МАТЕМАТИКА 2012. Вып. 1

УДК 517.977

© *А. А. Усова*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ И ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ[1]

Изучается поведение оптимальных решений и функции цены в задачах оптимального управления на бесконечном промежутке времени, возникающих в моделях экономического роста, когда параметр эластичности производственной функции Кобба–Дугласа растет до своего предельного значения, равного единице. Решение задачи строится в рамках принципа максимума Понтрягина, адаптированного к задачам на бесконечном промежутке времени. В предельном случае задача вырождается в линейную с постоянным оптимальным управлением, зависящим от параметров модели. Качественное исследование гамильтоновых систем обнаруживает ряд значительных изменений в поведении решений, таких как отсутствие стационарного положения в предельном случае. Тем не менее, гамильтониан и максимизированный гамильтониан задачи сохраняют свои свойства гладкости по всем переменным и вогнутости по фазовым переменным. Также в работе строится функция цены для обеих задач управления и приводятся результаты численных экспериментов для иллюстрации проведенных исследований.

Ключевые слова: оптимальное управление, гамильтоновы системы, функция цены, принцип максимума Понтрягина.

Введение

В данной работе изучается качественное изменение свойств решений задач оптимального управления на бесконечном промежутке времени [1–3], когда параметры модели достигают своих предельных значений.

Рассматривается односекторная модель экономического роста [4–6], в которой основными производственными факторами выступают ВВП региона (или страны) Y, основной капитал K и рабочая сила L. Предполагается, что зависимость ВВП страны Y от основного капитала K и рабочей силы L выражается производственной функцией F Кобба–Дугласа $Y = F[K, L] = \alpha K^{\beta} L^{1-\beta}$, которая обладает свойством положительной однородности первой степени. Данное свойство впоследствии позволяет осуществить переход к относительным переменным, выражающим ВВП и основной капитал страны, приходящиеся на одного работающего человека.

В качестве управляющего фактора в модели рассматривается доля s ВВП Y, инвестируемая в капитал K. Оставшаяся после инвестирования часть ВВП в условиях замкнутой экономической системы расходуется на потребление C.

Задача оптимального управления, возникающая на основании модели, состоит в максимизации интегрального индекса потребления, дисконтированного на бесконечном промежутке времени. Исследование задачи опирается на теорию оптимального управления [3], условие трансверсальности [1] для задач оптимального управления на бесконечном промежутке времени, а также на результаты теории задач управления с неопределенностью и дифференциальные игры [2, 7]. В частности, используются работы [8–12], посвященные построению функций цены в задачах оптимального управления и дифференциальных играх на бесконечном промежутке

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11–01–00427-а, 11–01–12088-офи-м-2011, 11–01–12112-офи-м-2011), грантом поддержки ведущих научных школ (грант НШ–64508.2010.1), программой Президиума Российской академии наук № 29 «Математическая теория управления» (программа УрО РАН № 09–П–1–1015) и Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

времени. В этом контексте следует упомянуть также работы [13–18] по конечно-разностным методам построения функции цены.

Алгоритм построения решения поставленной задачи оптимального управления подробно рассматривается в работах [19, 20]. В основе алгоритма лежит конструкция нелинейного стабилизатора, построенного по принципу обратной связи [2, 7, 21], ведущего систему из любого текущего состояния к положению равновесия гамильтоновой системы.

Целью данной работы является изучение поведения решений, когда параметр эластичности производственной функции растет вплоть до своего предельного значения, равного единице. Следует отметить, что в этом случае задача вырождается в линейную и утрачивает ряд существенных свойств. В частности, нарушается требование строгой вогнутости производственной функции, так как линейная функция таковой не является. Другой момент заключается в том, что гамильтонова система линейной задачи, возникающая вследствие применения принципа максимума Понтрягина, не имеет установившегося состояния.

Решение линейной задачи оптимального управления удается построить аналитически. Изучение чувствительности оптимальных решений к изменениям параметров модели вызывает особый интерес еще и потому, что параметры модели чаще всего находятся эконометрическими методами, а, следовательно, имеют лишь приближенные значения.

В первом и втором разделах статьи приводится детальное описание односекторной модели экономического роста и производится постановка задач оптимального управления. Следующие два раздела посвящены исследованию задачи оптимального управления для линейного (предельного) случая и сравнению полученных результатов с анализом нелинейной задачи. В пятом параграфе проводится качественный анализ гамильтоновых систем, возникающих в принципе максимума Понтрягина, и исследуется поведение фазовой координаты стационарной точки при росте коэффициента эластичности производственной функции до единицы. В шестой и седьмой частях статьи строятся оптимальные траектории и функции цены обеих задач, рассматриваются вопросы чувствительности полученных решений для нелинейной задачи к изменениям параметра эластичности производственной функции. Здесь же исследуется непрерывность решений по параметру и доказывается поточечная сходимость функции цены нелинейной задачи к функции цены линейной задачи, когда параметр эластичности стремится к единице слева. В этих разделах представлены графики оптимальных траекторий и семейства функций цены, построенные для различных значений параметра эластичности производственной функции. В завершающем параграфе функция цены представляется как решение уравнения Беллмана для линейной задачи оптимального управления.

§ 1. Односекторная модель экономического роста

Рассмотрим модель управления инвестициями в основной капитал страны K в рамках замкнутой экономической системы. Предположение о замкнутости экономики подразумевает то, что внутренний валовый продукт страны Y в момент времени t может быть распределен между инвестициями в основной капитал $K(t)$, суммарный объем которых будем обозначать символом $S(t)$, и потреблением $C(t)$. Таким образом, в каждый момент времени t выполнено уравнение баланса:

$$Y(t) = S(t) + C(t). \tag{1}$$

С другой стороны, ВВП $Y(t)$ зависит от двух производственных факторов: основного капитала $K(t)$ и рабочей силы $L(t)$ страны. Данная зависимость описывается производственной функцией Кобба–Дугласа

$$Y(t) \;=\; F[K(t),\, L(t)] = \alpha K^{\beta}(t)\, (L(t))^{1-\beta}\,. \tag{2}$$

Относительно производственных функций часто предполагается, что они обладают свойством *положительной однородности первой степени*, то есть:

$$\forall\, \nu > 0 \quad F[\nu K,\, \nu L] = \nu F[K,\, L]. \tag{3}$$

Указанное свойство (3) позволяет ввести в рассмотрение относительные переменные, полученные приведением переменных $Y(t)$, $K(t)$, $C(t)$ к численности работающего населения страны $L(t)$ в момент времени t : $y(t) = \dfrac{Y(t)}{L(t)}$, $k(t) = \dfrac{K(t)}{L(t)}$ и $c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)}$. Стоит отметить, что уровень ВВП относительно одного рабочего вычисляется через производственную функцию следующим образом:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{F[K(t),\, L(t)]}{L(t)} = F\left[\frac{K(t)}{L(t)},\, 1\right] = F[k(t), 1] = f(k(t)). \tag{4}$$

Динамика основного капитала K подчиняется модели Солоу [5] и описывается уравнением:

$$\dot{K}(t) = S(t) - \mu K(t), \tag{5}$$

где μ — коэффициент обесценивания капитала. Объем инвестиций $S(t)$ в основной капитал $K(t)$ составляет от ВВП страны $Y(t)$ долю $s(t)$, то есть $S(t) = s(t)Y(t) = s(t)F[K(t),\, L(t)]$.

Относительно рабочей силы $L(t)$ предполагается, что она носит экзогенный характер и имеет экспоненциальную динамику с положительной скоростью роста n, а именно:

$$\dot{L}(t) = nL(t). \tag{6}$$

В начальный момент времени t_0 уровни основного капитала $K(t)$ и рабочей силы $L(t)$ определены значениями K_0 и L_0, соответственно.

На основании указанной динамики основных производственных факторов (5) и (6), а также свойства положительной однородности производственной функции (3) и (4), можно получить уравнение, описывающее динамику основного капитала, приходящегося на одного рабочего:

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \left(\frac{\dot{K(t)}}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{s(t)F[K(t),\, L(t)] - \mu K(t)}{L(t)} - k(t)n = \\ &= \frac{s(t)F[K(t),\, L(t)]}{L(t)} - \frac{\mu K(t)}{L(t)} - nk(t) = s(t)F\left[\frac{K(t)}{L(t)},\, 1\right] - (\mu + n)k(t).\end{aligned}$$

Следовательно изменение капитала, приходящегося на одного рабочего, описывается уравнением:

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k(t)) - \lambda k(t), \quad k(t_0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0},$$

где $\lambda = \mu + n$ — уровень размывания капитала страны вследствие его обесценивания и увеличения численности рабочей силы.

Оценкой качества инвестиционного процесса будем считать суммарный показатель относительного потребления одного рабочего $\sum\limits_{t \geqslant t_0} \dfrac{\Delta c(t)}{c(t)} \approx \ln c(t)$, дисконтированный на бесконечном промежутке времени:

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\delta t} \ln c(t)\, dt.$$

Здесь положительный параметр δ является дисконтирующим множителем.

Уровень потребления $C(t)$ в стране вычисляется, исходя из балансового отношения (1):

$$Y(t) = S(t) + C(t) \Rightarrow C(t) = Y(t) - S(t) = Y(t) - s(t)Y(t) = (1 - s(t))Y(t).$$

Осуществляя переход к относительным величинам делением последнего равенства на численность работающего населения $L(t)$ страны, получим уровень потребления одного рабочего:

$$c(t) = (1 - s(t))y(t) = (1 - s(t))f(k(t)).$$

На основании описанной модели можно сформулировать задачу оптимального управления инвестициями в основной капитал страны с целью максимизации уровня относительного потребления одного рабочего.

§ 2. Задачи оптимального управления

Доля $s(t)$ ВВП $Y(t)$, направленная на инвестиции в основной капитал $K(t)$ страны, является управляющим параметром модели. Заметим, что в силу замкнутости экономической системы управление должно удовлетворять ограничениям, возникающим из уравнения баланса (1), а именно

$$Y(t) = S(t) + C(t) = s(t)Y(t) + C(t) \quad \Rightarrow \quad 0 < C(t) = (1 - s(t))Y(t) \leqslant Y(t) \quad \Rightarrow$$
$$0 < 1 - s(t) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant s(t) < 1.$$

Введем параметр $a \quad (0 < a < 1)$, отделяющий управляющий параметр $s(t)$ от единицы, то есть $0 \leqslant s(t) \leqslant a < 1$. Данный параметр определяет максимально возможный объем инвестиций в основной капитал страны. Следует отметить, что условие компактности множества, на котором определен управляющий параметр s, необходимо для использования принципа максимума Понтрягина [3].

Итак, сформулируем задачу оптимального управления в общем виде.

Задача управления, P.

Максимизировать функцию полезности

$$J(t_0, k_0) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\delta t} \left(\ln\left(1 - s(t)\right) + \ln f(k(t))\right) dt \tag{7}$$

на траекториях $(k(\cdot);\, s(\cdot))$ *динамической системы*

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - \lambda k(t), \tag{8}$$

удовлетворяющей начальным условиям

$$k(t_0) = k_0, \tag{9}$$

где управляющий параметр $s(\cdot)$ *лежит на отрезке* $[0,\, a]$, *то есть*

$$0 \leqslant s(t) \leqslant a. \tag{10}$$

Будем предполагать, что приведенная производственная функция $y = f(k)$ является:

(F1) положительной: $f(k) > 0 \quad \forall\, k > 0$;

(F2) строго монотонно возрастающей: $f'(k) > 0 \quad \forall\, k > 0$;

(F3) строго вогнутой: $f''(k) < 0 \quad \forall\, k > 0$.

Поставленная задача оптимального управления P удовлетворяет всем условиям существования решения [22].

Полное исследование задачи оптимального управления P приведено в работе [20]. Цель данной статьи изучить влияние параметров производственной функции на поведение оптимальных решений.

Здесь в качестве производственной функции рассматривается функция Кобба–Дугласа (2), которая в относительных величинах принимает вид:

$$y = f_\beta(k) = \alpha k^\beta. \tag{11}$$

Данная функция удовлетворяет всем свойствам (F1)–(F3), когда ее параметры соответствуют ограничениям: $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$. Задача оптимального управления в этом случае принимает вид:

Задача управления, P_β.
Максимизировать функцию полезности (7) *для производственной функции* (11) *на траекториях* $(k(\cdot);\ s(\cdot))$ *динамической системы* (8), *удовлетворяющей начальным условиям* (9), *когда управляющий параметр* $s(\cdot)$ *соответствует ограничениям* (10).

Предположим теперь, что параметр эластичности β производственной функции растет вплоть до своего предельного значения, равного единице. В этом случае производственная функция $y = f_\beta(k)$ вырождается в линейную

$$y = f_1(k) = \lim_{\beta\uparrow 1} \alpha k^\beta = \alpha k \tag{12}$$

и утрачивает свойство строгой вогнутости. Задача оптимального управления с линейной производственной функцией выглядит следующим образом:
Линейная задача управления, P_1.
Максимизировать функцию полезности (7) *для производственной функции* (12) *на траекториях* $(k(\cdot);\ s(\cdot))$ *динамической системы, удовлетворяющей начальным условиям* (9), *когда управляющий параметр* $s(\cdot)$ *соответствует ограничениям* (10).

Далее будет приведено исследование линейной задачи и сравнение с нелинейной задачей.

§ 3. Исследование линейной задачи оптимального управления

Прежде всего следует отметить, что линейная задача оптимального управления удовлетворяет условиям существования решения [22]. Более того, можно сформулировать необходимые условия оптимальности для задач с бесконечным горизонтом в форме принципа максимума Понтрягина [1].

Теорема 1. *Пусть величины* (s_1^0, k_1^0) *определяют оптимальный процесс в задаче* P_1. *Тогда существует сопряженная переменная* $\widetilde{\psi}_1$, *соответствующая процессу* (s_1^0, k_1^0) *и удовлетворяющая сопряженному уравнению*:

$$\dot{\widetilde{\psi_1}} = -\frac{\partial \widetilde{H_1}}{\partial k_1}(t, k_1^0(t), s_1^0(t), \widetilde{\psi_1}(t)),$$

такая что

1. *Процесс* (s_1^0, k_1^0) *вместе с сопряженной переменной* $\widetilde{\psi_1}$ *удовлетворяет условиям принципа максимума Понтрягина*
$$\widetilde{H_1}(t, k_1^0, s_1^0, \widetilde{\psi_1}) = \max_{s\in[0,a]} \left\{ \widetilde{H_1}(t, k_1, s_1, \widetilde{\psi_1}) \right\}.$$
2. *Для процесса* (s_1^0, k_1^0) *и сопряженной переменной* $\widetilde{\psi_1}$ *выполнено условие стационарности*
$$\widetilde{H_1}(t, k_1^0, s_1^0, \widetilde{\psi_1}) = \delta \int_t^{+\infty} e^{-\delta\tau} \left(\ln(1 - s_1(\tau)) + \ln \alpha k_1(\tau)\right) d\tau.$$
3. $\widetilde{\psi_1}(t) > 0, \quad \forall t \geqslant 0.$
4. *Сопряженная переменная* $\widetilde{\psi_1}$ *удовлетворяет условию трансверсальности*
$$\lim_{t\to\infty} \left(\widetilde{\psi_1}(t) k_1^0(t)\right) = 0. \tag{13}$$

Составим гамильтониан задачи P_1:

$$\widetilde{H}_1(t, k, s, \psi) = e^{-\delta t}\left(\ln(1 - s) + \ln(\alpha k)\right) + \widetilde{\psi}(\alpha s - \lambda)k.$$

Следующая замена переменных избавит гамильтониан от явной зависимости от переменной времени t: $\widehat{H}_1 = \widetilde{H}_1 e^{\delta t}, \psi = \widetilde{\psi} e^{\delta t}$. Следовательно, получим гамильтониан

$$\widehat{H}_1(k, s, \psi) = \ln(1 - s) + \ln(\alpha k) + \psi(\alpha s - \lambda)k. \tag{14}$$

Утверждение 1. *Гамильтонова функция* (14) *строго вогнута по управляющей s и фазовой k переменным.*

Доказательство этого утверждения сводится к нахождению вторых производных гамильтоновой функции (14) по переменным k и s.

Утверждение 2. *Оптимальное управление в линейной задаче P_1 есть постоянная величина, которая зависит только от параметров модели и вычисляется по формуле:*

$$s_1^0 = \begin{cases} 0, & \alpha \leqslant \delta; \\ 1 - \dfrac{\delta}{\alpha}, & (1-a)\alpha \leqslant \delta \leqslant \alpha; \\ a, & \delta \leqslant (1-a)\alpha. \end{cases} \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **1.** Прежде всего найдем оптимальное управление s_1^0, которое максимизирует гамильтониан (14) и удовлетворяет ограничениям (10).

$$\frac{\partial \widehat{H}(k,s,\psi)}{\partial s} = -\frac{1}{1-s} + \alpha\psi k = 0.$$

Из последнего равенства выразим s: $s = 1 - \dfrac{1}{\alpha\psi k}$. Значит, применяя ограничения (10), получим:

$$s_1^0 = \begin{cases} 0, & \alpha\psi k \leqslant 1; \\ 1 - \dfrac{1}{\alpha\psi k}, & 1 \leqslant \alpha\psi k \leqslant \dfrac{1}{1-a}; \\ a, & \alpha\psi k \geqslant \dfrac{1}{1-a}. \end{cases} \tag{16}$$

2. Составим максимизированный гамильтониан, подставив в выражение (14) найденное оптимальное управление:

$$H(k,\psi) = \widehat{H}(k, s_1^0, \psi) = \max_{s\in[0,a]} \widehat{H}(k,s,\psi) =$$
$$\begin{cases} \ln(\alpha k) - \psi\lambda k, & \alpha\psi k \leqslant 1; \\ -\ln\psi + \psi(\alpha-\lambda)k - 1, & 1 \leqslant \alpha\psi k \leqslant \dfrac{1}{1-a}; \\ \ln(1-a) + \ln(\alpha k) + \psi(\alpha a - \lambda)k, & \alpha\psi k \geqslant \dfrac{1}{1-a}. \end{cases} \tag{17}$$

3. Докажем, что на оптимальной траектории $k = k_1^0(t)$ выполнено равенство:

$$k_1^0(t)\psi(t) = \frac{1}{\delta}. \tag{18}$$

Для доказательства этого равенства составим гамильтонову систему при каждом из значений оптимального управления $s_1^0(t)$.

$$\dot{k}(t) = \frac{\partial H(k,\psi)}{\partial \psi} = \begin{cases} -\lambda k, & \alpha\psi k \leqslant 1; \\ -\frac{1}{\psi} + (\alpha-\lambda)k, & 1 \leqslant \alpha\psi k \leqslant \dfrac{1}{1-a}; \\ (\alpha a - \lambda)k, & \alpha\psi k \geqslant \dfrac{1}{1-a}. \end{cases}$$

$$\dot{\psi}(t) = \delta\psi - \frac{\partial H(k,\psi)}{\partial k} = \begin{cases} (\delta+\lambda)\psi - \frac{1}{k}, & \alpha\psi k \leqslant 1; \\ (-\alpha+\delta+\lambda)\psi, & 1 \leqslant \alpha\psi k \leqslant \dfrac{1}{1-a}; \\ (-a\alpha\delta+\lambda)\psi - \frac{1}{k}, & \alpha\psi k \geqslant \dfrac{1}{1-a}. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение системы на ψ, а второе — на k, и сложим. Получим, что при всех значениях произведения $\alpha k\psi$, фигурирующего в условиях в правых частях уравнений системы, выражение $\dot{k}\psi + \dot{\psi}k = \dfrac{d(k\psi)}{dt}$ равно: $\dfrac{d(k\psi)}{dt} = \delta k\psi - 1$.

Введем обозначение $z = k\psi$ и рассмотрим уравнение: $\dot{z}(t) = \delta z(t) - 1$. Решением данного уравнения является следующая функция: $z(t) = \kappa e^{\delta t} + \dfrac{1}{\delta}$. Неизвестная постоянная κ находится из условия трансверсальности (13), которое в новых переменных принимает вид:

$$\lim_{t\to+\infty} \widetilde{\psi}(t)k^0(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-\delta t}\psi(t)k^0(t) = \lim_{t\to+\infty} e^{-\delta t}z(t) = 0.$$

Подставляя полученное решение в условие трансверсальности, получим

$$0 = \lim_{t\to+\infty} e^{-\delta t}\left(\kappa e^{\delta t} + \frac{1}{\delta}\right) = \kappa.$$

Следовательно, $\kappa = 0$ и $z(t) = k_1^0(t)\psi(t) = \dfrac{1}{\delta} \quad \forall\, t \geqslant 0$.

4. Для завершения доказательства остается подставить полученное равенство (18) в выражение (16). Таким образом, в линейной задаче P_1 оптимальное управление является постоянной величиной, определяемой параметрами модели. $\square$

Учитывая последнее утверждение, максимизированный гамильтониан $H(k,\psi)$ можно переписать в виде:

$$H(k,\psi) = \ln(1 - s_1^0) + \ln\alpha k + \psi(\alpha s_1^0 - \lambda)k = \ln(1 - s_1^0) + \frac{\alpha s_1^0 - \lambda}{\delta} + \ln\alpha k = A_h + \ln\alpha k, \quad (19)$$

где A_h — постоянная величина, определяемая параметрами модели, аналогично величине s_1^0.

Отметим ряд важных свойств максимизированного гамильтониана.

Утверждение 3. *Максимизированный гамильтониан в линейной задаче оптимального управления P_1 есть гладкая функция по всем своим переменным независимо от значений параметров модели.*

Утверждение 4. *Максимизированный гамильтониан в линейной задаче оптимального управления P_1 является строго вогнутой функцией по фазовой переменной k при любых значениях сопряженной переменной ψ.*

Как было доказано в работе [20], необходимые условия оптимальности являются достаточными, если максимизированный гамильтониан обладает свойствами гладкости по всем своим переменным и строгой вогнутости по фазовой переменной при положительных значениях сопряженной. Утверждения 3 и 4 в линейной задаче P_1 обосновывают достаточность необходимых условий оптимальности.

§ 4. Сравнение линейной и нелинейной задач оптимального управления

Для проведения сравнительного анализа рассматриваемых задач P_β и P_1 оптимального управления приведем основные результаты исследования нелинейной модели, проведенного в работе [20].

Гамильтониан нелинейной задачи P_β имеет следующий вид:

$$\widetilde{H}(t,s,k,\widetilde{\psi}) = e^{-\delta t}(\ln(1-s) + \ln f(k)) + \widetilde{\psi}(sf(k) - \lambda k),$$

где $f_\beta(k) = \alpha k^\beta$. Производя замену $\widehat{H} = \widetilde{H}e^{\delta t}, \quad \psi = \widetilde{\psi}e^{\delta t}$, по аналогии с линейным случаем, получаем гамильтонову функцию вида:

$$\widehat{H}(s,k,\psi) = \ln(1-s) + \ln f(k) + \psi(sf(k) - \lambda k). \quad (20)$$

Гамильтониан (20) является вогнутым по управляющей переменной s, которая определена на отрезке $[0, a]$. Максимальное значение гамильтоновой функции достигается, когда s принимает значение:

$$s_\beta^0 = \begin{cases} 0, & \psi f(k) \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{1}{\psi f(k)}, & 1 \leqslant \psi f(k) \leqslant \dfrac{1}{1-a}, \\ a, & \psi f(k) \geqslant \dfrac{1}{1-a}. \end{cases} \tag{21}$$

Исходя из структуры оптимального управления, область определения максимизированного гамильтониана

$$H(k,\psi) = \max_{s\in[0,a]} \widehat{H}(s,k,\psi) = \begin{cases} H_1(k,\psi), & (k,\psi) \in D_1, \\ H_2(k,\psi), & (k,\psi) \in D_2, \\ H_3(k,\psi), & (k,\psi) \in D_3. \end{cases} \tag{22}$$

распадается на три участка $D_i \quad (i = \overline{1,3})$, в каждом из которых максимизированный гамильтониан (22) принимает вид:

$$\begin{aligned} H_1(k,\psi) &= \ln f(k) - \lambda k\psi, & D_1 &= \{(k,\psi) : \, \psi f(k) \leqslant 1\}, \\ H_2(k,\psi) &= -\ln\psi + \psi(f(k) - \lambda k) - 1, & D_2 &= \left\{(k,\psi) : \, 1 \leqslant \psi f(k) \leqslant \frac{1}{1-a}\right\}, \\ H_3(k,\psi) &= \ln\left((1-a)f(k)\right) + \psi(af(k) - \lambda k), & D_3 &= \left\{(k,\psi) : \, \psi f(k) \geqslant \frac{1}{1-a}\right\}. \end{aligned}$$

Максимизированный гамильтониан (22) $H(k,\psi)$ обладает свойствами:
(PH_1) гладкости по переменным k и ψ;
(PH_2) строгой вогнутости по фазовой переменной k при положительных значениях сопряженной переменной ψ.
Благодаря этим свойствам необходимые условия оптимальности [1] оказываются достаточными [20].

Замечание 1. Анализ поставленных задач оптимального управления показал:
1. В обеих задачах оптимального управления гамильтоновы функции (14) и (20) оказываются вогнутыми по управляющей и фазовой переменным.
2. Максимизированные гамильтонианы (19) и (22) — гладкие функции всех своих переменных, вогнутые по фазовой переменной при положительных значениях сопряженной переменной.
3. Оптимальные управления имеют различную структуру: в линейной задаче P_1 управление s_1^0 (15) есть константа, определяемая параметрами модели, а в нелинейной задаче P_β существует область D_2 переменного управления (21).

§ 5. Качественный анализ задач управления

Прежде всего остановимся на вопросе существования стационарных точек. Выпишем гамильтоновы системы для каждой из задач оптимального управления.

Для удобства сделаем следующую замену сопряженной переменной: $z = k\psi$. Гамильтонова система для линейной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = Ak(t), \\ \dot{z}(t) = \delta z(t) - 1. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь постоянная величина A зависит только от параметров модели и равна следующим значениям:

$$A = \begin{cases} -\lambda, & \alpha \leqslant \delta, \\ \alpha - \delta - \lambda, & (1-a)\alpha \leqslant \delta \leqslant \alpha, \\ a\alpha - \lambda, & \delta \leqslant (1-a)\alpha. \end{cases} \tag{24}$$

Очевидно, что гамильтонова система (23) не имеет стационарных точек при $k > 0$ и $z > 0$.

Гамильтонова система нелинейной задачи оптимального управления P_β в каждой из областей определения максимизированного гамильтониана имеет вид

$$\begin{aligned}
s^0_\beta &= 0, \quad (k,z) \in D_1: && \begin{cases} \dot{k} = -\lambda k, \\ \dot{z} = \delta z - \beta, \end{cases} \\
s^0_\beta &= 1 - \frac{k}{zf(k)}, \quad (k,z) \in D_2: && \begin{cases} \dot{k} = k\left(\alpha k^{\beta-1} - \lambda - \dfrac{1}{z}\right), \\ \dot{z} = z\left(\delta + \alpha(1-\beta)k^{\beta-1}\right) - 1, \end{cases} \\
s^0_\beta &= a, \quad (k,z) \in D_3: && \begin{cases} \dot{k} = a\alpha k^\beta - \lambda k, \\ \dot{z} = z\left(\delta + a\alpha(1-\beta)k^{\beta-1}\right) - \beta. \end{cases}
\end{aligned} \tag{25}$$

В зависимости от значения параметра a модели стационарная точка нелинейной задачи P_β оптимального управления лежит либо в области переменного управления D_2, либо в области насыщенного управления D_3 и вычисляется по формуле

$$k^* = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha\beta}{\delta+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, & a_c \leqslant a; \\ \left(\dfrac{a\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, & a_c > a; \end{cases} \qquad z^* = \frac{\beta}{\delta + (1-\beta)\lambda}, \tag{26}$$

где $a_c = \beta\dfrac{\lambda}{\delta+\lambda} < 1$.

В работе [20] доказано, что стационарная точка носит седловой характер, то есть матрица Якоби, вычисленная в стационарной точке, имеет два различных собственных значения, одно из которых отрицательно, а другое — положительно.

Утверждение 5. *При увеличении параметра эластичности β производственной функции Кобба–Дугласа до единицы, фазовая координата стационарной точки стремится либо к нулю, либо к $+\infty$.*

Доказательство. Фазовую координату положения равновесия будем рассматривать как функцию параметра β: $k^* = k^*(\beta)$. Доказательство данного утверждения сводится к нахождению следующего предела: $\lim\limits_{\beta\uparrow 1} k^*(\beta)$. Представим $k^*(\beta)$ в виде

$$k^*(\beta) = \begin{cases} \nu_1^{\frac{1}{1-\beta}} \beta^{\frac{1}{1-\beta}}, & a_c \leqslant a, \\ \nu_2^{\frac{1}{1-\beta}}, & a_c > a, \end{cases}$$

где $\nu_1 = \dfrac{\alpha}{\delta+\lambda}$, а $\nu_2 = \dfrac{a\alpha}{\lambda}$. Отметим, что $\lim\limits_{\beta\uparrow 1} \beta^{\frac{1}{1-\beta}} = e^{-1}$. Теперь посчитаем предел $\nu_i^{\frac{1}{1-\beta}}$ $(i = 1, 2)$ при $\beta \uparrow 1$:

$$\lim_{\beta\uparrow 1} \nu_i^{\frac{1}{1-\beta}} = \lim_{\beta\uparrow 1} e^{\frac{\ln \nu_i}{1-\beta}} = \begin{cases} 0, & \nu_i < 1, \\ +\infty, & \nu_i > 1. \end{cases}$$

Таким образом, утверждение доказано. □

На рисунке 1 изображена зависимость фазовой координаты k^*_β стационарной точки от параметра β эластичности модели.

Замечание 2. Если $\nu_i = 1\,(i = 1, 2)$, то при таких значениях параметров в линейном случае решение гамильтоновой системы не покидает начального положения, так как $\dot{k}_1$ обращается в ноль.

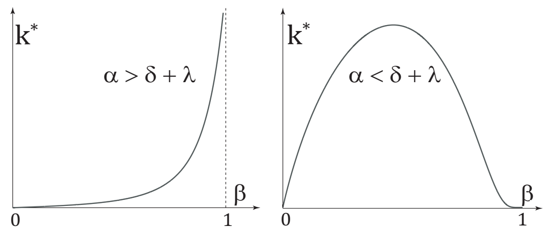

Рис. 1. Фазовая координата k^* стационарной точки как функция $k^*(\beta)$

§ 6. Решение задач оптимального управления

Гамильтонова система для линейной задачи P_1 оптимального управления определяется соотношениями (23). Решением данной системы служат функции:

$$\begin{cases} k_1^0(t) = k_0 e^{A(t-t_0)}, \\ z_1^0(t) = \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{27}$$

где параметр A зависит от параметров модели и находится по формуле (24). Очевидно, что при положительном значении параметра A решение неограниченно растет, а при отрицательных значениях A — экспоненциально убывает до нуля.

Для нелинейной задачи гамильтонова динамика определяется по формуле (25). Аналитически построить решение этой системы оказывается возможным лишь в областях с постоянным управляющим режимом, а именно в области D_1, где управление равно нулю, и в области насыщенного управления D_3, когда $s_\beta^0 = a$. Договоримся обозначать решения гамильтоновых систем в области D_i символами $(k_{\beta i}^0(t), z_{\beta i}^0(t)) \quad (i = \overline{1,3})$.

Здесь и далее будем рассматривать случай, когда параметр a, отделяющий управляемый параметр от единицы, не слишком мал, то есть отстоит от нуля на величину, большую $a_c = \beta\dfrac{\lambda}{\delta+\lambda}$. Как было отмечено ранее, при таком параметре a стационарная точка располагается в области D_2.

На основании алгоритма, предложенного в работе [20], оптимальная траектория $k_\beta^0(t)$ данной задачи строится в обратном времени из окрестности стационарной точки в направлении собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному значению. Если в какой-то момент времени траектория оказывается на границе областей $L_1 = D_1 \bigcap D_2$ или $L_2 = D_3 \bigcap D_2$, происходит переключение управляющего режима и интегрируется гамильтонова система, соответствующая новому управлению. При достижении траекторией начального условия (t_0, k_0) считается, что решение найдено. Как было доказано [20], данный алгоритм аппроксимирует единственную оптимальную траекторию, сходящуюся к установившемуся состоянию.

Найдем решения в областях с постоянным управлением.

Утверждение 6. *Решение гамильтоновой системы* (25) *в области* D_1 *с нулевым управлением имеет вид*

$$k_{\beta 1}^0(t) = k_0 e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad z_{\beta 1}^0(t) = C_1 e^{\delta t} + \frac{\beta}{\delta}, \tag{28}$$

где C_1 *— постоянная величина, определяемая из условия непрерывного перехода решения из области* D_1 *в область* D_2 *на линии склейки* $L_1 = D_1 \bigcap D_2 = \big\{(k,z) : \alpha z k^{\beta-1} = 1\big\}$.

В следующем утверждении выписано аналитическое решение гамильтоновой системы (25) в области насыщенного управления.

Утверждение 7. *Решение гамильтоновой системы (25) в области D_3 с насыщенным управлением ($s^0_\beta = a$) имеет вид*

$$\begin{aligned} k^0_{\beta 3}(t) &= \left(\frac{a\alpha}{\lambda}\left(1 - x_0 e^{-\lambda(1-\beta)(t-t_0)}\right)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ z^0_{\beta 3}(t) &= (1-x(t))\left(\gamma_2 L_\varphi(x(t),\gamma_1) + C_3 x(t)^{-\gamma_1}\right), \end{aligned}$$

где функция $L_\varphi(x(t),\gamma_1)$ определяется следующим образом:

$$L_\varphi(x(t),\gamma_1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x(t)^m}{m+\gamma_1}.$$

Величина $x(t)$ задается соотношением

$$x(t) = 1 - \frac{\lambda}{a\alpha} k^{1-\beta}_{\beta 3}(t) = x_0 e^{-\lambda(1-\beta)(t-t_0)}, \quad x_0 = 1 - \frac{\lambda}{a\alpha} k_0^{1-\beta}.$$

Символами γ_1 и γ_2 обозначены константы: $\gamma_1 = \dfrac{\delta}{(1-\beta)\lambda} + 1, \quad \gamma_2 = \dfrac{\beta}{(1-\beta)\lambda}$.
C_3 — постоянная величина, которая находится из условия непрерывного перехода решения из области D_3 в область D_2 на линии склейки $L_2 = D_3 \bigcap D_2 = \left\{(k,z) : (1-a)\alpha z k^{\beta-1} = 1\right\}$.

Замечание 3. Для удобства дальнейших рассуждений будем записывать оптимальное решение нелинейной задачи управления в виде

$$\left(k^0_\beta(t;t_0,k_0), z^0_\beta(t;t_0,k_0)\right) = \left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{ll} \left(k^0_{\beta 1}(t;t_0,k_0), z^0_{\beta 1}(t;t_0,k_0)\right), & t \leqslant t_{12}(t_0,k_0) \\ \left(k^0_{\beta 2}(t;t_0,k_0), z^0_{\beta 2}(t;t_0,k_0)\right), & t \geqslant t_{12}(t_0,k_0) \end{array}\right., & k_0 \in D_1; \\ \left(k^0_{\beta 2}(t;t_0,k_0), z^0_{\beta 2}(t;t_0,k_0)\right), & k_0 \in D_2; \\ \left\{\begin{array}{ll} \left(k^0_{\beta 3}(t;t_0,k_0), z^0_{\beta 3}(t;t_0,k_0)\right), & t \leqslant t_{32}(t_0,k_0) \\ \left(k^0_{\beta 2}(t;t_0,k_0), z^0_{\beta 2}(t;t_0,k_0)\right), & t \geqslant t_{32}(t_0,k_0) \end{array}\right., & k_0 \in D_3. \end{array}\right. \qquad (29)$$

Здесь символами $t_{i2}(t_0,k_0)$ обозначены моменты времени, когда решение переходит из области D_i в область D_2 (i = 1,3).

Утверждение 8. *Решение $(k^0_\beta(t;t_0,k_0), z^0_\beta(t;t_0,k_0))$ (29) нелинейной задачи P_β непрерывно зависит от параметра β и начальных условий (t_0,k_0).*

Доказательство. Правая часть гамильтоновой системы есть непрерывная функция по переменным $(t,k,z,\beta) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \times (0,+\infty) \times (0,1)$ при всех значениях параметра β, так как максимизированный гамильтониан $H(k,z)$ (22) является гладкой функцией своих переменных. При фиксированном значении параметра β гамильтонова система имеет единственное решение. Тогда, в силу теоремы о непрерывной зависимости [23, гл. V, § 2, с. 118], решение динамической системы на максимальном интервале своего существования непрерывно по параметрам. Таким образом, утверждение доказано. □

Утверждение 9. *Для произвольных t_1 и t_2, удовлетворяющих неравенству $0 < t_1 < t_2 < +\infty$, решение $(k^0_\beta(t;t_0,k_0), z^0_\beta(t;t_0,k_0))$ (29) нелинейной задачи P_β равномерно непрерывно по параметру β.*

Доказательство этого факта приведено, например, в книге [23, гл. V, § 2, с. 118] и основывается на том, что решение, во-первых, непрерывно по параметру, а, во-вторых, по переменной t.

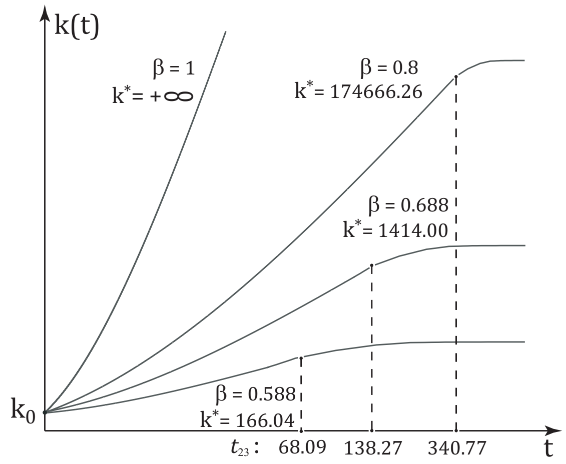

Рис. 2. Оптимальные траектории $k^0_\beta(t)$ при различных значениях параметра β

Замечание 4. В силу утверждения 8 решение нелинейной задачи $\big(k^0_\beta(t;t_0,k_0), z^0_\beta(t;t_0,k_0)\big)$ сходится к решению $\big(k^0_1(t;t_0,k_0), z^0_1(t;t_0,k_0)\big)$ линейной задачи, когда параметр β растет вплоть до своего предельного значения, равного единице.

На рисунке 2 изображено несколько оптимальных траекторий $k = k^0_\beta(t)$ при различных значениях параметра β, в том числе и предельный случай, когда $\beta = 1$. Как видно из рисунка, фазовая координата стационарной точки удаляется в $+\infty$, и оптимальная траектория нелинейной задачи приближается к решению линейной задачи.

§ 7. Функция цены в задачах управления

Построим функцию цены линейной задачи управления по функционалу качества (7), подставив в него найденное оптимальное решение $\big(s^0_1(t), k^0_1(t)\big)$.

Утверждение 10. *Функция цены линейной задачи P_1 оптимального управления имеет вид*

$$V_1[t_0,k_0] = \frac{1}{\delta}e^{-\delta t_0}\left(\ln(\alpha k_0) - \frac{\lambda}{\delta} + B\right), \tag{30}$$

где постоянный параметр B определяется по формуле

$$B = \begin{cases} 0, & \alpha \leqslant \delta, \\ \ln\dfrac{\delta}{\alpha} + \dfrac{\alpha-\delta}{\delta}, & (1-a)\alpha \leqslant \delta \leqslant \alpha, \\ \ln(1-a) + \dfrac{a\alpha}{\delta}, & \delta \leqslant \alpha(1-a). \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения функции цены подставим найденное решение $k^0_1(t)$ (27) гамильтоновой системы (23) в функционал J_1 (7). Подынтегральную функцию в функционале J_1 обозначим $\omega_1(t;t_0,k_0)$, то есть

$$\omega_1(t;t_0,k_0) = e^{-\delta t}\ln(\alpha(1-s^0_1)k^0_1(t)), \tag{31}$$

$$V_1[t_0,k_0] = \int_{t_0}^{+\infty}\omega_1(t;t_0,k_0)\,dt = \frac{1}{\delta}e^{-\delta t_0}\left(\ln(\alpha k_0) + \ln(1-s^0_1) + \frac{A}{\delta}\right).$$

Для окончания доказательства остается подставить в полученное выражение оптимальное управление s^0_1 (16) и значение параметра A (24). $\square$

Функцию цены нелинейной задачи оптимального управления P_β найдем, подставив в функционал качества (7) оптимальное управление $s^0_\beta(t)$ (21) и решение $\big(k^0_\beta(t;t_0,k_0),\, z^0_\beta(t;t_0,k_0)\big)$ (29) гамильтоновой системы (25). В силу того, что в области D_2 переменного управления $s^0_{\beta 2}(t)$ (21) решение системы не имеет аналитического представления, явно функция цены найдена быть не может. Однако, запишем ее следующим неявным образом:

$$V_\beta[t_0,\, k_0] = \int_{t_0}^{+\infty} \omega_\beta(t;t_0,k_0)\, dt, \tag{32}$$

где

$$\omega_\beta(t;t_0,k_0) = e^{-\delta t}\left(\ln\left(1 - s^0_\beta(t;t_0,k_0)\right) + \ln\left(\alpha(k^0_\beta(t;t_0,k_0))^\beta\right)\right). \tag{33}$$

Для обоснования поточечной сходимости функции цены $V_\beta[t_0,k_0]$ нелинейной задачи P_β оптимального управления к функции цены $V_1[t_0,k_0]$ линейной задачи P_1 докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть $g(x,y)$ — непрерывная функция своих переменных (x,y) на всей области ее определения, где $x \in [0,+\infty)$, $\quad y \in Y$. Предположим, выполнены следующие условия:*

1) *при y, стремящимся к предельной точке y_0 множества Y, на каждом конечном промежутке $[x_1,\, x_2]$, где $0 < x_1 < x_2 < +\infty$, функция $g(x,y)$ равномерно сходится к функции $g_0(x)$;*

2) *сходится интеграл от предельной функции, то есть $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(x)\,dx < +\infty$.*

Тогда справедливо равенство:

$$\lim_{y\to y_0}\int_0^{+\infty} g(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{y\to y_0} g(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} g_0(x)\,dx. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы необходимо убедиться, что выполняются условия теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла первого рода, а именно:

(1) для любого значения $x_0 \geqslant 0$ функция $g(x,y)$ равномерно на множестве $[0,x_0]$ сходится к $g_0(x)$, когда y стремится к предельной точке y_0 множества Y;

(2) интеграл

$$\int_0^{+\infty} g(x,y)\,dx \tag{35}$$

сходится равномерно для всех $y \in Y$.

Первое требование выполнено в силу условий леммы.

Для обоснования второго пункта воспользуемся критерием Коши. Для этого необходимо для произвольного положительного ε найти такое значение $x_\varepsilon > 0$, что для всех x_1 и x_2, превосходящих x_ε, будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} g(x,y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Данный факт устанавливается в силу того, что сходится интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(x)\,dx < +\infty$. А именно, по критерию Коши о сходимости несобственных интегралов для сколь угодно малого ε можно найти такое значение $x_\varepsilon > 0$, что для любых x_1 и x_2, связанных неравенствами $x_\varepsilon < x_1 < x_2$, выполнено следующее соотношение:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} g_0(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

Из условия равномерной сходимости функции $g(x,y)$ к $g_0(x)$ при y, стремящемся к y_0, для выбранного ε найдется число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon,x_1,x_2)>0$ такое, что для всех y из диапазона $|y-y_0|<\delta_1$ и для всех $x\in[x_1,x_2]$ будет справедлива оценка $|g(x,y)-g_0(x)|<\varepsilon$.

Кроме того, при каждом y функция $g(x,y)$ интегрируема. Значит, все условия теоремы о предельном переходе под знаком собственного интеграла выполнены, и справедливо равенство

$$\lim_{y\to y_0}\int_{x_1}^{x_2} g(x,y)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\lim_{y\to y_0} g(x,y)\,dt=\int_{x_1}^{x_2} g_0(x)\,dx.$$

Другими словами, для выбранного выше ε найдется $\delta_2=\delta_2(\varepsilon,x_1,x_2)>0$ такое, что для любого y, удовлетворяющего ограничению $|y-y_0|<\delta_2$, справедливо неравенство:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} g(x,y)\,dx-\int_{x_1}^{x_2} g_0(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{37}$$

Итак, в силу (36) и (37), по произвольно выбранному положительному параметру $\varepsilon>0$ удалось найти $x_\varepsilon>0$ такое, что для любых x_1 и x_2 $(x_\varepsilon<x_1<x_2)$ и при любых значениях параметра y, удовлетворяющих ограничению $|y-y_0|<\delta_\varepsilon=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, имеем

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} g(x,y)\,dx\right|\leqslant\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(g(x,y)-g_0(x)\right)\,dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} g_0(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Значит, интеграл (35) сходится равномерно.

Таким образом, выполнены все условия теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла первого рода и формула (34) верна. □

Докажем теперь сходимость функции цены нелинейной задачи управления к функции цены линейной задачи.

Утверждение 11. *Функция цены нелинейной задачи оптимального управления $V_\beta[t_0,k_0]$ поточечно сходится к функции цены $V_1[t_0,k_0]$ линейной задачи, когда параметр эластичности производственной функции Кобба–Дугласа растет вплоть до своего предельного значения, равного единице.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно воспользоваться приведенной выше леммой. Рассмотрим введенные функции $\omega_1(t;t_0,k_0)$ (31) и $\omega_\beta(t;t_0,k_0)$ (33). При фиксированных значениях (t_0,k_0) эти функции зависят только от переменной времени t, определенной на полуинтервале $[0,+\infty)$, и параметра β из интервала $(0,1)$, то есть $w_1(t)=\omega_1(t;t_0,k_0)$ и $w_\beta(t)=\omega_\beta(t;t_0,k_0)$, где точка (t_0,k_0) зафиксирована.

Рассмотрим свойства этих функций. Основываясь на утверждении 8 и [23, гл. V, § 2, с. 118], известно, что решение гамильтоновой системы (25) непрерывно по всем переменным и параметрам, а также для любых t_1,t_2 $(0<t_1<t_2<+\infty)$ равномерно непрерывно для $t\in[t_1,t_2]$ и $\beta\in(0,\,1)$. Значит, функция $w_\beta(t)$ равномерно непрерывна для $t\in[t_1,t_2]$ и $\beta\in(0,\,1)$ и, как следствие, равномерно сходится к $w_1(t)$, когда β растет до единицы.

Второе условие леммы заключается в сходимости интеграла $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} w_1(t)\,dt$. По утверждению 10 значением данного интеграла является функция цены $V_1[t_0,k_0]$ (30) линейной задачи управления, вычисленная в точке (t_0,k_0). Значит, и второе условие леммы выполнено.

Следовательно, вычисляя предел функции цены $V_\beta[t_0,k_0]$ нелинейной задачи управления при β, стремящемся к единице слева, можно осуществить предельный переход под знаком несобственного интеграла. Таким образом, получим, что для фиксированных t_0 и k_0 справедливо равенство

$$\lim_{\beta\uparrow 1}V_\beta[t_0,k_0]=\lim_{\beta\uparrow 1}\int_{t_0}^{+\infty}\omega_\beta(t;t_0,k_0)\,dt=\int_{t_0}^{+\infty}\lim_{\beta\uparrow 1}\omega_\beta(t;t_0,k_0)\,dt=\int_{t_0}^{+\infty}\omega_1(t;t_0,k_0)\,dt=V_1[t_0,k_0].$$

Тем самым, утверждение доказано. □

Для функции цены нелинейной задачи P_β оптимального управления можно аналитически вычислить ее значение в стационарной точке.

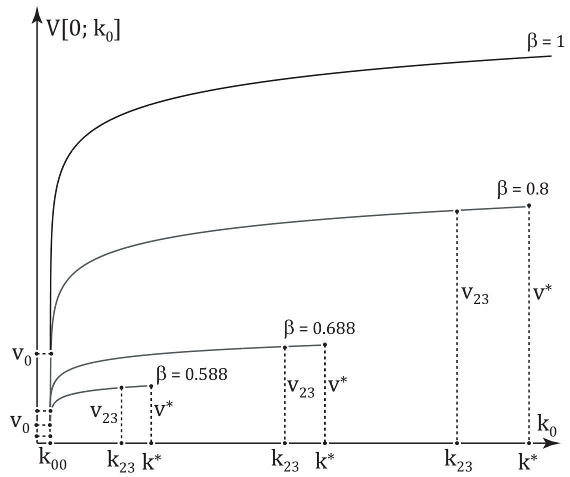

Рис. 3. Графики семейства функций цены $V[0, k_0, \beta]$

β	k_{00}	v_0	k_{23}	v_{23}	k^*	v^*
0.588	9.0	20.27	127.39	32.80	166.04	34.29
0.688	9.0	24.67	1103.07	52.28	1414.00	53.96
0.800	9.0	30.94	161366.00	99.71	174666.26	100.35
1.000	9.0	51.79	∞	∞	∞	∞

Таблица 1. Численные результаты вычислений функций цены $V_\beta[0,\, k_0]$ в значимых точках

Утверждение 12. *Функция цены* $V[t_0, k_0]$ (32) *в стационарной точке принимает значение* V^*, *которое находится по формуле*

$$V^* = \frac{e^{-\delta t_0}}{\delta} \ln\left(\frac{\delta + (1-\beta)\lambda}{\beta}\left(\frac{\alpha\beta}{\delta+\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right).$$

На рисунке 3 изображено семейство функций цены $V_\beta[t_0,\, k_0]$ при различных значениях коэффициента эластичности β для случая, когда начальная точка k_0 располагается в области D_3, а значения параметров модели удовлетворяют ограничениям $a > \beta\dfrac{\lambda}{\delta+\lambda} = a_c$ и $\alpha > \delta + \lambda$. Напомним, что первое неравенство означает то, что стационарная точка находится в области переменного управления D_2, второе условие определяет поведение фазовой координаты стационарной точки при росте параметра β до единицы, а именно то, что k^*_β стремится к $+\infty$. На графике использованы следующие обозначения:
(k_{00}, v_0) — начальная позиция для вычисления функции цены, где $v_0 = V[0, k_{00}]$;
(k_{23}, v_{23}) — точка перехода функции цены из области насыщенного управления D_3 в область переменного управления D_2, где $v_{23} = V[0, k_{23}]$;
(k^*, v^*) — точка, соответствующая стационарному положению, то есть $k^* = k^*_\beta$ — фазовая координата положения равновесия, а $v^* = V[0, k^*]$.

Замечание 5. Функции цены нелинейной модели демонстрируют сходимость к значениям функции цены линейной модели, когда параметр β растет до единицы. Численные результаты сходимости показаны в таблице 1. Значимые значения функций цены отмечены на графике 3 следующим образом: (k_{00}, v_0), (k_{23}, v_{23}) and (k^*, v^*). Как видно по графикам (см. рис. 3) и по значениям, приведенным в таблице 1, при росте параметра β растут и указанные величины.

§ 8. Функция цены как решение уравнения Беллмана. Линейный случай

Этот раздел посвящен поиску функции цены с помощью решения уравнения Беллмана и построению оптимального управления по принципу обратной связи.

Вернемся к задаче оптимального управления P_1 с линейной производственной функцией. Как известно, функция цены, в случае дифференцируемости, является классическим решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана [24]. Составим для нее уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{s(\cdot)}\left\{\left\langle\frac{\partial V}{\partial k}, (\alpha s - \lambda)k\right\rangle + e^{-\delta t}(\ln(\alpha k) + \ln(1-s))\right\} = 0. \qquad (38)$$

Будем искать функцию цены в виде

$$V(t,k) = e^{-\delta t}v(k), \quad k \in (0, +\infty). \qquad (39)$$

Подставив (39) в (38), получим уравнение

$$\delta v(k) = \max_{s(\cdot)}\left\{\left\langle v'(k), (\alpha s - \lambda)k\right\rangle + \ln(\alpha k) + \ln(1-s)\right\}. \qquad (40)$$

Максимум в (40) достигается при $s = s_1^0$, где

$$s_1^0 = \begin{cases} 0, & v'(k) \leqslant \dfrac{1}{\alpha k}; \\ 1 - \dfrac{1}{\alpha k v'(k)}, & \dfrac{1}{\alpha k} \leqslant v'(k) \leqslant \dfrac{1}{(1-a)\alpha k}; \\ a, & v'(k) \geqslant \dfrac{1}{(1-a)\alpha k}. \end{cases}$$

Соответственно, рассмотрим все 3 случая.
1. В области нулевого управления $s_1^0 = 0$, когда $v'(k) \leqslant \dfrac{1}{\alpha k}$, уравнение (40) принимает вид:

$$\delta v(k) = -\lambda k v'(k) + \ln \alpha k. \qquad (41)$$

Решение данного уравнения может быть получено методом неопределенных коэффициентов и записано в следующей форме: $v(k) = c_1 \ln k + c_2$. Подставляя предложенный вид решения в исходное уравнение (41) для нулевого управления, найдем значения параметров c_1 и c_2: $c_1 = \dfrac{1}{\delta}$, $c_2 = \dfrac{\ln\alpha}{\delta} - \dfrac{\lambda}{\delta^2}$. Следовательно, в области нулевого управления решением уравнения (41) является функция

$$v(k) = \frac{\ln(\alpha k)}{\delta} - \frac{\lambda}{\delta^2}. \qquad (42)$$

Тогда условия, при которых $s_1^0 = 0$, имеют вид: $\alpha \leqslant \delta$, а функция цены для этой области определяется подстановкой в формулу (39) найденной функции (42).
2. Для области, где действует управление $s_1^0 = 1 - \dfrac{1}{\alpha k v'(k)}$, когда $\dfrac{1}{\alpha k} \leqslant v'(k) \leqslant \dfrac{1}{(1-a)\alpha k}$, уравнение (40) преобразуется к виду

$$\delta v(k) = (\alpha - \lambda)k v'(k) - \ln v'(k) - 1. \qquad (43)$$

Полученное уравнение может быть решено тем же способом, как и в предыдущем случае методом неопределенных коэффициентов, которые здесь будут равны $c_1 = \dfrac{1}{\delta}$, $c_2 = \dfrac{\ln\delta}{\delta} + \dfrac{\alpha - (\delta+\lambda)}{\delta^2}$. Таким образом, решение (43) имеет вид

$$v(k) = \frac{\ln(\delta k)}{\delta} + \frac{\alpha - (\delta + \lambda)}{\delta^2}.$$

Тогда условия, при которых $s_1^0 = 1 - \dfrac{1}{\alpha k v'(k)} = 1 - \dfrac{\delta}{\alpha}$, преобразуются в $\delta \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\delta}{1-a}$, и функция цены будет равна

$$V(t,k) = \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left(\ln(\delta k) + \frac{\alpha - \delta - \lambda}{\delta} \right).$$

3. В области насыщенного управления $s_1^0 = a$, где действуют ограничения $v'(k) \geqslant \dfrac{1}{(1-a)\alpha k}$, уравнение (40) принимает вид

$$\delta v(k) = (a\alpha - \lambda) k v'(k) - \ln((1-a)\alpha k). \tag{44}$$

Здесь метод неопределенных коэффициентов дает следующие значения параметров c_1 и c_2 : $c_1 = \dfrac{1}{\delta}$, $\quad c_2 = \dfrac{\ln(1-a)}{\delta} + \dfrac{a\alpha - \lambda}{\delta^2}$. Решение уравнения (44) приобретает вид

$$v(k) = \frac{\ln(\alpha k)}{\delta} + \frac{a\alpha - \lambda}{\delta^2} + \frac{\ln(1-a)}{\delta}.$$

Тогда условия, при которых $s_1^0 = a$, сводятся к неравенству $\alpha \geqslant \dfrac{\delta}{1-a}$, а функция цены для этого случая находится из соотношения

$$V(t,k) = \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left(\ln(\alpha(1-a)k) + \frac{a\alpha - \lambda}{\delta} \right).$$

Таким образом, для всех возможных значений параметров модели найдена функция цены задачи P_1. Более того, оказывается справедливым равенство $v'(k)\, k = \dfrac{1}{\delta}$, в силу которого s_1^0 есть постоянная величина, определяемая параметрами модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game–theoretical control problems. New York: Springer–Verlag, 1988. 518 p.
3. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. New York: Interscience, 1962. 360 p.
4. Arrow K.J. Application of control theory to economic growth // Mathematics of the Decision Sciences. 1968. № 2. P. 89–119.
5. Solow R.M. Growth theory: an exposition. New York: Oxford University Press, 1970. 109 p.
6. Shell K. Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Mathematical Systems Theory and Economics. 1969. Vol. 1. P. 241–292.
7. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 324 p.
8. Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М. Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. С. 531–537.
9. Capuzzo Dolcetta I. On a discrete approximation of the Hamilton–Jacobi of dynamic programming // Applied Mathematics and Optimization. 1983. Vol. 4. P. 367–377.
10. Feichtinger G., Veliov V.M. On a distributed control problem arising in dynamic optimization of a fixed-size population // SIAM J. Optim. 2007. Vol. 18 (3). P. 980–1003.
11. Никольский М.С. О локальной липшицевости функции Беллмана в одной оптимизационной задаче // Оптимальное управление и дифференциальные игры. Труды ИММ УрО РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 106–115.
12. Subbotin A.I. Generalized solutions of first–order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
13. Falcone M. A numerical approach to the infinite horizon problem of deterministic control theory // Applied Mathematics and Optimization. 1987. Vol. 15. P. 1–13.
14. Falcone M. Corrigenda: A numerical approach to the infinite horizon problem of deterministic control theory // Applied Mathematics and Optimization. 1991. Vol. 23. P. 213–214.

15. Subbotina N.N. Singular approximations of minimax and viscosity solutions to Hamilton–Jacobi equations // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. Mathematical control theory, differential games. 2000. Vol. 6. № 1. P. 190–208.
16. Ushakov V.N., Latushkin Ya.A. The stability defect of sets in game control problems // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. Control, stability, and inverse problems of dynamics. 2006. Vol. 12. № 2. P. 178–194.
17. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные схемы и конечноразностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
18. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 87–103.
19. Krasovskii A.A. Assessment of the impact of aggregated economic factors on optimal consumption in models of economic growth // IIASA Interim Report IR-06-050. 2006. 46 p.
20. Krasovskii A.A., Tarasyev A.M. Conjugation of Hamiltonian systems in optimal control problems // Preprints of the 17^{th} World Congress of the International Federation of Automatic Control IFAC. 2008. P. 7784–7789.
21. Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л. Экспоненциальная стабилизируемость нелинейных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 25–29.
22. Balder E.J. An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95. P. 195–213.
23. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
24. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.

Поступила в редакцию 03.11.2011

Усова Анастасия Александровна, аспирант, младший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: Anastasy.Ousova@gmail.com

A. A. Usova

Asymptotic properties of optimal solutions and value functions in optimal control problems with infinite time horizon

Keywords: optimal control, Hamiltonian systems, value function, Pontryagin maximum principle.

Mathematical Subject Classifications: 34H05, 49L20

The research is devoted to the investigation of the behavior of optimal solutions and value functions in optimal control problems on infinite horizon, which arise in the economic growth models when an elasticity parameter of the Cobb-Douglas production function grows up to its limit value which is equal to unity. The solution is constructed within the framework of the Pontryagin maximum principle for problems on infinite time horizon. In the limit case the problem becomes linear and has a constant optimal control depending on model parameters only. Qualitative analysis of Hamiltonian systems outlines significant changes in solution behavior, namely, the absence of steady states in the limit case. Nevertheless, both the Hamiltonian function and the maximized Hamiltonian function save their properties of smoothness with respect to all variables, and strict concavity with respect to phase variables. Value functions are constructed for both linear and nonlinear optimal control problems. Numerical experiments are implemented for illustrating results of the sensitivity analysis.

REFERENCES

1. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2007, vol. 257, no. 1, pp. 1–255

2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game–Theoretical Control Problems*, New York: Springer–Verlag, 1988, 518 p.

3. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York: Interscience, 1962, 360 p.

4. Arrow K.J. Application of control theory to economic growth, *Mathematics of the Decision Sciences*, 1968, no. 2, pp. 89–119.

5. Solow R.M. *Growth Theory: An Exposition*, New York: Oxford University Press, 1970, 109 p.

6. Shell K. Applications of Pontryagin's maximum principle to economics, *Mathematical Systems Theory and Economics*, 1969, vol. 1, pp. 241–292.

7. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under Lack of Information*, Boston: Birkhauser, 1995, 324 p.

8. Adiatulina R.A., Taras'ev A.M. Differential game with infinite time horizon, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1987, vol. 51, pp. 531–537.

9. Capuzzo Dolcetta I. On a discrete approximation of the Hamilton–Jacobi of dynamic programming, *Applied Mathematics and Optimization*, 1983, vol. 4, pp. 367–377.

10. Feichtinger G., Veliov V.M. On a distributed control problem arising in dynamic optimization of a fixed–size population, *SIAM J. Optim*, 2007, vol. 18 (3), pp. 980–1003.

11. Nikol'skii M.S. On the local Lipschitz property of the Bellman function in an optimization problem, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk,* 2004, vol. 10, no. 2, pp. 106–115.

12. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first–order PDEs: The dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhauser, 1995, 312 p.

13. Falcone M. A numerical approach to the infinite horizon problem of deterministic control theory, *Applied Mathematics and Optimization*, 1987, vol. 15, pp. 1–13.

14. Falcone M. Corrigenda: A numerical approach to the infinite horizon problem of deterministic control theory, *Applied Mathematics and Optimization*, 1991, vol. 23, pp. 213–214.

15. Subbotina N.N. Singular approximations of minimax and viscosity solutions to Hamilton–Jacobi equations, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2000, vol. 6, no. 1, pp. 190–208.

16. Ushakov V.N., Latushkin Ya.A. The stability defect of sets in game control problems, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 178–194.

17. Taras'ev A.M., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Approximate schemes and finite-difference operators for construction of the generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Izv. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 1994, no. 3, pp. 173–185.

18. Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Lebedev P.D. Defect of stability in game-pursuit problem, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 87–103.

19. Krasovskii A.A. Assessment of the impact of aggregated economic factors on optimal consumption in models of economic growth, *IIASA Interim Report IR-06-050*, 2006, 46 p.

20. Krasovskii A.A., Tarasyev A.M. Conjugation of Hamiltonian systems in optimal control problems, *Preprints of the* 17^{th} *world congress of IFAC*, 2008, pp. 7784–7789.

21. Zaitsev V.A., Popova S.N., Tonkov E.L. Exponential stabilization of nonlinear control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 25–29.

22. Balder E.J. An existence result for optimal economic growth problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1983, vol. 95, pp. 195–213.

23. Hartman Ph. *Ordinary differential equations*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964, 720 p. Translated under the title *Obyknovennye differentsialnye uravneniya*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.

24. Isaacs R. *Differential games*, New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1965, 480 p. Translated under the title *Differentsialnye igry*, Moscow: Mir, 1967, 480 p.

Received 03.11.2011

Usova Anastasiya Aleksandrovna, post-graduate student, Junior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: Anastasy.Ousova@gmail.com