\sqrt{i^2+4} - i}{2} \to 0, \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится в метрике ρ_{cl} к множеству $F = \{0\}$. Отметим, что рассмотренная последовательность компактных множеств не является фундаментальной в метрике Хаусдорфа.

Пример 3. Пусть теперь задана последовательность выпуклых множеств $F^i = [0, i] \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность также фундаментальна в метрике ρ_{cl}, так как для любых индексов i, j $(j > i)$

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F^j) = \frac{\sqrt{i^2+8} - i}{4} \to 0, \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к замкнутому выпуклому множеству $F = [0, \infty)$. В метрике Хаусдорфа рассмотренная последовательность компактов не является фундаментальной.

Приведем критерий сходимости последовательности в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 5. *Для любых $F, F^i \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots$, из сходимости $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) \to 0$ следует $\varrho(0, F^i) \to \varrho(0, F)$ и $\varrho_r(F^i, F) \to 0$ для любого $r > 0$.*

Обратно, пусть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. Если существует $\varrho_0 = \lim_{i\to\infty} \varrho(0, F^i)$ и найдется такое $r_0 \geqslant 0$, что для любого $r > r_0$ последовательность $\{F^i \cap O_r^o\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{cl}(O_r^o)$ сходится в метрике ϱ_r к некоторому множеству $F_r \in \mathrm{cl}(O_r^o)$, то для любых $\bar r > r > r_0$ выполнено вложение $F_{\bar r} \supset F_r$, и в пространстве $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по метрике ρ_{cl} к множеству $F \doteq \bigcup\limits_{r>r_0} F_r \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$, причем, $\varrho(0, F) = \varrho_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $F, F^i \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1,2,\ldots$, $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) \to 0$. Тогда, очевидно, $\varrho(0, F^i) \to \varrho(0, F)$. Далее, зафиксируем произвольное $\bar r > 0$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1/\bar r)$ найдется такой номер $I = I(\varepsilon)$, что для всех $i > I(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\sup\limits_{r>0}\min\bigl\{\varrho_r(F^i, F), 1/r\bigr\} < \varepsilon$. Нам достаточно оценки

$$\sup_{0<r\leqslant\bar r}\min\left\{\varrho_r(F^i, F), \frac{1}{r}\right\} < \ \varepsilon. \tag{9}$$

Так как при $0 < r \leqslant \bar r$ выполнено $1/r \geqslant \varepsilon$, то из (9) следует, что $\varrho_r(F^i, F) < \varepsilon$ для любого $r \in (0, \bar r]$. Поэтому $\varrho_r(F^i, F) \to 0$ при $r \in (0, \bar r]$, а вследствие произвольного выбора $\bar r$, это соотношение выполнено и для любого $r > 0$.

2) Пусть теперь $\lim\limits_{i\to\infty}\varrho(0, F^i)$ существует и равен ϱ_0, и $r_0 \geqslant 0$ такое, что для любого $r > r_0$ последовательность $\{F^i \cap O_r^o\}_{i=1}^\infty$ сходится в метрике ϱ_r к множеству F_r. Не уменьшая общности, можно считать, что $r_0 > \varrho_0$. Согласно лемме 4, $F_r \in \operatorname{cl}(O_r^o)$, а из свойств расстояния по Хаусдорфу следует, что $\varrho_0 = \varrho(0, F_r)$. Отметим, что последовательность $\{F^i \cap O_r^o\}_{i=1}^\infty$ будет сходиться в $\operatorname{cl}(O_r^o)$ также и при всех $r < r_0$. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер I, что для любого $i > I$ имеет место неравенство

$$\varrho_{r_0}(F^i \cap O_{r_0}^o, F_{r_0}) < \varepsilon,$$

где $F_{r_0} \in O_{r_0}^o$. Тогда, в силу неубывания функции ϱ_r (см. следствие 1), для любого $r < r_0$ и всех $i > I$ получаем оценку

$$\varrho_r(F^i \cap O_r^o, F_{r_0} \cap O_r^o) < \varepsilon,$$

то есть для $r < r_0$ последовательность $\{F^i \cap O_r^o\}_{i=1}^\infty$ сходится к $F_r = F_{r_0} \cap O_r^o$.

Далее, рассуждая как в доказательстве теоремы 1, можно показать, что для $\bar r > r \geqslant r_0$ верны соотношения $F_r = F_r \cap O_r^o = F_{\bar r} \cap O_r^o \subset F_{\bar r}$. Рассмотрим множество $F \doteq \bigcup\limits_{r>r_0} F_r$. Оно замкнуто (см. доказательство теоремы 1) и, очевидно, $F \cap O_r^o = F_r$, $\varrho(0, F) = \varrho_0$. Кроме того, $F = \bigcup\limits_{r>0} F_r$, а в силу задания функции ϱ_r для любого $r > 0$ получаем $\varrho_r(F^i \cap O_r^o, F_r) = \varrho_r(F^i, F)$.

Выберем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\bar r(\varepsilon) = 2/\varepsilon$. Тогда найдется такое число I, что для всех $i > I$ имеют место неравенства $\varrho_{\bar r(\varepsilon)}(F^i, F) < \varepsilon/2$ и $|\varrho(0, F^i) - \varrho(0, F)| < \varepsilon/2$. Далее, при $r \leqslant \bar r(\varepsilon)$, согласно следствию 1, получаем $\varrho_r(F^i, F) < \varepsilon/2$, а при $r > \bar r(\varepsilon)$ имеем $1/r < 1/\bar r(\varepsilon) = \varepsilon/2$. Таким образом,

$$\sup_{r>0}\min\left\{\varrho_r(F^i, F), \frac{1}{r}\right\} = \sup\left\{\sup_{0<r\leqslant\bar r(\varepsilon)}\bigl\{\varrho_r(F^i, F)\bigr\}, \sup_{r>\bar r(\varepsilon)}\bigl\{1/r\bigr\}\right\} < \varepsilon/2,$$

и, следовательно, $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) < \varepsilon$. □

§ 2. Условия равносильности сходимостей в метриках ρ_{cl} и Dist, ρ_{cl} и dist

Для пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ выпуклых замкнутых множеств представляет интерес сравнение метрики ρ_{cl} с предложенной и изученной в работах [1, 2] метрикой Хаусдорфа–Бебутова Dist.

Пусть $F \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, и f_0 — ближайшая к нулю точка множества F. Для любого $r \geqslant 0$ положим

$$\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}} F \doteq F \cap O_r(f_0).$$

Очевидно, что $\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}} F \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$. Расстояние по Хаусдорфу–Бебутову между замкнутыми выпуклыми множествами F и G определяется равенством

$$\operatorname{Dist}(F, G) \doteq \sup_{r>0}\min\left\{\operatorname{dist}\bigl(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}} F, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}} G\bigr), \frac{1}{r}\right\}.$$

Метрика Dist принимает только конечные значения, и пространство $\big(\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Dist}\,\big)$ является полным. Возвращаясь к примеру 3, отметим, что рассмотренная в нем последовательность выпуклых множеств $F^i = [0, i] \subset \mathbb{R}$ является фундаментальной не только в метрике ρ_{cl}, но и в метрике Dist . Это не случайно: мы покажем, что для пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ сходимость в метрике Dist эквивалента сходимости в метрике ρ_{cl}. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение — критерий сходимости в $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ по метрике Хаусдорфа–Бебутова, — которое дополняет результаты работы [2].

Лемма 6. *Пусть* $F, F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots,$ *и* $\mathrm{Dist}\big(F^i, F\big) \to 0$ *при* $i \to \infty$. *Тогда* $\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F\big) \to 0$ *при любом* $r \geqslant 0$.

Обратно, пусть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$. *Если существует такое* $r_0 \geqslant 0$, *что для любого* $r > r_0$ *последовательность* $\big\{\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i\big\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится в пространстве* $\big(\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n), \mathrm{dist}\,\big)$ *к некоторому множеству* F_r, *то для любых* $\bar r > r > r_0$ *выполнено вложение* $F_{\bar r} \supset F_r$, *и последовательность* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится к* $F \doteq \bigcup\limits_{r > r_0} F_r \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *в метрике* Dist .

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к F в метрике Dist . Возьмем произвольное $\bar r > 0$ и для любого $\varepsilon \in (0, 1/\bar r]$ найдем такой номер $I = I(\varepsilon)$, что для всех $i > I$ выполнено неравенство $\sup\limits_{r>0} \min\Big\{\,\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F\big), 1/r\Big\} < \varepsilon$. Тогда, при любом $r \in (0, \bar r)$ имеем $1/r > \varepsilon$, и, следовательно, $\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F\big) < \varepsilon$. Это означает, что $\mathrm{dist}(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F) \to 0$ при всех $r \in (0, \bar r)$, а в силу произвольного выбора $\bar r$, получаем сходимость при любом $r > 0$.

При $r = 0$ имеем $\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i = \{f_0^i\}$, $\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F = \{f_0\}$ — ближайшие к нулю точки множеств F^i и F. В этом случае доказываемое соотношение $|f_0^i - f_0| \to 0$ следует из очевидной оценки $|f_0^i - f_0| \leqslant \mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F\big) + 2r$.

2) Пусть теперь задано $r_0 \geqslant 0$ такое, что $\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, F_r\big) \to 0$ для любого $r > r_0$. В силу полноты пространства $\big(\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n), \mathrm{dist}\,\big)$, множество F_r компактно и выпукло. Далее, для любых $\bar r > r > r_0$ имеет место включение $F_{\bar r} \supset F_r$. Действительно, если $p \in F_r$, то существует последовательность $p^i \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i$, $i = 1, 2, \ldots,$ сходящаяся к p, а так как $\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} F^i \supset \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i$ для любого i, то $p^i \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} F^i$, $i = 1, 2, \ldots,$ и значит $p \in F_{\bar r}$.

Определим множество $F \doteq \bigcup\limits_{r > r_0} F_r$. Оно замкнуто, выпукло (см. доказательство теоремы 1), и, кроме того, $\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F = F_r$.

Пусть f_0^i, f_0 — ближайшие к нулю точки множеств F^i, F, соответственно. Покажем, что $f_0^i \to f_0$, $i \to \infty$. Из $\mathrm{dist}(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i, F_r) \to 0$ следует, что найдется последовательность $\{c^i\}_{i=1}^{\infty}$, $c^i \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r F^i$, которая сходится к $f_0 \in F_r$. Кроме того, последовательность $\{f_0^i\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена и, следовательно, содержит сходящуюся подпоследовательность. Рассмотрим ее предельную точку $\bar f \in F_r$. Так как $|f_0^i| \leqslant |c^i|$, $i = 1, 2, \ldots,$ то $|\bar f| \leqslant |f_0|$, и поскольку f_0 — ближайшая к нулю точка множества F, получаем $|\bar f| = |f_0|$. Отсюда, в силу единственности ближайшей к нулю точки выпуклого множества, следует $\bar f = f_0$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется оценка

$$\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r H, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r G\big) \leqslant 2\,\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} H, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} G\big) + |h_0 - g_0|, \tag{10}$$

где $H, G \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, h_0 и g_0 — ближайшие к нулю точки H и G, соответственно, и $0 < r < \bar r$. Покажем, что (10) имеет место. Обозначим $\alpha \doteq \mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} H, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} G\big)$. Возьмем произвольную точку $h \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r H$. Тогда $h \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} H$, и существует такая точка $g \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} G$, что $|h - g| \leqslant \alpha$. Если $g \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r G$, то получаем, что $d\big(\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r H, \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r G\big) \leqslant \alpha$. Пусть $g \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} G \backslash \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r G$, и $\bar g$ — точка пересечения отрезка, соединяющего точки g и g_0, со сферой $S_r(g_0)$, то есть $|\bar g - g_0| = r$ и $\bar g \in \mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_r G$ (в силу выпуклости $\mathfrak{S}^{\mathrm{cv}}_{\bar r} G$). Тогда получаем следующие соотношения:

$$|h - \bar g| \leqslant |h - g| + |g - \bar g| \leqslant \alpha + |g - g_0| - r \leqslant \alpha + |g - h| + |h - h_0| + |h_0 - g_0| - r \leqslant$$
$$\leqslant 2\alpha + |h_0 - g_0|.$$

Таким образом, $d\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}H, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}G\big) \leqslant 2\alpha + |h_0 - g_0|$. Аналогично, $d\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}G, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}H\big) \leqslant 2\alpha + |h_0 - g_0|$. Используя полученную оценку (10), можно заключить, что из $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{r_0}^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_{r_0}^{\mathrm{cv}}F\big) \to 0$ следует $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F\big) \to 0$ при любом $r \in (0, r_0)$. Таким образом, выполнено $F = \bigcup\limits_{r>0} F_r$.

Докажем теперь, что $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к F в метрике Dist. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\bar{r}(\varepsilon) = 3/\varepsilon$ и такой номер $I = I(\varepsilon)$, что для любого $i > I$ имеют место неравенства $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{\bar{r}(\varepsilon)}^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}(\varepsilon)}^{\mathrm{cv}}F\big) < \varepsilon/3$ и $|f_0^i - f_0| < \varepsilon/3$. Тогда для любого $r \leqslant \bar{r}(\varepsilon)$ и всех $i > I$ справедлива оценка $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F\big) < \varepsilon$, и значит

$$\operatorname{Dist}(F^i, F) \leqslant \sup\left\{\sup_{0<r\leqslant\bar{r}(\varepsilon)}\big\{\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F\big)\big\}, \sup_{r>\bar{r}(\varepsilon)}\{1/r\}\right\} < \varepsilon,$$

что и доказывает лемму. □

Используя леммы 5 и 6, покажем далее, что для выпуклых замкнутых множеств сходимость в метрике ρ_{cl} равносильна сходимости в метрике Dist.

Теорема 2. *Пусть* $F^i, F \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Последовательность* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится к* F *в метрике* Dist *в том и только в том случае, если она сходится к этому множеству в метрике* ρ_{cl}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к множеству F в метрике Dist. Тогда, как доказано в лемме 6, последовательность $\{f_0^i\}_{i=1}^{\infty}$ ближайших к нулю точек множеств F^i, $i = 1, 2, \ldots$ сходится к f_0 — ближайшей к нулю точке множества F, и для любого $r > 0$ имеем $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F\big) \to 0$. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$, $\bar{r} > 2|f_0| + 2\varepsilon$ и найдем такой номер $I = I(\varepsilon)$, что для всех $i > I$ имеют место неравенства $|f_0^i - f_0| < \varepsilon$ и $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F\big) < \varepsilon$. Пусть $r = \bar{r} - |f_0| - \varepsilon$. Тогда $r > |f_0| + \varepsilon$, $r > |f_0^i|$, для всех $i > I$, и следовательно, пересечения множеств F^i и F с шаром O_r не пусты. Кроме того, $O_r \subset O_{\bar{r}}(f_0)$, $O_r \subset O_{\bar{r}}(f_0^i)$, и следовательно, имеют место включения $F \cap O_r \subset \mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F$, $F^i \cap O_r \subset \mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F^i$, $i > I$. Покажем, что

$$\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF^i, \mathfrak{S}_rF\big) < \varepsilon.$$

Возьмем произвольную точку $f^i \in \mathfrak{S}_rF^i$ и докажем, что найдется такая точка $f \in \mathfrak{S}_rF$, для которой $|f^i - f| < \varepsilon$. Если $r - \varepsilon \leqslant |f^i| \leqslant r$, то положим $f = \frac{r}{|f^i|}f^i \in S_r$. Если $|f^i| < r - \varepsilon$, то $O_\varepsilon(f^i) \subset O_r$. Далее, поскольку $f^i \in \mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F^i$ и $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F\big) < \varepsilon$, то найдется такая точка $\bar{f} \in \mathfrak{S}_{\bar{r}}^{\mathrm{cv}}F$, что $|f_i - \bar{f}| < \varepsilon$. Тогда $\bar{f} \in O_\varepsilon(f^i) \subset O_r$, и следовательно, $\bar{f} \in F \cap O_r$, то есть в качестве f можно взять $\bar{f}$.

Таким образом, согласно лемме 5, получаем $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) \to 0$, $i \to \infty$.

2) Докажем обратное утверждение. Пусть $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) \to 0$, при $i \to \infty$. Из леммы 5 следует, что $|f_0^i - f_0| \to 0$, $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_rF^i, \mathfrak{S}_rF\big) \to 0$, для всех $r > 0$. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и $\bar{r} > \ |f_0| + 2\varepsilon$. Тогда найдется такой номер $I = I(\varepsilon)$, что для каждого $i > I$ имеют место неравенства $|f_0^i - f_0| < \varepsilon/3$ и $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_{\bar{r}}F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}}F\big) < \varepsilon/3$. Для $r = \bar{r} - |f_0| - 2\varepsilon > 0$ построим множества $\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i$, $\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F$. Так как $r < \bar{r}$, то для всех $i > I$ справедливы включения

$$\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i \subset F^i \cap O_{\bar{r}}, \quad \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F \subset F \cap O_{\bar{r}}.$$

Покажем, что $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F\big) < \varepsilon$. Для произвольной точки $f^i \in \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i$ существует такая точка $f \in F \cap O_{\bar{r}}$, что $|f^i - f| < \varepsilon/3$. Если $f \notin \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F$, то найдем точку $\bar{f}$ пересечения отрезка, соединяющего f_0 и f, со сферой $S_{r_0}(f)$. Из соотношений

$$|f_0 - f| = |f - \bar{f}| + r, \quad |f_0 - f| \leqslant |f_0 - f_0^i| + |f_0^i - f^i| + |f^i - f| < r + 2\varepsilon/3$$

следует $|f - \bar{f}| < 2\varepsilon/3$ и $|f^i - \bar{f}| \leqslant |f^i - f| + |f - \bar{f}| < \varepsilon$. Таким образом, $\operatorname{dist}\big(\mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F^i, \mathfrak{S}_r^{\mathrm{cv}}F\big) < \varepsilon$, и, согласно лемме 6, получаем $\operatorname{Dist}(F^i, F) \to 0$, $i \to \infty$. □

Теперь рассмотрим пространства $\big(\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$, $\big(\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$. Эти пространства не будут полными, что видно из приведенного выше примера 3, их пополнениями будут $\big(\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$

и $\big(\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$, соответственно. Мы покажем, однако, что при некоторых дополнительных условиях сходимость компактных (выпуклых компактных) множеств в метрике ρ_{cl} будет равносильна сходимости в метрике dist.

Теорема 3. *Пусть* $F^i \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\big(F^i \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)\big)$, $i = 1, 2, \ldots$. *Тогда, если последовательность* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится к* $F \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\big(F \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)\big)$ *в метрике* dist, *то она сходится к этому множеству в метрике* ρ_{cl}.

Обратно, если последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\big(\{F^i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)\big)$ *сходится к* $F \subset \mathbb{R}^n$ *в метрике* ρ_{cl}, *и множества* F^i, $i = 1, 2, \ldots$, *ограничены в совокупности, то* $F \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\big(F \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)\big)$, *и* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *сходится к* F *в метрике* dist.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mathrm{dist}(F^i, F) \to 0$, $i \to \infty$. Тогда, согласно свойствам расстояния по Хаусдорфу, получаем $|\varrho(0, F^i) - \varrho(0, F)| \to 0$, Далее, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $I = I(\varepsilon)$, что для любого $i > I$ имеет место неравенство $\mathrm{dist}(F^i, F) < \varepsilon$. Из сходимости $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ в метрике Хаусдорфа следует, что найдется $p > 0$, для которого F^i, $F \subset O_p^o$, $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, для любого $r \geqslant p$ и всех $i > I$ имеет место неравенство $\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F\big) < \varepsilon$. Таким образом, согласно лемме 5, $\rho_{\mathrm{cl}}\big(F^i, F\big) \to 0$.

2) Пусть теперь $\rho_{\mathrm{cl}}(F^i, F) \to 0$. Согласно лемме 5, $\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F\big) \to 0$ для любого $r > 0$. Так как F^i, $i = 1, 2, \ldots$, компактны и ограничены в совокупности, то найдется такое $p > 0$, что $F^i \subset O_p^o$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $F \subset O_p$. Действительно, если $f \in F$ и $\varrho(f, O_p) = \delta > 0$, то

$$\mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}_{p+2\delta} F, \mathfrak{S}_{p+2\delta} F^i\big) \geqslant \varrho\big(f, \mathfrak{S}_{p+2\delta} F^i\big) = \varrho\big(f, F^i \cup S_{p+2\delta}\big) \geqslant \delta.$$

Таким образом, $F \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, и для любого $r \geqslant 2p$ имеем $\mathrm{dist}(F^i, F) = \mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F\big)$, то есть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к F в метрике dist.

Доказательство для пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ аналогично. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.
2. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.
3. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.

Поступила в редакцию 12.10.2011

Жуковский Евгений Семенович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: zukovskys@mail.ru

Панасенко Елена Александровна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: panlena_t@mail.ru

E. S. Zhukovskii, E. A. Panasenko

On one metric in the space of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$

Keywords: complete metric space of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$, subspaces, convergence.

Mathematical Subject Classifications: 54E50, 34A60

МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 1

In the work, there is presented a new metric in the space $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ of all nonempty closed (not necessarily bounded) subsets of $\mathbb{R}^n$. The convergence of sets in this metric is equivalent to convergence in the Hausdorff metric of the intersections of the given sets with the balls of any positive radius centered at zero united then with the corresponding spheres. It is proved that, with respect to the metric considered, the space $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ is complete, and its subspace of nonempty closed convex subsets of $\mathbb{R}^n$ is closed. There are also derived the conditions that guarantee the equivalence of convergence in this metric to convergence in the Hausdorff metric, and to convergence in the Hausdorff–Bebutov metric. The results obtained can be applied to studying control problems and differential inclusions.

REFERENCES

1. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.

2. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136.

3. Leichtweiss K. *Vypuklye mnozhestva* (Convex sets), Moscow: Nauka, 1985, 335 p.

Received 12.10.2011

Zhukovskii Evgenii Semenovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: zukovskys@mail.ru

Panasenko Elena Aleksandrovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: panlena_t@mail.ru