УДК 517.935 + 517.938

© *Л. И. Родина, А. Х. Хаммади*

ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ИНВАРИАНТНОСТЬЮ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ [1]

Изучаются статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, которая параметризована с помощью топологической динамической системы. Получены оценки снизу характеристик, связанных с инвариантностью заданного множества на конечном промежутке времени. Рассматривается также следующая задача, возникающая во многих приложениях. Пусть заданы числа $\lambda_0 \in (0,1]$ и $\vartheta > 0$. Необходимо найти условия, которым должны удовлетворять управляемая система и множество X, чтобы для заданного $\sigma \in \Sigma$ относительная частота поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы заданным множеством M на любом отрезке времени длины ϑ была бы не менее λ_0. Отметим, что характеристика ϑ предполагается заданной в зависимости от прикладной задачи. В частности, если управляемый процесс имеет периодический характер, то ϑ является периодом данного процесса. Результаты работы иллюстрируются на примерах управляемых систем, которые описывают различные модели роста популяции.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, статистически инвариантные множества.

Введение

Одной из важных задач теории управляемых процессов является задача исследования инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ж. П. Обена, А. И. Субботина, Е. Л. Тонкова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой и многих других авторов. Данная статья является продолжением работ [1–5], в которых введено расширение понятия инвариантности множеств и изучаются такие характеристики множества достижимости управляемой системы, как относительная частота поглощения, верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости системы заданным множеством. Но это не единственные характеристики, которые возникают в прикладных задачах, связанных с исследованием условий инвариантности. Во многих задачах, возникающих в последние годы в экономике, экологии и технике (см., например, [6, 7]), важно изучить некоторые естественные характеристики, связанные с инвариантностью или слабой инвариантностью заданного множества на конечном промежутке времени. Данная работа посвящена исследованию этих характеристик.

§ 1. Характеристики инвариантности множества достижимости управляемой системы на конечном промежутке времени

Основным объектом исследования в данной работе является управляемая система

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

правая часть которой параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t). Это означает, что на полном метрическом пространстве Σ с метрикой ρ_{Σ} задана однопараметрическая группа преобразований h^t пространства Σ в себя, удовлетворяющая начальному

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12–01–00195–а).

условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t,σ) на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$ (см., например, [8, гл. 5]). Пространство Σ называется фазовым пространством динамической системы (Σ, h^t), функция $t \to h^t\sigma$ — движением точки σ, функция $h^t : \Sigma \to \Sigma$ — потоком на фазовом пространстве Σ.

Рассмотрим соответствующее системе (1.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma,x) = \operatorname{co}H(\sigma,x), \tag{1.2}$$

где $H(\sigma,x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $f\big(\sigma,x,U(\sigma,x)\big)$ при $(\sigma_i,x_i) \to (\sigma,x)$, $\operatorname{co}H(\sigma,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma,x)$. Предполагаем, что правая часть включения (1.2) принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, состоящем из выпуклых замкнутых подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова (см. [9]); функция $f(\sigma,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $U(\sigma,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество $M = \{(\sigma,x) \in \Sigma\times\mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ является подмножеством пространства Ω. Обозначим через $A(t,\omega)$, где $\omega = (\sigma, X)$, множество достижимости системы (1.1) в момент времени t из начального множества X. Предполагаем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $A(t,\sigma,X)$ существует для всех $t \geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

Для исследования статистической инвариантности множества M в работах [1–5] рассматриваются такие характеристики, как относительная частота $\operatorname{freq}(\omega)$, верхняя и нижняя относительные частоты $\operatorname{freq}^*(\omega)$, $\operatorname{freq}_*(\omega)$ поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ управляемой системы (1.1) множеством M. Напомним основные определения. Для заданных значений $\tau \geqslant 0$, $\vartheta > 0$ и $\omega \in \Omega$ введем в рассмотрение множество

$$\alpha(\tau,\vartheta,\omega) \doteq \big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

Определение 1 (см., например, [1, 2]). *Относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1.1) множеством M называется характеристика

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\sigma,X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{1.3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (1.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

называются, соответственно, верхней и нижней относительной частотой поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1.1) множеством M.

Определение 2 (см., например, [1, 2]). Множество M называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1.1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\operatorname{freq}(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : A\big(t,\sigma,M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Теперь определим характеристики, связанные с инвариантностью или слабой инвариантностью заданного множества на конечном промежутке времени.

Определение 3. *Относительной частотой поглощения множества достижимости системы* (1.1) *заданным множеством M на отрезке* $[\tau,\tau+\vartheta]$ будем называть характеристику

$$\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\omega) \doteq \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta}.$$

Важно рассматривать относительную частоту $\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\omega)$ для любого момента времени $\tau \geqslant 0$, поэтому естественно для заданных $\vartheta > 0$ и $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$ определить характеристику

$$\operatorname{freq}(\vartheta,\omega) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\omega) = \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] : A(t,\omega)\subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}.$$

Эта характеристика отличается от рассмотренных в предыдущих работах тем, что она отражает свойство равномерности пребывания множества достижимости $A(t,\omega)$ в множестве M на отрезке заданной длины.

В данной работе исследуются свойства введенных характеристик и рассматривается следующая задача. Пусть заданы числа $\lambda_0 \in (0,1]$ и $\vartheta > 0$. Во многих приложениях важно найти условия, которым должны удовлетворять управляемая система (1.1) и множество X, чтобы для заданного $\sigma \in \Sigma$ выполнялось неравенство $\operatorname{freq}(\vartheta,\omega) \geqslant \lambda_0$. Это означает, что относительная частота поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы (1.1) множеством M на любом отрезке времени длины ϑ должна быть не менее λ_0. Отметим, что характеристика ϑ предполагается заданной в зависимости от прикладной задачи. В частности, если управляемый процесс имеет периодический характер, то ϑ является периодом данного процесса.

Лемма 1. *Если предел* $\operatorname{freq}(\omega)$ *существует, то для любых* $\vartheta > 0$ *и* $\sigma \in \Sigma$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{freq}(\vartheta,\omega) \leqslant \operatorname{freq}(\omega). \tag{1.4}$$

Доказательство. Фиксируем $\vartheta > 0$. Отметим, что неравенство (1.4) следует из равенства

$$\operatorname{freq}(\omega) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \operatorname{mes}\{t\in[i\vartheta,(i+1)\vartheta] :\, A(t,\sigma,X)\subseteq M(h^t\sigma)\}}{k\vartheta}$$

и неравенства

$$\frac{\operatorname{mes}\big\{t\in[i\vartheta,(i+1)\vartheta] :\, A(t,\sigma,X)\subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta} \geqslant \operatorname{freq}(\vartheta,\omega),$$

которое верно для любых $i = 0, 1, \ldots$ и $\vartheta > 0$. □

Рассмотрим скалярную задачу Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = z_0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Предполагаем, что $z_0 \geqslant 0$ и функция $w(h^t\sigma, z)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. Имеют место следующие свойства:

1) все точки $\sigma \in \Sigma$ являются периодическими точками потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$ с периодом T;

2) функция $w(\sigma, z)$ непрерывна по совокупности переменных и выполнено неравенство

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|w(\sigma,z)|}{|z|} < \infty\,.$$

Напомним, что верхним решением $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (1.5) называется такое решение, что для любого другого решения $z(t,\sigma)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t,\sigma) \geqslant z(t,\sigma)$. В работе [11, с. 38] показано, что если функция $w(\sigma,z)$ непрерывна, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (1.5) существует для всех $t \geqslant 0$.

Введем характеристику

$$\varkappa(\tau,\vartheta,\sigma) \doteq \frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta] :\, z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которую назовем *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (1.5) в множестве $(-\infty,0]$ на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$. Будем также рассматривать характеристику

$$\varkappa(\vartheta,\sigma)\doteq\inf_{\tau\geqslant 0}\varkappa(\tau,\vartheta,\sigma)=\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\ z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая отражает свойство равномерности нахождения верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ в множестве $(-\infty,0]$.

Пусть задано положительное число r. Обозначим через $M^r(\sigma)=M(\sigma)+O_r(0)$ замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N_+^r(\sigma)=M^r(\sigma)\setminus M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы $M(\sigma)$, также рассмотрим множество $N_+^r=\{(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n: x\in N_+^r(\sigma)\}$.

Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $M\subseteq\Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(\sigma,x)\leqslant 0$ при всех $(\sigma,x)\in M$;

2) $V(\sigma,x)>0$ для всех $(\sigma,x)\in N_+^r$.

Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q\in\mathbb{R}^n$ называется следующий предел (см. [10, с. 17]):

$$V^o(\sigma,x;q)\doteq\limsup_{(\theta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)}\frac{V(h^\varepsilon\theta,y+\varepsilon q)-V(\theta,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(\sigma,x)\doteq\inf\limits_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q)$, $V^o_{\max}(\sigma,x)\doteq\sup\limits_{q\in F(\sigma,x)}V^o(\sigma,x;q)$ называются *нижней и верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (1.2).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* 1 *и для всех* $\sigma\in\Sigma$ *для каждой точки* $x\in M(\sigma)$ *все решения включения* (1.2)*, удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x)=x$*, продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$*. Предположим, что для каждого* $\sigma\in\Sigma$ *существуют функция* $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$ *такие, что функция* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и при всех* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big). \tag{1.6}$$

Тогда для каждого $\sigma\in\Sigma$ *для любого множества* $X\subseteq M(\sigma)$ *имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\omega)\geqslant\varkappa(\tau,\vartheta,\sigma),\quad \operatorname{freq}(\vartheta,\omega)\geqslant\varkappa(\vartheta,\sigma).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (1.2), определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$. Рассмотрим функцию

$$v(t,\sigma)=V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big).$$

В силу теоремы Радемахера функция $v(t,\sigma)$ дифференцируема при почти всех t, и поскольку $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$, то $v(0,\sigma)\leqslant 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t,\sigma)$ выполнены неравенства (см. лемму 6 работы [1])

$$V^o_{\min}\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)\leqslant\dot v(t,\sigma)\leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big),$$

поэтому, с учетом неравенства (1.6), имеем при всех $t\geqslant 0$ неравенство

$$\dot v(t,\sigma)\leqslant w\big(h^t\sigma,v(t,\sigma)\big). \tag{1.7}$$

Из неравенств (1.7) и $v(0,\sigma)\leqslant 0\leqslant z_0=z(0)$ в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах получаем, что для всех $t\geqslant 0$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (1.5) удовлетворяет неравенству $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$.

Обозначим через $\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\varphi)$ относительную частоту попадания решения $\varphi(t,\sigma,x)$ в множество M на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$, тогда

$$\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\varphi)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\,v(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Отметим, что из неравенства $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство $\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\varphi)\geqslant\varkappa(\tau,\vartheta,\sigma)$, и так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (1.2) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}(\tau,\vartheta,\omega)\geqslant\varkappa(\tau,\vartheta,\sigma),$$

из которого получаем неравенство $\operatorname{freq}(\vartheta,\omega)\geqslant\varkappa(\vartheta,\sigma)$.

Замечание 1. Условия, при которых все решения дифференциального включения (1.2) продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$, получены в работе [5].

Для эффективного применения теоремы 1 необходимо научиться вычислять или оценивать характеристики $\varkappa(\tau,\vartheta,\sigma)$ и $\varkappa(\vartheta,\sigma)$. Этой задаче посвящены следующие разделы.

§ 2. Свойства характеристики $\varkappa(\vartheta,\sigma)$

Обозначим через $z^*(t,\sigma)$ верхнее решение задачи Коши (1.5). В этом параграфе мы исследуем характеристику

$$\varkappa(\vartheta,\sigma)=\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\,z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Равенство $\varkappa(\vartheta,\sigma)=\lambda_0$ означает, что на любом отрезке времени длины ϑ относительная частота попадания траектории решения $z^*(t,\sigma)$ в множество $(-\infty,0]$ будет не менее λ_0.

Замечание 2. Если предел

$$\varkappa(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}$$

существует, то для любых $\vartheta>0$ и $\sigma\in\Sigma$ выполнено неравенство $\varkappa(\vartheta,\sigma)\leqslant\varkappa(\sigma)$. Это доказывается аналогично лемме 1.

Далее предполагаем, что выполнено условие 1 и уравнение $\dot z=w(h^t\sigma,z)$ имеет единственное T-периодическое решение, которое обозначим $\widetilde z(t,\sigma)$. Понятно, что если $z^*(t,\sigma)$ совпадает с периодическим решением $\widetilde z(t,\sigma)$, то

$$\varkappa(T,\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T}\doteq\widetilde\varkappa(\sigma).$$

Для формулировки следующего утверждения введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(t,\sigma)\doteq z^*(t,\sigma)-\widetilde z(t,\sigma).$$

Лемма 2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,\sigma)=0$, *то имеют место следующие свойства:*

1) *для каждого* $\sigma\in\Sigma$ *выполнено неравенство* $\varkappa(T,\sigma)\leqslant\widetilde\varkappa(\sigma)$;

2) *если* $\varphi(t,\sigma)\leqslant 0$ *для всех* $t\geqslant 0$, *то* $\varkappa(T,\sigma)=\widetilde\varkappa(\sigma)$;

3) *если* $\varphi(t,\sigma)>0$ *для всех* $t\geqslant 0$ *и функция* $t\to\varphi(t,\sigma)$ *невозрастающая на* $(0,\infty)$, *то имеет место равенство*

$$\varkappa(T,\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T}.\tag{2.1}$$

Доказательство. 1. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ и $\tau \in [0,\infty)$ определим функцию

$$h(\tau,\sigma) = \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\} - \operatorname{mes}\bigl\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\}.$$

Докажем, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} h(\tau,\sigma) \leqslant 0$. Отметим, что по свойствам меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varepsilon)$, что имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0,T] : 0 < \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant \varepsilon_0\bigr\} \leqslant \varepsilon.$$

Далее, поскольку $\varphi(t,\sigma) \to 0$ при $t \to \infty$, то для ε_0 найдем момент времени t_0 такой, что $|\varphi(t,\sigma)| \leqslant \varepsilon_0$ для всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, для всех $\tau \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\} &= \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) + \varphi(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\} = \\ &= \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant -\varphi(t,\sigma)\bigr\} \leqslant \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant \varepsilon_0\bigr\},\end{aligned}$$

из которого в силу периодичности функции $\widetilde{z}(t,\sigma)$ получаем, что для всех $\tau \geqslant t_0$

$$\begin{aligned}h(\tau,\sigma) &\leqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant \varepsilon_0\} - \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant 0\} = \\ &= \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant \varepsilon_0\} - \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant 0\} = \\ &= \operatorname{mes}\{t \in [0,T] : 0 < \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant \varepsilon_0\} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} h(\tau,\sigma) \leqslant 0$, из которого в силу определения функции $h(\tau,\sigma)$ следует неравенство $\varkappa(T,\sigma) \leqslant \widetilde{\varkappa}(\sigma)$.

2. Пусть $\varphi(t,\sigma) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\widetilde{z}(t,\sigma) \geqslant z^*(t,\sigma),$$

из которого следует, что при всех $\tau \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\} &\geqslant \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau,\tau+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\} = \\ &= \operatorname{mes}\bigl\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\},\end{aligned}$$

поэтому $h(\tau,\sigma) \geqslant 0$ для всех $\tau \geqslant 0$ и $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} h(\tau,\sigma) \geqslant 0$. Учитывая доказанное выше неравенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} h(\tau,\sigma) \leqslant 0$, получаем, что $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} h(\tau,\sigma) = 0$, следовательно, $\varkappa(T,\sigma) = \widetilde{\varkappa}(\sigma)$.

3. Пусть $\varphi(t,\sigma) > 0$ для всех $t \geqslant 0$ и функция $t \to \varphi(t,\sigma)$ невозрастающая на $(0,\infty)$. Докажем, что функция $h(\tau,\sigma)$ неубывающая на $(0,\infty)$. Для этого нужно доказать, что если $\tau_1 < \tau_2$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau_1,\tau_1+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\} \leqslant \operatorname{mes}\bigl\{t \in [\tau_2,\tau_2+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\bigr\}. \tag{2.2}$$

Отметим, что данное неравенство достаточно доказать для произвольного $\tau_1 \in [0,\infty)$ и для $\tau_2 \in (\tau_1,\tau_1+T)$. В этом случае отрезки $[\tau_1,\tau_1+T]$ и $[\tau_2,\tau_2+T]$ имеют непустое пересечение — отрезок $[\tau_2,\tau_1+T]$. Поэтому неравенство (2.2) следует из неравенств

$$\begin{aligned}&\operatorname{mes}\{t \in [\tau_1,\tau_1+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\} = \\ &\quad = \operatorname{mes}\{t \in [\tau_1,\tau_2] : \widetilde{z}(t,\sigma) + \varphi(t,\sigma) \leqslant 0\} + \operatorname{mes}\{t \in [\tau_2,\tau_1+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) + \varphi(t,\sigma) \leqslant 0\} \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{mes}\{t \in [\tau_1+T,\tau_2+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) + \varphi(t,\sigma) \leqslant 0\} + \operatorname{mes}\{t \in [\tau_2,\tau_1+T] : \widetilde{z}(t,\sigma) + \varphi(t,\sigma) \leqslant 0\} = \\ &\quad = \operatorname{mes}\{t \in [\tau_2,\tau_2+T] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\},\end{aligned}$$

которые верны, поскольку функция $\widetilde{z}(t,\sigma)$ периодическая с периодом T, а функция $\varphi(t,\sigma)$ невозрастающая на $(0,\infty)$.

Таким образом, функция $h(\tau,\sigma)$ неубывающая на $(0,\infty)$, поэтому имеет место равенство $\inf\limits_{\tau\geqslant 0} h(\tau,\sigma) = h(0,\sigma)$, которое равносильно равенству (2.1). Лемма доказана.

§ 3. Статистические характеристики, возникающие в физических, химических, биологических и экономических процессах

Во многих прикладных задачах величина $z^*(t,\sigma)$ не может принимать отрицательные значения, например, в физических процессах неотрицательными являются энергии частиц, в химических — концентрации реагирующих веществ, в биологических — размер популяции, в экономических — величины производств и цены на продукцию (соответствующие примеры приведены, в частности, в работах [12, 13]). Поэтому для исследования этих задач введем следующие характеристики, определенные для любого $c>0$ и $\sigma\in\Sigma$:

$$\begin{gathered}\varkappa_c(\vartheta,\sigma)=\inf_{\tau\geqslant 0}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[\tau,\tau+\vartheta]:\, z^*(t,\sigma)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta},\\ \varkappa_c(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:z^*(t,\sigma)\leqslant c\bigr\}}{\vartheta}.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Отметим, что если по содержанию задачи величина $z^*(t,\sigma)$ может быть отрицательной, то можно определить характеристики (3.1) для любого $c\in\mathbb{R}$ и $\sigma\in\Sigma$. Для управляемых процессов, которые имеют периодический характер, будем рассматривать данные характеристики при $\vartheta=T$, где T — период данного процесса.

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 2.

Лемма 3. *Пусть* $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t,\sigma)\doteq\lim\limits_{t\to\infty}\bigl(z^*(t,\sigma)-\widetilde{z}(t,\sigma)\bigr)=0$. *Тогда для каждого* $c\in\mathbb{R}$ *и* $\sigma\in\Sigma$ *выполнены следующие свойства:*

1) *имеет место неравенство*

$$\varkappa_c(T,\sigma)\leqslant\widetilde{\varkappa}_c(\sigma)\doteq\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,T]:\widetilde{z}(t,\sigma)\leqslant c\bigr\}}{T};$$

2) *если* $\varphi(t,\sigma)\leqslant 0$ *для всех* $t\geqslant 0$, *то* $\varkappa_c(T,\sigma)=\widetilde{\varkappa}_c(\sigma)$;

3) *если* $\varphi(t,\sigma)>0$ *для всех* $t\geqslant 0$ *и функция* $t\to\varphi(t,\sigma)$ *невозрастающая на* $(0,\infty)$, *то имеет место равенство*

$$\varkappa_c(T,\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z^*(t,\sigma)\leqslant c\}}{T}.$$

Далее получено следствие леммы 3 для линейной задачи Коши

$$\dot{z}=a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma),\quad z(0,\sigma)=z_0,\quad t\geqslant 0\tag{3.2}$$

в предположении, что функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ непрерывные и все точки $\sigma\in\Sigma$ являются периодическими точками потока $h^t:\Sigma\to\Sigma$ с периодом T. Обозначим через $z(t,\sigma)$ решение задачи Коши (3.2), через $\widetilde{z}(t,\sigma)$ обозначим T-периодическое решение линейного уравнения

$$\dot{z}=a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma).$$

Пусть

$$c_0\doteq\left(\exp\Bigl(-\int_0^T a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr)-1\right)^{-1}\int_0^T b(h^s\sigma)\exp\Bigl(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr)ds.$$

Лемма 4. *Если* $\displaystyle\int_0^T a(h^t\sigma)dt<0$, *то выполнены следующие свойства:*

1) *если* $z_0\leqslant c_0$, *то* $\varkappa_c(T,\sigma)=\widetilde{\varkappa}_c(\sigma)$;

2) *если* $z_0>c_0$, *то*

$$\varkappa_c(T,\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z(t,\sigma)\leqslant c\}}{T}\leqslant\widetilde{\varkappa}_c(\sigma).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем решение задачи Коши (3.2):

$$z(t,\sigma)=\exp\Bigl(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr)\Bigl(z_0+\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Bigl(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr)ds\Bigr). \tag{3.3}$$

Если $z_0=c_0$, то задача Коши имеет периодическое решение, которое обозначим $\widetilde{z}(t,\sigma)$. Следовательно, имеет место равенство

$$\varphi(t,\sigma)=z(t,\sigma)-\widetilde{z}(t,\sigma)=(z_0-c_0)\exp\Bigl(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Bigr). \tag{3.4}$$

Учитывая периодичность функции $t\to a(h^t\sigma)$ и неравенство $\displaystyle\int_0^T a(h^t\sigma)dt<0$, найдем

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t a(h^t\sigma)dt=\lim_{k\to\infty}k\cdot\int_0^T a(h^t\sigma)dt=-\infty,$$

поэтому $\varphi(t,\sigma)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, функция $z(t,\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы 3 и утверждения леммы получаем из леммы 3. □

Из равенства (3.4) получаем также следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\displaystyle\int_0^T a(h^t\sigma)dt>0$. *Тогда имеют место следующие свойства:*
1) *если* $z_0<c_0$, *то* $\varkappa_c(T,\sigma)=\varkappa_c(\sigma)=1$; *если* $z_0>c_0$, *то* $\varkappa_c(T,\sigma)=\varkappa_c(\sigma)=0$;
2) *если* $z_0=c_0$, *то*

$$\varkappa_c(T,\sigma)=\varkappa_c(\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:z(t,\sigma)\leqslant c\}}{T}.$$

Таким образом, если выполнено неравенство $\displaystyle\int_0^T a(h^t\sigma)dt>0$, то характеристики $\varkappa_c(T,\sigma)$ и $\varkappa_c(\sigma)$ совпадают.

§ 4. К вопросу о вычислении характеристики $\varkappa(\sigma)$

Первые примеры вычисления средних значений появились, по-видимому, в работах Лагранжа при создании теории движения больших планет. Важным инструментом вычисления средних является эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина, из которой, в частности, следует свойство асимптотической равнораспределенности траекторий. Это свойство означает, что в случае эргодической динамической системы траектория почти каждой точки попадает во всякое множество положительной меры и проводит в этом множестве время, асимптотически пропорциональное мере этого множества (см., например, [14, с. 136], [15, с. 17–21]).

Напомним, что *метрической динамической системой* (с дискретным временем) называется четверка $(\Omega,\mathfrak{A},\mu,g)$, где Ω — фазовое пространство; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств пространства Ω; g — взаимно однозначное измеримое преобразование фазового пространства Ω в себя (измеримость означает, что $gA\in\mathfrak{A}$ и $g^{-1}A\in\mathfrak{A}$ для любого $A\in\mathfrak{A}$). Далее, μ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно автоморфизма g, то есть

$$\mu(A)=\mu(gA)=\mu(g^{-1}A)$$

для всех $A\in\mathfrak{A}$. Динамическая система $(\Omega,\mathfrak{A},\mu,g)$ называется *эргодической* по отношению к мере μ, если пространство Ω нельзя представить как сумму двух измеримых инвариантных множеств положительной меры без общих точек, иначе если Ω_0 инвариантно, измеримо и $\mu(\Omega_0)>0$, то $\mu(\Omega\setminus\Omega_0)=0$. Таким образом, если система $(\Omega,\mathfrak{A},\mu,g)$ эргодическая, то мера всякого инвариантного измеримого множества Ω_0 из Ω равна нулю или единице (см., например, [8, с. 386], [15, с. 20]).

В этом разделе мы находим значение предела

$$\varkappa(\sigma)=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}$$

для функции $z(t,\sigma)$, которая представима в виде произведения двух периодических функций, но не является периодической. Обозначим

$$\varkappa_i(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z_i(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},\quad i=1,2.$$

Если $z_i(t,\sigma)$ периодическая функция с периодом T_i, то $\varkappa_i(\sigma)=\dfrac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T_i]: z_i(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T_i}$. Введем также следующее обозначение:

$$\varkappa_0(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z(t,\sigma)=0\}}{\vartheta}.$$

Лемма 6. *Пусть функции $t\to z_1(t,\sigma)$ и $t\to z_2(t,\sigma)$ периодические с периодами T_1,T_2 соответственно и числа T_1,T_2 независимы над полем рациональных чисел. Тогда если для функции $z(t,\sigma)=z_1(t,\sigma)z_2(t,\sigma)$ выполнено равенство $\varkappa_0(\sigma)=0$, то*

$$\varkappa(\sigma)=\varkappa_1(\sigma)\big(1-\varkappa_2(\sigma)\big)+\varkappa_2(\sigma)\big(1-\varkappa_1(\sigma)\big). \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть $\sigma\in\Sigma$ фиксировано. Будем предполагать, что $T_1>T_2$ (случай $T_1<T_2$ рассматривается аналогично). Введем в рассмотрение метрическую динамическую систему $(\Omega,\mathfrak{A},\mu,g)$, где $\Omega=[0,1)$. Отметим, что фазовое пространство Ω можно отождествить с окружностью S единичной длины. Далее, пусть $\mathfrak{A}$ — сигма-алгебра всех борелевских подмножеств пространства Ω, $\alpha=\dfrac{T_2}{T_1}<1$, $g\omega=\omega+\alpha \pmod 1$ — поворот окружности на угол $2\pi\alpha$, μ — мера Лебега. Итерации поворота имеют вид $g^k\omega=\omega+\alpha k \pmod 1$. Поскольку числа T_1,T_2 рационально независимы, то построенная динамическая система $(\Omega,\mathfrak{A},\mu,g)$ является эргодической (см. [16, с. 42]). Напомним, что числа $T_1,\ldots,T_k$ называются рационально независимыми, если $\sum\limits_{i=1}^{k}n_iT_i\neq 0$ для любых целых чисел $n_1,\ldots,n_k$, одновременно не равных нулю.

Введем вспомогательные функции $y_1(t,\sigma)=z_1(T_1t,\sigma)$, $y_2(t,\sigma)=z_2(T_1t,\sigma)$ и функцию $y(t,\sigma)=z(T_1t,\sigma)=z_1(T_1t,\sigma)z_2(T_1t,\sigma)$; тогда функция $y_1(t,\sigma)$ — периодическая с периодом единица, а $y_2(t,\sigma)$ — периодическая с периодом α. Отметим, что имеют место равенства

$$\begin{gathered}\varkappa_1(\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T_1]: z_1(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T_1}=\operatorname{mes}\{t\in[0,1]: y_1(t,\sigma)\leqslant 0\},\\ \varkappa_2(\sigma)=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T_2]: z_2(t,\sigma)\leqslant 0\}}{T_2}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\alpha]: y_2(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\alpha},\\ \varkappa(\sigma)=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: y(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Рассмотрим следующие множества:

$$\begin{aligned}A_1&=\{t\in[0,1]: y_1(t,\sigma)\leqslant 0\},\quad & A_2&=\{t\in[0,\alpha]: y_2(t,\sigma)\leqslant 0\},\\ B_1&=\{t\in[0,1]: y_1(t,\sigma)>0\},\quad & B_2&=\{t\in[0,\alpha]: y_2(t,\sigma)>0\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Из определения динамической системы $(\Omega,\mathfrak{A},\mu,g)$ и условия периодичности функций $y_1(t,\sigma)$, $y_2(t,\sigma)$ получаем равенства

$$\begin{aligned}&\operatorname{mes}\big\{t\in[k\alpha,(k+1)\alpha]: y_1(t,\sigma)\leqslant 0, y_2(t,\sigma)>0\big\}=\operatorname{mes}(g^kB_2\cap A_1)=\mu\,(g^kB_2\cap A_1),\\ &\operatorname{mes}\big\{t\in[k\alpha,(k+1)\alpha]: y_1(t,\sigma)>0, y_2(t,\sigma)\leqslant 0\big\}=\operatorname{mes}(g^kA_2\cap B_1)=\mu\,(g^kA_2\cap B_1).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку $\varkappa_0(\sigma)=0$, то

$$\varkappa(\sigma)=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:y_1(t,\sigma)\leqslant 0,y_2(t,\sigma)>0\}}{\vartheta}+ \\ +\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:y_1(t,\sigma)>0,y_2(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}. \quad (4.5)$$

Для любого числа $\vartheta>0$ существует натуральное число n такое, что $n\alpha\leqslant\vartheta<(n+1)\alpha$, поэтому из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\varkappa(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{mes}\big\{t\in[k\alpha,(k+1)\alpha]:y_1(t,\sigma)\leqslant 0,y_2(t,\sigma)>0\big\}+ \\ +\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{mes}\big\{t\in[k\alpha,(k+1)\alpha]:y_1(t,\sigma)>0,y_2(t,\sigma)\leqslant 0\big\}= \\ =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(\mu\left(g^kB_2\cap A_1\right)+\mu\left(g^kA_2\cap B_1\right)\big). \quad (4.6)$$

Известно, что для эргодической динамической системы любые два множества в среднем статистически независимы (см. [15, с. 25]). Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(g^kA\cap B)=\mu(A)\mu(B).$$

Следовательно, из (4.6) получаем

$$\varkappa(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(\mu\left(g^kB_2\cap A_1\right)+\mu\left(g^kA_2\cap B_1\right)\big)=\frac{1}{\alpha}\big(\mu(A_1)\mu(B_2)+\mu(A_2)\mu(B_1)\big).$$

Далее, из (4.2) и (4.3) находим

$$\mu(A_1)=\varkappa_1(\sigma),\quad \mu(A_2)=\alpha\varkappa_2(\sigma),$$
$$\mu(B_1)=1-\mu(A_1)=1-\varkappa_1(\sigma),$$
$$\mu(B_2)=\alpha-\mu(A_2)=\alpha\big(1-\varkappa_2(\sigma)\big).$$

Таким образом, получаем, что

$$\varkappa(\sigma)=\frac{1}{\alpha}\Big(\varkappa_1(\sigma)\alpha\big(1-\varkappa_2(\sigma)\big)+\alpha\varkappa_2(\sigma)\big(1-\varkappa_1(\sigma)\big)\Big)=\varkappa_1(\sigma)\big(1-\varkappa_2(\sigma)\big)+\varkappa_2(\sigma)\big(1-\varkappa_1(\sigma)\big).$$

Замечание 3. Отметим, что если числа T_1,T_2 не являются рационально независимыми, то равенство (4.1) может быть неверно. Это связано с тем, что преобразование поворота окружности на рационально соизмеримый угол не является эргодическим. В качестве простого примера можно рассмотреть функции $z_1(t,\sigma)=z_2(t,\sigma)=\sin(t+\sigma)$.

§ 5. Примеры вычисления статистических характеристик для различных моделей роста популяции

Пример 1. Рассмотрим логистическую модель, которая описывает динамику численности популяции в периодической среде. Данная модель описывается уравнением Ферхюльста

$$\dot z=\big(\varepsilon(t)-\alpha(t)z\big)z,\quad z(0)=z_0,\quad t\geqslant 0,$$

где $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ — непрерывные положительные периодические функции с периодом T, z_0 — начальная численность популяции. Можно показать, что для любого $z_0 > 0$ с течением времени кривая численности популяции $z(t)$ стремится к периодической кривой, которая задается следующей функцией:

$$\widetilde{z}(t) = \frac{\widetilde{z}_0 \exp\Big(\displaystyle\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau\Big)}{\widetilde{z}_0 \displaystyle\int_0^t \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds + 1}, \quad \text{где} \quad \widetilde{z}_0 = \frac{\exp\Big(\displaystyle\int_0^T \varepsilon(\tau)d\tau\Big) - 1}{\displaystyle\int_0^T \alpha(s)\exp\Big(\int_0^s \varepsilon(\tau)d\tau\Big)ds}.$$

Из результатов работы [3] следует, что для любого числа $\lambda_0 \in [0,1]$ найдется значение $c = c(\lambda_0)$ такое, что

$$\varkappa_c \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\}}{T} \doteq \widetilde{\varkappa}_c = \lambda_0.$$

Это означает, что при любой начальной численности популяции $z_0 > 0$ для заданного значения $\lambda_0 \in [0,1]$ существует такое число c, что размер популяции не будет превышать $c = c(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0.

Далее, поскольку при $z_0 \leqslant \widetilde{z}_0$ для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $\varphi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) \leqslant 0$, то в силу леммы 3 имеет место равенство

$$\varkappa_c(T) \doteq \inf_{\tau\geqslant 0} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [\tau,\tau+T] :\ z(t) \leqslant c\big\}}{T} = \widetilde{\varkappa}_c.$$

Если $z_0 > \widetilde{z}_0$, то $\varkappa_c(T) \leqslant \widetilde{\varkappa}_c$.

Пример 2. Рассмотрим модель рыбной популяции, описанную в работе [13]. Пусть $z(t)$ — численность популяции в момент времени t, $\lambda z(t)$ — численность нерестового стада, $\lambda = \text{const}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Известно, что ежегодный прирост популяции за счет естественного воспроизводства зависит от количества отложенной икры и вычисляется по формуле Риккера. Это означает, что величина прироста равна $\alpha\lambda z e^{-\beta z}$, где α, β — положительные постоянные, $\alpha e^{-\beta z}$ — плотностно зависимый коэффициент рождаемости. Будем предполагать, что естественная смертность пропорциональна численности популяции, и обозначим через $d = \text{const} > 0$ коэффициент смертности. Пусть численность нерестового стада λz распределяется с долями v и $1 - v$ соответственно для инкубации икры на рыбозаводе и нереста в естественных условиях ($0 \leqslant v \leqslant 1$). Прирост популяции за счет искусственного воспроизводства описывается линейной зависимостью $\gamma\lambda v z$, где $\gamma = \text{const} > 0$ — коэффициент рождаемости в искусственных условиях. Пусть популяция подвергается промыслу с интенсивностью $u = u(t)$ и параметр v является функцией времени $v = v(t)$. Будем считать, что функции $u(t)$ и $v(t)$ периодические с общим периодом T (естественно полагать, что период равен одному году). Развитие популяции с учетом промысла описывается задачей Коши

$$\dot{z} = \alpha\lambda\big(1 - v(t)\big)ze^{-\beta z} + \lambda(\gamma - 1)v(t)z - dz - u(t), \quad z(0) = z_0, \quad t \geqslant 0, \tag{5.1}$$

где $z_0 > 0$. Обозначим через $z(t)$ решение задачи Коши (5.1), и пусть $t^* > 0$ — момент времени, когда $z(t)$ впервые обращается в нуль; если такого момента не существует, положим $t^* = +\infty$. Отметим, что для размера популяции, который обозначим $\widehat{z}(t)$, выполнено равенство

$$\widehat{z}(t) = z(t) \ \text{ при } \ t \in [0,t^*] \ \text{ и } \ \widehat{z}(t) = 0 \ \text{ при } \ t > t^*.$$

Для оценки статистических характеристик воспользуемся теоремой Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см., например, [17]). Обозначим через $z_i(t)$ решение линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a_i(t)z - u(t), \quad z(0) = z_0, \quad t \geqslant 0,$$

где $i=1,2$, $a_1(t)=\lambda(\gamma-1)v(t)-d$, $a_2(t)=\alpha\lambda\bigl(1-v(t)\bigr)+\lambda(\gamma-1)v(t)-d$. Очевидно, что для всех $t\geqslant 0$ и $z\geqslant 0$ выполнено неравенство

$$a_1(t)\leqslant \alpha\lambda\bigl(1-v(t)\bigr)e^{-\beta z}+\lambda(\gamma-1)v(t)-d\leqslant a_2(t),$$

поэтому в силу теоремы Чаплыгина для всех $t\geqslant 0$ и $z\geqslant 0$ имеют место неравенства $z_1(t)\leqslant z(t)\leqslant z_2(t)$. Обозначим

$$\varkappa_c=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z(t)\leqslant c\}}{\vartheta},$$
$$\varkappa_c^i=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z_i(t)\leqslant c\}}{\vartheta},\quad i=1,2,$$

тогда выполнены неравенства $\varkappa_c^2\leqslant\varkappa_c\leqslant\varkappa_c^1$. Пусть далее $\widetilde{z}_i(t)$, $i=1,2$ — периодическое решение линейного уравнения $\dot z=a_i(t)z-u(t)$,

$$\widetilde{\varkappa}_c^i\doteq\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{z}_i(t)\leqslant c\}}{T},\quad i=1,2.$$

Если выполнено неравенство

$$\int_0^T a_2(t)dt=\lambda(\gamma-\alpha-1)\int_0^T v(t)dt+(\alpha\lambda-d)T<0, \tag{5.2}$$

то в силу результатов работы [3] справедлива оценка $\widetilde{\varkappa}_c^2\leqslant\varkappa_c\leqslant\widetilde{\varkappa}_c^1$. Обозначим

$$c_0^i=-\left(\exp\Bigl(-\int_0^T a_i(\tau)d\tau\Bigr)-1\right)^{-1}\int_0^T u(s)\exp\Bigl(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Bigr)ds,\quad i=1,2.$$

Поскольку $u(t)\geqslant 0$ для всех $t\geqslant 0$, то из неравенства (5.2) следуют неравенства $c_0^1<0$, $c_0^2<0$; поэтому для любого $z_0>0$ найдется момент времени $t^*=t^*(z_0)$ такой, что $z_2(t^*)=0$. Это означает, что для любого $c\geqslant 0$ выполнено неравенство $\varkappa_c\geqslant\varkappa_c^2=1$, из которого следует, что $\varkappa_c=1$ и популяция рано или поздно выродится.

Рассмотрим случай, когда $\int_0^T a_1(t)dt<0$, а $\int_0^T a_2(t)dt>0$. Здесь $c_0^1<0$, $c_0^2>0$ и условия исчезновения популяции зависят от ее начального размера z_0. Так, популяция вырождается, если $z_0<c_0^2$. Если $z_0=c_0^2$, то получаем оценку $\varkappa_c^2\leqslant\widetilde{\varkappa}_c$. При $z_0>c_0^2$ вопрос остается открытым. В случае когда $\int_0^T a_1(t)dt>0$, выполнены неравенства $0<c_0^2<0<c_0^1$. Можно утверждать, что при $z_0<c_0^2$ популяция вырождается, а при $z_0>c_0^2$ размер популяции неограниченно возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
2. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
3. Родина Л.И. Статистические характеристики множества достижимости и периодические процессы управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 34–43.
4. Родина Л.И. Пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.
5. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

6. Давыдов А.А., Пастрес Р., Петренко И.А. Оптимальное распределение выброса загрязнения в одномерный поток // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 30–35.
7. Дмитрук А.В. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // Оптимальность управляемых динамических систем. М.: ВНИИСИ, 1990. № 14. С. 26–42.
8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
9. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.
10. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
12. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2007. 324 с.
13. Модели природных систем / под ред. В.И. Гурман, И.П. Дружинина. Новосибирск: Наука, 1978. 224 с.
14. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 284 с.
15. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.
16. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
17. Перов А.И. Несколько замечаний относительно дифференциальных неравенств // Известия высших учебных заведений. Математика. 1965. № 4. С. 104–112.

Поступила в редакцию 12.11.2012

Родина Людмила Ивановна, д. ф.-м. н., заведующая кафедрой математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: box0589@udmnet.ru

Хаммади Алаа Хуссейн, аспирант, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com

L. I. Rodina, A. H. Hammady

The characteristics of attainability set connected with invariancy of control systems on the finite time interval

Keywords: control systems, dynamical systems, differential inclusions, statistically invariant sets.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

We study the statistical characteristics of the attainability set $A(t, \sigma, X)$ of the control system which is parametrized by means of a topological dynamical system (Σ, h^t). We obtain the lower estimates for characteristics connected with invariance of given set on a finite time interval. We also consider the following problem arising in many applications. Let numbers $\lambda_0 \in (0, 1]$ and $\vartheta > 0$ are given. It is necessary to find the conditions which the control system and set X should satisfy providing that for given $\sigma \in \Sigma$ relative frequency of containing of the attainability set $A(t, \sigma, X)$ in the given set M on any interval of time length ϑ would be not less then λ_0. Let's notice, that the characteristic ϑ is assumed given depending on an applying problems. In particular, if control process is periodic, then ϑ is the period of the process. Results are illustrated by examples of the control systems which describe different models of population growth.

REFERENCES

1. Rodina L.I., Tonkov E.L. Statistical characteristics of attainable set of control system, non-wandering, and minimal attraction center, *Nelin. Dinam.*, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 265–288.

2. Rodina L.I., Tonkov E.L. The statistically weak invariant sets of control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 67–86.

3. Rodina L.I. Statistical characteristics of attainable set and periodic processes of control systems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 34–43.

4. Rodina L.I. The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and statistically invariant sets of control systems, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 2012, vol. 278, pp. 217–226.

5. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of controllable systems, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2012, no. 2 (40), pp. 3–164.

6. Davydov A.A., Pastres R., Petrenko I.A. Optimization of the spatial distribution of pollution emission in 1D flow, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 30–35.

7. Dmitruk A.V. Principle of maximum for the general problem of optimum control with the phase and regular mixed restrictions, *Optimality of operated dynamic systems: Transactions*, Moscow: Institute of Systems Analysis, Russian Academy of Sciences, 1990, no. 14, pp. 26–42.

8. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1949, 550 p.

9. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136.

10. Clarke F. *Optimizatsiya i negladkii analiz* (Optimization and the nonsmooth analysis), Moscow: Nauka, 1988, 300 p.

11. Hartman Ph. *Ordinary differential equations,* New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, 1964. Translated under the title *Obyknovennye differentsialnye uravneniya*, Moscow: Mir, 1970, 720 p.

12. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov otbora* (Mathematical modelling of processes of selection), Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod State University, 2007, 324 p.

13. *Modeli prirodnykh sistem* (Models of natural systems), Ed.: Gurman V.I., Druzhinina I.P., Novosibirsk: Nauka, 1978, 224 p.

14. Arnol'd V.I., Avets A. *Ergodicheskie problemy klassicheskoi mekhaniki* (Ergodic problems of classical mechanics), Izhevsk: Regular & Chaotic Dynamics, 1999, 284 p.

15. Kornfel'd I.P., Sinai Ya.G., Fomin S.V. *Ergodicheskaya teoria* (The ergodic theory), Moscow: Nauka, 1980, 384 p.

16. Katok A.B., Hasselblat B. *Vvedenie v sovremennuyu teoriyu dinamicheskikh sistem* (Introduction to the modern theory of dynamical systems), Moscow: Faktorial, 1999, 768 p.

17. Perov A.I. Some remarks on differential inequalities, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1965, no. 4, pp. 104–112.

Received 12.11.2012

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: box0589@udmnet.ru

Hammady Alaa Hussein, post-graduate student, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: alaairaqmath@yahoo.com