МАТЕМАТИКА 2013. Вып. 1

УДК 517.929

© *Г. Г. Исламов*

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются структурные, аппроксимативные и спектральные свойства нётеровых операторов индекса n и $(-n)$, действующих между банаховыми пространствами B и D, где D изоморфно прямой сумме пространства B и конечномерного пространства E размерности n. Раскрыта роль теоремы С. М. Никольского о фредгольмовом операторе в изучении указанных свойств, а также в вопросе разрешимости уравнений с краевыми неравенствами. В случае сепарабельного гильбертова пространства B для однозначно разрешимых краевых задач предлагается основанная на разложении Э. Шмидта компактного оператора схема дискретизации, которая позволяет применить абстрактный вариант теоремы Рябенького–Филиппова о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости.

Ключевые слова: реконструктивное моделирование, факторизация линейных операторов, возмущения минимального ранга, минимальное семейство циклических векторов, уравнения с краевыми неравенствами.

Введение

Теория линейных уравнений в нормированных пространствах образует прочный фундамент современных исследований математических моделей, построенных на базе известного принципа суперпозиции невозмущённых состояний объектов реального мира. Возмущённые состояния с требуемыми свойствами можно получить за счёт управления внешним воздействием, формируемым по принципу линейной обратной связи. Тенденция усложнения этой связи вызвала необходимость разработки теории функционально-дифференциальных уравнений. Эта теория описывает и изучает свойства таких динамических процессов, ход которых зависит от их предыстории и планируемого будущего состояния этих процессов. Краеугольным камнем такой теории стала замечательная теорема Сергея Михайловича Никольского о представлении ограниченного фредгольмова оператора (нётерового оператора индекса нуль) в виде суммы непрерывно-обратимого оператора и ограниченного конечномерного оператора [1]. Эта теорема позволила нам обосновать следующие направления в линейной теории функционально-дифференциальных уравнений [2–10, 15].

1. Основные этапы реконструктивного моделирования.
2. Абстрактная схема построения функциональных пространств.
3. Факторизация функционально-дифференциальных операторов.
4. Факторизация операторов Грина в задаче о скорости аппроксимации конечномерными операторами.
5. Возмущения минимального ранга функционально-дифференциальных операторов.
6. Теорема Фредгольма для функционально-дифференциальных уравнений с краевыми неравенствами.
7. Минимальные семейства циклических векторов операторов Грина.
8. Теорема Рябенького–Филиппова в теории краевых задач.

Абстрактная теория функционально-дифференциальных уравнений занимает промежуточное положение между классической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и современной теорией уравнений с частными производными.

§ 1. Основные этапы реконструктивного моделирования

Детерминированная линейная система типа вход-выход моделируется функциональной зависимостью $x = Gf$ между *внешним воздействием* f на детерминированную систему и *реакцией системы* x на это воздействие. Здесь G есть некоторое линейное преобразование между банаховыми пространствами, которое нужно восстановить. Естественно желание смоделировать эту систему путём реконструкции уже известной детерминированной системы с инъективным преобразованием Λ. Последнюю систему будем называть *базовой*. Реконструктивное моделирование включает в себя следующие основные этапы:

1. Выбор базовой детерминированной системы. На этом этапе уточняется природа значений f внешнего воздействия на базовую систему и её реакции $x = \Lambda f$ на это воздействие. Кроме того, выбирается банахово пространство B так, чтобы его норма адекватно отражала величину отклонения двух различных значений внешнего воздействия друг от друга. Далее, указывается достаточно широкое линейное многообразие Z над полем вещественных или комплексных чисел, содержащее значения характеристики x как базовой, так и моделируемой системы. Линейное отображение $\Lambda : B \to Z$ необходимо для описания гипотезы о конкретной сущности исходного моделируемого процесса.

2. Конечномерное расширение множества всех значений реакции базовой системы. На этом этапе принимается гипотеза о том, что множество всех значений моделируемой системы GB лежит в линейном многообразии D, более широком, чем ΛB, но которое можно представить в виде прямой суммы $D = \Lambda B \oplus E$, где второе слагаемое конечномерно. Роль конечномерного пространства $E\,(n = \dim E)$ состоит в желании отразить возможное, но ограниченное влияние окружающей среды на базовую систему. В пространстве D вводится норма $\|x\|_D = \|\delta x\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n} |r_j(x)|$, относительно которой оно будет банаховым пространством. Здесь используется линейный оператор $\delta : D \to B$ и линейные функционалы $r_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, которые однозначно определяются из аддитивно-мультипликативного представления тождественного оператора в пространстве $D : x = \Lambda\delta x + \sum\limits_{j=1}^{n} u_j r_j(x)$, $x \in D$, где $u_1, \ldots, u_n$ — фиксированный базис в E. Указанные в этом представлении функционалы $r_j(x)$ и оператор δ будут ограниченными относительно введённой нормы, причём $\delta u_j = 0$, $r_j \Lambda = 0, r_j(u_i) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера; $i, j = 1, \ldots, n$.

3. Проверка структурной эквивалентности моделируемой и базовой систем. Под *структурной эквивалентностью* операторов $G : B \to D$ и $\Lambda : B \to D$ соответственно моделируемой и базовой систем понимается факторизация вида $G = (\Lambda + K)P^{-1}$, где $K : B \to D$ и $P : B \to B$ есть линейные ограниченные операторы, причём K — конечномерный, а P — непрерывно обратимый. В указанной факторизации конечномерный оператор отражает влияние окружающей среды, а непрерывно обратимый оператор выражает требование предварительного линейного гомеоморфного преобразования пространства B при формировании внешнего воздействия на базовую систему.

Структурно эквивалентные операторы принадлежат одним и тем же операторным идеалам и имеют одинаковые по порядку аппроксимативные числа.

Критерий структурной эквивалентности непосредственно вытекает из теоремы С.М. Никольского о фредгольмовом операторе [1].

Оператор $G : B \to D$ и инъективный оператор $\Lambda : B \to D$ структурно эквивалентны тогда и только тогда, когда функционалы $r_j(Gf)$, $f \in B$, $j = 1, \ldots, n$ ограничены, а произведение $\delta G : B \to B$ есть фредгольмов оператор [5].

Разнообразные примеры пространств D, построенных по схеме прямой суммы, приведены в работе [5]. Здесь мы рассмотрим три важных для нас примера, из которых два последних анонсировались ранее.

Пример 1. Обратимся к скалярному случаю оператора Λ, введённому в работе [4]. Одноранговое возмущение этого оператора является самосопряжённым компактным оператором с явным разложением Гильберта–Шмидта по системе собственных функций. Пусть $[a,b]$ — отрезок числовой прямой, C — поле комплексных чисел с обычной нормой $|\cdot|$, L_2 — пространство комплекснозначных функций $y(t)$, у которых скалярные функции вещественной и мнимой части $\operatorname{Re} y(t)$ и $\operatorname{Im} y(t)$ измеримы по Лебегу, а функция $|y(t)|$ квадратично суммируема на отрезке $[a,b]$. Наделим L_2 структурой сепарабельного гильбертова пространства, задав в нем скалярное произведение элементов $u(t)$ и $v(t)$ по правилу $\langle u,v\rangle = (b-a)^{-1}\int_a^b u(t)\overline{v(t)}\,dt$, где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. На классе комплекснозначных функций $y(t)$, у которых $\operatorname{Re} y(t)$ и $\operatorname{Im} y(t)$ абсолютно непрерывны, задан оператор дифференцирования $S = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dt}$ $(i=\sqrt{-1})$. Пусть W_2^n — пространство функций $x:[a,b]\to C$, на которых определен оператор n-го дифференцирования S^n со значениями в пространстве L_2. Из результатов работы [4] для скалярного случая вытекает следующая факторизация тождественного оператора в пространстве W_2^n:

$$x = \Lambda\delta x + \sum_{j=1}^{n} u_j r_j(x).$$

Здесь компактный оператор $\Lambda: L_2 \to W_2^n$ задается при $n \geqslant 2$ равномерно сходящимся на отрезке $[a,b]$ разложением

$$\Lambda f(t) = \frac{\{i(t-a)\}^{n-1}}{(n-1)!}\int_a^b f(s)\,ds + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{2\pi k}\right)^n \varphi_k(t)\,\langle f,\varphi_k\rangle\,,$$

где $\varphi_k(t) = \exp\{2\pi k i(t-a)/(b-a)\}$. Линейный оператор $\delta: W_2^n \to L_2$ определяется равенством

$$\delta x(t) = S^n x(t) + \Big(S^{n-1}x(a) - \int_a^b \psi_1(s) S^n x(s)\,ds\Big)\Big/(b-a).$$

Функционалы r_j, $j=1,\ldots,n$ имеют специальный вид:

$$r_j(x) = S^{j-1}x(a) - \int_a^b \psi_{n-j+1}(s) S^n x(s)\,ds, \quad j=1,\ldots,n-1,$$
$$r_n(x) = \frac{1}{i}(S^{n-1}x(b) - S^{n-1}x(a)),$$

где многочлены $\psi_j(t)$ могут быть вычислены рекурсивно:

$$\psi_1(t) = i\{(t-a)/(b-a) - 1/2\},$$
$$\psi_j(t) = (b-a)^{j-1}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}(2\pi k)^{-j} - i\int_a^t \psi_{j-1}(s)\,ds, \quad j \geqslant 2.$$

Система элементов $u_1,\ldots,u_n$ биортогональна системе функционалов $r_1,\ldots,r_n$ и образует базис конечномерного подпространства E, натянутого на многочлены $(t-a)^j$, $j=0,\ldots,n-2$, $(t-a)^n + ni(t-a)^{n-1}$.

Хотя имеет место теоретико-множественное включение $W_2^n \subset L_2$, будем рассматривать W_2^n как самостоятельное комплексное банахово пространство с нормой $\|x\|_{W_2^n} = \|\delta x\|_{L_2} + \sum_{j=1}^{n}|r_j(x)|$.

Пример 2. Этот пример порождён классической теорией потенциала, строгое обоснование которой получено в работах А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, Н. М. Гюнтера и С. Г. Михлина. Для определённости рассмотрим случай трёхмерного пространства. Аналоги для плоского и многомерного случая могут быть рассмотрены для поверхностей Ляпунова согласно [11,12]. В последней работе приводится конструкция И. И. Привалова обобщённого оператора Лапласа в многомерном случае.

Пусть Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^3$, граница которой $\partial\Omega$ состоит из конечного числа несвязных замкнутых ограниченных поверхностей, принадлежащих классу C^2, причём дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ замыкания $\overline{\Omega}$ связно. На элементах декартова произведения $B = C(\overline{\Omega}) \times C(\partial\Omega) \times C(\partial\Omega)$ тройки банаховых пространств непрерывных на $\overline{\Omega}$ и $\partial\Omega$ скалярных функций определён линейный оператор

$$\Lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ l \end{pmatrix}(t) = \int_\Omega \frac{p(\tau)}{|t-\tau|}\,d\tau + \int_{\partial\Omega} \frac{q(\sigma)}{|t-\sigma|}\,d\sigma - \int_{\partial\Omega} l(\sigma)\frac{\partial}{\partial\nu(\sigma)}\left(\frac{1}{|t-\sigma|}\right)d\sigma, \qquad t \in \mathbb{R}^3$$

со значениями в классе функций определённых на $\mathbb{R}^3$. Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^3$, $d\tau$ и $d\sigma$ есть соответственно объёмная и поверхностная меры Лебега, $\nu(\sigma)$ — вектор единичной нормали к $\partial\Omega$ в точке σ, направленный во внешность области Ω.

Свойство «*$\partial\Omega$ принадлежит классу C^2*» означает, что для каждой точки $\sigma \in \partial\Omega$ существует трёхмерная окрестность V_σ точки σ, такая, что пересечение $\partial\Omega \cap V_\sigma$ можно биективно отобразить на некоторую открытую область $U \subset \mathbb{R}^2$ и подобное отображение дважды непрерывно дифференцируемо [13].

Пусть D есть конечномерное расширение образа ΛB за счёт однородных гармонических полиномов степени $\leqslant m$. Пусть далее семейство $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ обозначает фиксированный базис указанного подпространства гармонических полиномов.

Теорема 1. *Скалярная функция $x(t)$, $t \in R^3$ принадлежит линейному многообразию D в том и только том случае, когда имеет место разложение*

$$x(t) = (\Lambda\delta x)(t) + \sum_{j=1}^{n} u_j r_j(x),$$

где $r_j(x) = \gamma_j(x - \Lambda\delta x)$, $\{\gamma_j\}_1^n$ семейство функционалов, биортогональное системе $\{x_j\}_1^n$, $\delta : D \to B$ есть оператор, определённый равенством: $\delta x = \lim\limits_{h\to+0} \delta_h x$,

$$\delta_h x = -\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{6}{h^2}\left(\frac{1}{4\pi h^2}\int_{S_h(\tau)} x(\xi)\,d\xi - x(\tau)\right) \\ \frac{\partial x}{\partial\nu(\sigma)}(\sigma + h\nu(\sigma)) - \frac{\partial x}{\partial\nu(\sigma)}(\sigma - h\nu(\sigma)) \\ x(\sigma + h\nu(\sigma)) - x(\sigma - h\nu(\sigma)) \end{pmatrix}.$$

Здесь $S_h(\tau)$ — сфера радиуса h с центром в точке $\tau \in \Omega$, $\sigma \in \partial\Omega$, первая компонента δ_h представляет собой h-приближение обобщённого лапласиана [12], вторая компонента взята из теоремы 2.21 монографии [13].

Пример 3. Приводимый ниже пример может представить интерес для дискретных моделей, при построении которых привлекается конечномерное пространство большой размерности. Пусть $B = H_\nu$ и H_μ — конечномерные гильбертовы пространства размерности соответственно ν и μ, причём $\nu \ll \mu$. Пусть далее $\Lambda : B \to H_\mu$ — линейное инъективное отображение и $\Lambda^* : H_\mu \to B$ — сопряженный с ним оператор. Следующее утверждение очевидно.

Самосопряжённый оператор $S = \Lambda^*\Lambda$ положительно определён и обратим, $P = \Lambda S^{-1}\Lambda^* : H_\mu \to H_\mu$ — ортогональный проектор. Кроме того, операторы $\delta = S^{-1}\Lambda^* : H_\mu \to B$ и $\delta^* = \Lambda S^{-1} : B \to H_\mu$ есть обобщённые обратные отображения к операторам соответственно Λ и Λ^*, т. е. $\Lambda\delta\Lambda = \Lambda$ и $\Lambda^*\delta^*\Lambda^* = \Lambda^*$.

Введём каноническое представление произвольного элемента $x \in H_\mu$. Имеем:

$$x = Px + (I - P)x = \Lambda\delta x + \sum_{j=1}^{\mu-\nu} u_j r_j(x).$$

Нетрудно видеть, что система элементов $u_1, \dots, u_{\mu-\nu}$ в этом представлении принадлежит пространству H_ν, образует базис ядра оператора δ и биортогональна системе функционалов $r_1, \dots, r_{\mu-\nu}$. Далее, так как $I-P$ есть ортогональный проектор, то в качестве второго слагаемого канонического разложения можно взять спектральное разложение этого проектора, т. е. считать, что система $u_1, \dots, u_{\mu-\nu}$ ортонормирована и $r_j(x) = (x, u_j)$, $j = 1, \dots, \mu-\nu$. Здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_μ.

Ввиду условия $\nu \ll \mu$ разность $\mu-\nu$ может оказаться достаточно большой. Поэтому целесообразно ввести более узкое пространство $D = \{x \in H_\mu : x = \Lambda\delta x + \sum\limits_{j=1}^{n} u_j r_j(x)\}$, в котором предлагается рассматривать линейные уравнения с дополнительными линейными ограничениями. Нетрудно видеть, что это пространство имеет размерность $n+\nu$ $(n \leqslant \mu-\nu)$ и получается в результате расширения образа ΛB оператора Λ за счёт первых n элементов ядра оператора δ. При этом элементы u_j, $j = 1, \dots, n$ образуют базис ядра сужения оператора δ на линейное многообразие D. Норма в построенном пространстве D задаётся равенством $\|x\|_D = \|\delta x\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n} |r_j(x)|$.

§ 2. Факторизация функционально-дифференциальных операторов

Пусть $L : D \to B$ есть линейный ограниченный оператор. В силу указанной выше факторизации тождественного оператора построенного пространства D имеет место следующее представление: $Lx = Q\delta x + \sum\limits_{j=1}^{n} q_j r_j(x), x \in D$. Здесь $Q = L\Lambda : B \to B$ есть линейный ограниченный оператор, а элементы $q_j = Lu_j$, $j = 1, \dots, n$ принадлежат банахову пространству B. Следующее утверждение является прямым следствием теоремы Никольского о фредгольмовом операторе.

Произведение оператора L и оператора G, структурно эквивалентного инъекции Λ, порождающей пространство D, фредгольмово тогда и только тогда, когда «главная часть» Q оператора L фредгольмова.

Этот важный математический результат выделяет широкий класс линейных операторов, обладающих хорошими свойствами и имеющих важное прикладное значение.

На множестве значений структурно эквивалентного Λ оператора $G : B \to D$ обращается в нуль конечное число линейно независимых функционалов из сопряжённого пространства $D^* : l_1(x), \dots, l_m(x)$. Причём их число m не меньше n. Если LG есть тождественный оператор в пространстве B, то $m = n$ и $G : B \to D$ есть *оператор Грина* краевой задачи $Lx = f$, $l_1(x) = 0, \dots, l_n(x) = 0$.

Представление *дефектных функционалов* $l_i \in D^*$ структурно эквивалентного оператора G в виде $l_i(x) = \varphi_i(\delta x) + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} r_j(x)$, $\varphi \in B^*$, $\alpha_{ij} = l_i(u_j)$ позволяет эффективно построить такую операцию вида $L_0 x = \delta x + \sum\limits_{j=1}^{n} p_j r_j(x)$, $x \in D$, что задача $L_0 x = f$, $l_1(x) = 0, \dots, l_n(x) = 0$ однозначно разрешима в пространстве D и оператор Грина этой задачи $W = \Lambda + K_0$, где конечномерный оператор $K_0 : B \to D$ выписывается явно. Факторизация $G = (\Lambda + K)P^{-1}$ оператора $G : B \to D$ теперь может быть получена через указанные выше операторы L_0, W и не использованные дефектные функционалы $l_{n+1}, \dots, l_m$ этого оператора [6].

Пусть ν есть ранг конечномерного оператора K. Тогда для *аппроксимативных чисел* $s_j(G) = \inf\limits_{\operatorname{rank} H < j} \|G - H\|$ оператора G имеем при $j > \nu$ оценку

$$s_{j+\nu}(\Lambda)/\|P\| \leqslant s_j(G) \leqslant \gamma(P) s_{j-\nu}(\Lambda)/\|P\|,$$

где $\gamma(P) = \|P\| \cdot \|P^{-1}\|$ есть число обусловленности линейного гомеоморфизма P.

В наиболее интересном для практики случае, когда $D \subset B$, а инъекция $\Lambda : B \to B$, порождающая пространство D, компактна, всякий оператор $L : D \to B$ с фредгольмовой главной частью $Q = L\Lambda$ будет неограниченным, но замкнутым оператором в основном пространстве B. Поэтому представляет интерес следующее утверждение о плотности пересечения ядер линейных ограниченных функционалов из D^*.

Пусть $m \geqslant n$. Пересечение $F = \cap_{i=1}^{m} \ker l_i$ ядер функционалов $l_i \in D^*$ плотно в B в том и только том случае, когда найдётся такой конечномерный оператор $K : B \to D$, при котором область значений $(\Lambda + K)B$ оператора $(\Lambda + K) : B \to B$ совпадает с F, а ядро сопряжённого оператора $(\Lambda + K)^* : B^* \to B^*$ состоит из одного нуля [6].

§ 3. Возмущения минимального ранга

Пусть инъекция $\Lambda : B \to B$, порождающая пространство $D = \Lambda B \oplus E \subset B$, компактна. Выберем линейный ограниченный оператор $L : D \to B$ с фредгольмовой главной частью $Q = L\Lambda$. Предположим, что пересечение $F = \cap_{i=1}^{n} \ker l_i$ ядер $n = \dim E$ функционалов $l_i \in D^*$ плотно в B и линейная краевая задача $Lx = f$, $l_1(x) = 0, \ldots, l_n(x) = 0$ однозначно разрешима в D. Тогда сужение $L_{|F}$ оператора L на подпространство F будет плотно определённым замкнутым оператором в пространстве B. Кроме того, это сужение будет иметь компактную резольвенту и, как следствие, дискретный спектр. В прикладных задачах дискретный спектр сужения описывает частоты собственных колебаний систем различного назначения. Поэтому представляет интерес следующая экстремальная задача управления дискретным спектром.

Требуется построить такой конечномерный оператор $H : B \to B$ минимально возможного ранга, при котором резольвентное множество возмущённого оператора $L_{|F} - H$ содержит заданное непустое ограниченное подмножество Ω комплексной плоскости.

Имеет место следующая теорема двойственности [9].

Минимальное значение ранга конечномерного возмущения H в задаче управления спектром равно максимальной геометрической кратности собственных значений оператора $L_{|F}$, которые лежат в множестве Ω.

В работе [1] при доказательстве теоремы 1 об эквивалентности свойств фредгольмового оператора С. М. Никольский использовал специальную конструкцию конечномерного оператора, который исправляет фредгольмов оператор до непрерывно обратимого. Аналогичную конструкцию применял В. А. Треногин при исследовании проблемы ветвления решений операторных уравнений, а ещё ранее подобные возмущения вводил Э. Шмидт. Оказывается, что оптимальное конечномерное возмущение в задаче управления спектром также принадлежит классу возмущений Шмидта–Никольского–Треногина. Поясним это утверждение.

Пусть I обозначает тождественный оператор в любом банаховом пространстве. Обозначим через $n(\mu)$ размерность подпространств $\ker(L_{|F} - \mu I)$ и $\ker(L^*_{|F} - \bar{\mu} I)$. Конечномерный оператор H будем называть возмущением Шмидта–Никольского–Треногина, отвечающим собственному значению μ, если его можно представить в виде $Hx = \sum\limits_{i=1}^{n(\mu)} x_i \langle x, y_i \rangle$, где $\langle x, y_i \rangle = y_i(x)$, $\{y_i\}_1^{n(\mu)}$ — система функционалов из B^*, биортогональная какому-либо базису собственного подпространства $\ker(L_{|F} - \mu I)$, а $\{x_i\}_1^{n(\mu)}$ — система элементов из B, биортогональная какому-либо базису сопряжённого подпространства $\ker(L^*_{|F} - \bar{\mu} I)$. Важность такой конструкции раскрывается в следующем утверждении [9].

Возмущение H минимального ранга в задаче управления спектром является возмущением Шмидта–Никольского–Треногина, отвечающим собственному значению $\mu \in \Omega$ с максимальной геометрической кратностью.

§ 4. Теорема Фредгольма для функционально-дифференциальных уравнений с краевыми неравенствами

Пусть теперь B и D есть вещественные пространства, а линейный ограниченный оператор $L : D \to B$ имеет замкнутую область значений. Приведём два критерия разрешимости в пространстве D уравнения $Lx = f$ с краевыми неравенствами $l_i(x) \geqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $l_i \in D^*$. В терминах канонических представлений оператора $Lx = Q\delta x + \sum_{j=1}^{n} q_j r_j(x)$, $Q = L\Lambda$, $q_j = Lu_j$, и функционалов $l_i(x) = (\delta x, \varphi_i) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} r_j(x)$, $\varphi_i = l_i \Lambda \in B^*$, $(\delta x, \varphi_i) = \varphi_i(\delta x)$, $\alpha_{ij} = l_i(u_j)$ имеет место следующий аналог теоремы Фредгольма [7].

Пусть $f \in B$ и вещественные числа $\beta_1, \ldots, \beta_m$ таковы, что система неравенств $l_i(x) \geqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$, совместна.

Для того чтобы существовало решение $x \in D$ уравнения $Lx = f$ с краевыми неравенствами $l_i(x) \geqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y \in B^*$, удовлетворяющего при каких-либо неотрицательных числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ системе уравнений

$$\begin{cases} Q^* y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i, \\ (q_j, y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

выполнялось неравенство $(f, y) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$.

В приложениях встречается случай, когда B изоморфно и изометрично пространству X^*, сопряженному к некоторому банахову пространству X. Природа элементов второго сопряжённого пространства может оказаться весьма сложной (как в случае $X = L_1^n[a, b]$, $B = L_\infty^n[a, b]$) и это вызывает определённые трудности. Утверждение об *одновременной фредгольмовости оператора и его сопряженного* теоремы 1 работы [1] позволяет выделить такой класс операторов L и функционалов l_i из D^*, для которых утверждение о разрешимости уравнений с краевыми неравенствами можно формулировать в терминах двойственного пространства X.

Пусть билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задаёт двойственность между X и B, фредгольмов оператор $Q : B \to B$ сопряжен к некоторому оператору $\Gamma : X \to X$ и $l_i(x) = \langle \varphi_i, \delta x \rangle + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} r_j(x)$, $\varphi_i \in X$, $i = 1, \ldots, m$.

Задача $Lx = f$, $l_i(x) \geqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, m$, разрешима в D, если и только если для любого $\varphi \in X$, удовлетворяющего при некоторых числах $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$ системе уравнений

$$\begin{cases} \Gamma \varphi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i, \\ \langle \varphi, q_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

выполняется неравенство $\langle f, y \rangle \geqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$.

§ 5. Минимальные семейства циклических векторов операторов Грина

Пусть B — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, инъекция $\Lambda : B \to B$, порождающая пространство $D = \Lambda B \oplus E \subset B$, принадлежит классу Шэттена $\Xi_q^s(B)$ при $q > q_0 \geqslant 1$, имеет вещественный спектр и её резольвента при некотором $\gamma > 0$ допускает оценку

$$\|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \gamma |\mathrm{Im}\lambda|^{-1} (\mathrm{Im}\lambda \neq 0).$$

Пусть далее $L : D \to B$ — линейный ограниченный оператор, главная часть которого представима в виде $Q = L\Lambda = I - F_1 + F_2$. Здесь F_1, F_2 есть линейные ограниченные операторы в B, причём второй оператор вполне непрерывен, а норма первого допускает оценку

$$\|F_1\| < (\gamma \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2q_0}\right) + 2)^{-1}.$$

Предположим, что пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} \ker l_i$ *ядер* $n = \dim E$ *функционалов* $l_i \in D^*$ *плотно в пространстве* B *и линейная краевая задача* $Lx = f$, $l_1(x) = 0, \ldots, l_n(x) = 0$ *однозначно разрешима в* D.

Тогда оператор Грина этой задачи $G : B \to D$ *имеет полную в пространстве* B *систему корневых векторов* [8].

Совокупность линейно независимых элементов $f_1, \ldots, f_m$ из пространства B называется семейством *циклических векторов* оператора Грина G, если линейная оболочка векторов

$$\{G^k f_1, \ldots, G^k f_m\}_{k=0}^{\infty}$$

плотна в пространстве B.

Мощность μ *минимального семейства циклических векторов оператора Грина* G *равна*

$$\mu = \max_{\lambda \neq 0} \dim \ker(G - \lambda I) = \max_{\lambda \neq 0} \min_{S} \|(GS - \lambda S + G/\lambda)\|^2 = \max_{\lambda \neq 0} \|(GT_\lambda - \lambda T_\lambda + G/\lambda)\|^2,$$

где $\min$ *берётся по всем операторам Гильберта–Шмидта* S*, действующим в* B [15].

Норма оператора Гильберта–Шмидта S определяется через операторный след tr равенством $\|S\|^2 = \mathrm{tr}(S^*S)$. Оператор T_λ обозначает любое решение нормализованного операторного уравнения $(U_\lambda^* U_\lambda)T = U_\lambda^* V_\lambda$ в классе операторов Гильберта–Шмидта, где $U_\lambda = \lambda I - G, V_\lambda = G/\lambda$.

Одно из решений нормализованного операторного уравнения может быть найдено методом последовательных приближений $W_0 = 0, W_{k+1} = (I - \tau U_\lambda^* U_\lambda)W_k + \tau U_\lambda^* V_\lambda$, где положительный параметр τ достаточно мал.

§ 6. Теорема Рябенького–Филиппова в теории краевых задач

Вопросы численного решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений до сих пор остаются плохо изученными, так как недостаточно исследована связь между понятиями аппроксимации, устойчивости и сходимости для таких задач. Абстрактная форма теоремы Рябенького–Филиппова о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости для линейного уравнения (см., например, [14]) формулируется в терминах конечномерных аппроксимаций бесконечномерных нормированных пространств и операторов. Мы применяем её при анализе численного решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений методом минимальной конечномерной аппроксимации инъекции Λ, порождающей функциональное пространство D. В результате для линейного функционально–дифференциального уравнения общего вида удаётся получить численный метод, скорость сходимости которого может быть получена на основе теоремы Рябенького–Филиппова.

В случае гильбертова пространства восходящий к Э. Шмидту метод минимальной конечномерной аппроксимации компактной инъекции, порождающей функциональное пространство гладких функций (см. пример 1 параграфа 1), позволяет строить ненасыщаемые алгоритмы решения линейных краевых задач.

Пусть B — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, Λ есть линейный компактный оператор, действующий в этом пространстве.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\operatorname{rank} K \to \min, \quad \|\Lambda - K\| \leqslant \epsilon,$$

которая состоит в минимизации ранга конечномерного оператора $K : B \to B$, аппроксимирующего Λ с точностью ϵ по норме пространства ограниченных операторов.

Минимальное значение функционала в этой задаче равно минимальному значению неотрицательного индекса j, для которого j-е аппроксимативное число $s_j(\Lambda) = \inf\limits_{\operatorname{rank} K<j} \|\Lambda - K\|$ не превосходит погрешности аппроксимации ϵ.

Если $j^* = j(\epsilon)$ есть решение последней задачи, то решение K исходной экстремальной задачи даётся отрезком длины j^* разложения Шмидта $\Lambda = \sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i(\Lambda)\psi_i(\cdot,\varphi_i)$ оператора Λ. Здесь $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — две системы ортонормированных векторов гильбертова пространства B. При фиксированном индексе j величины $s_j(\Lambda), \psi_i, \varphi_i$ образуют тройку (s,ψ,φ), которая может быть найдена из спектральной задачи $s^2\psi = \Lambda\varphi$, $\varphi = \Lambda^*\psi$, где Λ^* — сопряженный оператор.

Заметим, что при замене компактного оператора Λ конечномерным оператором

$$\sum_{i=1}^{j^*(\epsilon)} s_i(\Lambda)\psi_i(\cdot,\varphi_i)$$

мы получим дискретную аппроксимацию функционального пространства D минимальной размерности при указанной погрешности модели ϵ.

Линейный ограниченный оператор L, отображающий банахово пространство D в банахово пространство B, и система n линейно независимых функционалов $l_1,\ldots,l_n$ из сопряженного пространства D^* определяют краевую задачу

$$Lx = f, \quad l_1(x) = \beta_1, \quad \ldots, \quad l_n(x) = \beta_n, \tag{6.1}$$

которую будем предполагать однозначно разрешимой.

6.1. Операторная форма теоремы Рябенького–Филиппова. Запишем краевую задачу (6.1) в виде операторного уравнения $Ax = g$, где оператор $A = (L, l_1,\ldots,l_n)$ взаимно однозначно отображает банахово пространство $U = D$ на декартово произведение $F = B\times C^n$ банаховых пространств. Введем шаг $h = 1/m$, где m — натуральное число и построим линейные конечномерные операторы I_h и J_h соответственно в пространствах B и U по следующему правилу. Если $p\in B$ дается разложением в ряд Фурье $p = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(p,\varphi_k)$, то $p_h = I_h p = \sum\limits_{k=1}^{m}\varphi_k(p,\varphi_k)$, причем $F_h = I_h B\times C^n$ будет конечномерной аппроксимацией пространства F. Норма $\|q_h\|_{F_h} = \|p_h\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n}|\beta_j|$ элемента $q_h = (p_h,\beta_1,\ldots,\beta_n)\in F_h$ будет согласована с нормой пространства F, т. е. $\|q_h\|_{F_h}\to\|q\|_F$ при стремлении $h\to 0$. Здесь норма элемента $q = (p,\beta_1,\ldots,\beta_n)\in F$ дается равенством $\|q\|_F = \|p\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n}|\beta_j|$.

Если $x\in U$ имеет разложение $x = \Lambda\delta x + \sum\limits_{j=1}^{n}u_j r_j(x)$, то $x_h = J_h x = \Lambda I_h\delta x + \sum\limits_{j=1}^{n}u_j r_j(x)$, причем ΛI_h есть отрезок длины m разложения Шмидта компактного оператора Λ, а конечномерное пространство $U_h = \Lambda I_h B\oplus E_m$ с нормой $\|x_h\|_{U_h} = \|x_h\|_U = \|I_h\delta x\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n}|r_j(x)|$ будет согласованной аппроксимацией основного пространства $U: \|x_h\|_{U_h}\to\|x\|_U = \|\delta x\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n}|r_j(x)|$ при $h\to 0$.

Положим $L_h = I_h L$, $A_h = (L_h, l_1,\ldots,l_n)$, $g_h = (I_h f,\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Теперь мы в состоянии воспользоваться изложенной в монографии [14] операторной формулировкой теоремы Рябенького и Филиппова о связи таких фундаментальных понятий численного анализа, как *аппроксимация с порядком* ω линейного оператора исходной задачи:

$$\|I_hLu - L_hJ_hu\|_{L_2} + \sum_{j=1}^{n} |l_j(u - J_hu)| \leqslant C(u)h^{\omega}; \tag{6.2}$$

хорошая обусловленность с порядком ρ ($\rho < \omega$) оператора конечномерной задачи:

$$\|v_h\|_{U_h} \leqslant Mh^{-\rho}\|A_hv_h\|_{F_h}; \tag{6.3}$$

и *сходимость со скоростью* $\omega - \rho$ решения v_h конечномерной задачи $A_hv_h = g_h$ к решению u исходной задачи $Au = g$:

$$\|J_hu - v_h\|_{U_h} \leqslant C_1(u)h^{\omega-\rho}. \tag{6.4}$$

6.2. Конечномерная задача. Соответствующая краевой задаче (6.1) конечномерная задача запишется в виде

$$I_hLv_h = I_hf, \quad l_1(v_h) = \beta_1, \quad \ldots, \quad l_n(v_h) = \beta_n, \tag{6.5}$$

где v_h — элемент из U_h, который однозначно представляется в виде $v_h = \Lambda z_h + \sum\limits_{j=1}^{n} u_j\gamma_j$, где $z_h \in I_hB$. После подстановки v_h в (6.5) получим систему линейных уравнений относительно конечномерного набора $(z_h, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in F_h$:

$$Q_hz_h + \sum_{j=1}^{n} q_j^h\gamma_j = f_h, \quad \Phi_i^hz_h + \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}\gamma_j = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.6}$$

Здесь $Q_h = I_hQI_h$, $Q = L\Lambda$, $q_j^h = I_hLu_j$, $f_h = I_hf$, $\Phi_i^h = l_i\Lambda I_h$, $\phi_{ij} = l_i(u_j)$. Так как z_h принадлежит пространству размерности m, то размерность последней системы линейных уравнений равна $m + n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Известия АН СССР. Серия матем. 1943. Т. 7. № 3. С. 147–166.
2. Islamov G.G. Fundamental branches in investigation of linear functional differential equations // IEEE 17th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IE&EM), 29–31 Oct. 2010. P. 1945–1949. DOI: 10.1109/ICIEEM.2010.5646419.
3. Исламов Г.Г. Роль теоремы С.М. Никольского о фредгольмовом операторе в становлении и развитии теории функционально-дифференциальных уравнений // Современные проблемы анализа и преподавания математики: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 105-летию акад. С.М. Никольского, 17–19 мая 2010 г. МГУ. М., 2010. С. 50–51.
4. Исламов Г.Г. Оценки минимального ранга конечномерных возмущений операторов Грина // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1496–1503.
5. Исламов Г.Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально–дифференциального уравнения. I // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 1872–1881.
6. Исламов Г.Г. О некоторых приложениях теории абстрактного функционально–дифференциального уравнения. II // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 224–232.
7. Исламов Г.Г. Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1994. Вып. 2. С. 3–24.
8. Исламов Г.Г. Полнота корневых векторов нётеровых операторов // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. Вып. 3 (37). С. 53–54.
9. Исламов Г.Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Известия вузов. Математика. 1989. № 1. С. 35–41.
10. Исламов Г.Г. Об оценке сверху спектрального радиуса // Доклады АН СССР. 1992. Т. 322. № 5. С. 836–838.
11. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб.: Лань, 2002. 576 с.

12. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968. 208 с.
13. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
14. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2002. 848 с.
15. Исламов Г.Г. Экстремальные возмущения линейных операторов: дис. …д-ра физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1993. 255 с.

Поступила в редакцию 01.02.2013

Исламов Галимзян Газизович, д. ф.-м. н., профессор, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: ggislamov@gmail.com

G. G. Islamov
Some problems of the theory of linear equations

Keywords: reconstructive modelling, factorization of linear operators, minimal rank perturbations, minimal set of cyclic vectors, equations with boundary inequalities.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 65L03

There are considered the structural, approximated and spectral properties of Fredholm operators of index n and $(-n)$, acting between Banach spaces B and D, where D is isomorphic to the direct sum of B and finite–dimensional space E of dimension n. There is demonstrated the role of S. M. Nikol'skii theorem on Fredholm operator in the study of these properties as well as in the issue of solvability equations with boundary inequalities. For boundary value problems which are uniquely solvable, in the case of a separable Hilbert space B, based on Schmidt decomposition for a compact operator a scheme of discretization is proposed, and it allows application of an abstract version of Ryaben'kii–Filippov theorem on the relationship of approximation, stability and convergence.

REFERENCES

1. Nikol'skii S.M. Linear equations in normed linear spaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1943, vol. 7, no. 3, pp. 147–166.

2. Islamov G.G. Fundamental branches in investigation of linear functional differential equations, *IEEE 17th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IE&EM)*, 29–31 Oct. 2010, pp. 1945–1949. DOI: 10.1109/ICIEEM.2010.5646419.

3. Islamov G.G. The role of S.M. Nikol'skii theorem in formation and development of the theory of functional-differential equations, *Modern problems of the analysis and mathematics teaching: Abstracts of Int. Conf. Dedicated to the 105th Anniversary of Academician S.M. Nikol'skii*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2010, pp. 50–51.

4. Islamov G.G. Estimates of the minimal rank of finite-dimensional perturbations of Green operators, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 9, pp. 1496–1503 .

5. Islamov G.G. Some applications of the theory of abstract functional-differential equations. I, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 11, pp. 1309–1317.

6. Islamov G.G. Some applications of the theory of abstract functional-differential equations. II, *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 2, pp. 167–173.

7. Islamov G.G. Criterion for solvability of equations with boundary inequalities, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 1994, no. 2, pp. 3–24.

8. Islamov G.G. Completeness of root vectors of Noether operators, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2006, no. 3 (37), pp. 53–54.

9. Islamov G.G. Extremal perturbations of closed operators, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1989, no. 1, pp. 35–41 .

10. Islamov G.G. On an upper estimate of the spectral radius, *Soviet mathematics. Doklady*, 1992, vol. 45, no. 1, pp. 177–179.

11. Mikhlin S.G. *Kurs matematicheskoi fiziki* (Course of mathematical physics), Saint Petersburg: Lan', 2002, 576 p.

12. Timan A. F., Trofimov V.N. *Vvedenie v teoriyu garmonicheskikh funktsii* (Introduction to the theory of harmonic functions), Moscow: Nauka, 1968, 208 p.

13. Colton D., Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*, New York: John Wiley & Sons, 1983. Translated under the title *Metody integral'nykh uravnenii v teorii rasseyaniya*, Moscow: Mir, 1987, 311 p.

14. Babenko K.I. *Osnovy chislennogo analiza* (Fundamentals of numerical analysis), Moscow–Izhevsk: Regular & Chaotic Dynamics, 2002, 848 p.

15. Islamov G.G. Extremal perturbations of linear operators, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Yekaterinburg, 1993, 255 p.

Received 01.02.2013

Islamov Galimzyan Gazizovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: ggislamov@gmail.com