

УДК 519.62

© А. А. Юдаков, В. Г. Бойков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДАХ ПРЯМОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изложены базовые принципы линеаризации уравнений произвольной многокомпонентной механической системы. Описаны общие подходы к формированию специализированных численных методов интегрирования этих систем, которые основаны на классических методах прямого интегрирования уравнений динамики метода конечных элементов. Подробно рассматривается метод, базирующийся на известном неявном методе Ньюмарка. Выведены расчетные формулы метода, проведено краткое исследование на устойчивость. Кроме того, приведены примеры тестовых расчетов, выполненных с помощью специализированного метода Ньюмарка в программном комплексе динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER.

Ключевые слова: многокомпонентная механическая система, метод конечных элементов, жесткая задача, линеаризация системы, неявные численные методы интегрирования уравнений, метод Ньюмарка.

Введение

Задачи численного моделирования поведения произвольных механических систем в настоящее время имеют важнейшее значение во многих областях техники, таких как автомобилестроение, авиация, ракетно-космическая техника, машиностроение, робототехника, станкостроение и т.д. Исторически всевозможные методы решения динамических задач делились на два основных класса: численные методы механики сплошной среды и методы моделирования многокомпонентных механических систем. Характерным представителем первого класса является метод конечных элементов (МКЭ), в основном используемый для расчета всевозможных деформируемых конструкций [1, 2]. Уравнения динамики в рамках этого класса методов изначально строятся на основе статических, геометрических и физических соотношений теории упругости. Методы второго класса классически рассматривают произвольную механическую систему как многокомпонентную систему абсолютно твердых тел, связанных силовыми элементами и шарнирами [3]. Уравнения движения получаются из обобщенных уравнений Ньютона–Эйлера или уравнений Лагранжа.

В последнее время граница между двумя этими классами всё больше размывается вследствие серьёзного взаимного проникновения используемых подходов. В частности, класс многокомпонентных механических систем оказывается возможным расширить на системы связанных твердых и упругих тел [4–6]. Уравнения динамики деформируемых тел в составе системы получаются на основе применения общих принципов формирования уравнений связанных абсолютно твердых тел к моделям упругих тел, построенным на базе методов механики сплошной среды. При этом полный набор уравнений произвольной механической системы включает уравнения динамики — обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, — и уравнения связей. Интегрирование этой системы может производиться любыми стандартными, широко известными численными методами [5].

Моделирование реальных механических систем нередко приводит к жестким задачам [7]. Жесткость иногда возникает и в задачах расчета систем твердых тел, однако гораздо чаще она проявляется при моделировании проектов, содержащих деформируемые тела. С одной стороны, жесткость таких задач обуславливается высокими собственными частотами самих упругих

конструкций. С другой стороны, и сама структура проекта с деформируемыми телами нередко ведет к повышению жесткости. Основное практическое следствие явления жесткости состоит в том, что при использовании явных методов интегрирования допустимый шаг расчета ограничивается крайне малым значением, что делает нецелесообразным использование этих методов при решении подобных задач. Стандартные неявные методы интегрирования (типа Рунге–Кутты и других) не имеют ограничений на значение шага и с успехом применяются для расчета динамического поведения жестких систем [7]. При этом дифференциальные уравнения второго порядка (уравнения динамики) сводятся к системе уравнений первого порядка, которая и интегрируется общими методами.

Однако изначальная система уравнений динамики имеет строго определенный вид, информация о котором, по сути, никак не используется при применении стандартных неявных методов интегрирования. С другой стороны, интегрирование уравнений динамики метода конечных элементов производится специализированными методами, в полной мере учитывающими всю информацию об общем виде этих уравнений. При этом базовая структура уравнений движения произвольной механической системы, конечно же, во многом схожа со структурой уравнений динамики МКЭ. Как минимум, в обоих случаях основа — это обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Возникает естественная идея применения специализированных методов МКЭ для интегрирования общих уравнений многокомпонентных механических систем. В настоящей статье изложены принципы линеаризации уравнений произвольной системы со связями, описаны общие подходы к формированию всевозможных специализированных численных методов интегрирования этих систем и подробно рассмотрен один из таких методов — метод Ньюмарка.

§ 1. Постановка задачи

Общая система уравнений движения произвольной многокомпонентной механической системы (смотрите [5]) представляет собой совокупность уравнений динамики

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{G}^T\lambda, \quad (1)$$

и уравнений связи

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{h}, \quad (2)$$

где \mathbf{x} — обобщенный вектор, характеризующий положения и упругие деформации всех тел системы, \mathbf{M} — обобщенная матрица масс всей системы, \mathbf{f} — сумма всевозможных обобщенных сил, \mathbf{G} — обобщенный якобиан всех связей, λ — силовые факторы в связях, \mathbf{h} — обобщенный вектор невязок ускорений связей.

Помимо обобщенного вектора положений \mathbf{x} часто приходится интегрировать и вектор \mathbf{s} значений датчиков, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка (так называемых датчиков-интегралов)

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{p}, \quad (3)$$

где \mathbf{p} — заданная функциональная зависимость. Очевидно, что в общем случае вектор обобщенных сил \mathbf{f} и вектор-функция \mathbf{p} имеют следующие уровни зависимости:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{s}), \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (4)$$

Совокупность уравнений (1)–(3) с учетом зависимости (4) представляет собой полную, замкнутую систему уравнений для определения динамического состояния произвольного механизма.

Уравнение динамики упругой конструкции, получаемое в классическом методе конечных элементов, имеет следующий общий вид (смотрите [1, 2]):

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{C}}\mathbf{v} = \overline{\mathbf{F}}, \quad (5)$$

где \mathbf{v} — вектор упругих перемещений всех узлов МКЭ-модели тела, $\bar{\mathbf{M}}$ — полная матрица масс, $\bar{\mathbf{C}}$ — матрица жесткости, $\bar{\mathbf{D}}$ — матрица демпфирования, $\bar{\mathbf{F}}$ — суммарный вектор внешних сил. Все матрицы симметричны, матрицы масс и жесткости положительно определены, матрица демпфирования неотрицательно определена. При этом легко видеть, что линеаризация уравнений динамики произвольной механической системы со связями заключается в приведении их к виду, полностью аналогичному виду (5). Однако, как будет показано в дальнейшем, обобщенные матрицы масс, демпфирования и жесткости линеаризованной системы не имеют упомянутых свойств симметричности и определенности, что существенно влияет на процесс интегрирования этой системы и серьезно затрудняет теоретическое исследование его точности и устойчивости.

Все специализированные методы интегрирования системы (5) делятся на две группы: методы разложения по собственным формам и методы прямого интегрирования. Методы разложения по собственным формам основаны на поиске некоторого количества собственных форм колебаний тела путем решения обобщенной проблемы собственных значений для полных матриц масс и жесткости. Далее все упругие перемещения точек тела аппроксимируются набором найденных собственных форм колебаний. Интегрирование уравнений динамики производится не для полного вектора перемещений всех точек тела, а для значительно меньшего вектора обобщенных координат. Тем самым достигается высокая эффективность проведения динамических расчетов. Представляется интересным исследование применения данной группы методов для интегрирования линеаризованной системы уравнений произвольного механизма. В настоящей статье лишь намечаются подходы к подобного рода анализу, упоминаются некоторые простые, но интересные свойства задачи поиска собственных форм колебаний многокомпонентной механической системы.

Основным объектом исследования настоящей статьи является применение группы методов прямого интегрирования уравнения (5) к линеаризованной системе уравнений динамики механизма. Прямое интегрирование уравнений означает, что никаких предварительных преобразований уравнения (5) не производится, тем самым в полной мере используется вся информация о его специальном виде (в частности, что уравнение имеет второй порядок). Все численные методы данной группы основаны на двух идеях: удовлетворение уравнения динамического равновесия (5) требуется на коротких промежутках времени Δt , а не на всем интервале сразу, и в рамках этих промежутков все кинематические параметры аппроксимируются некоторыми формулами, причем способ аппроксимации и определяет конкретный метод. К этой группе относится множество методов, таких как метод центральных разностей (явный), неявные методы Хоболта, Вилсона, Ньюмарка и другие. В настоящей статье подробно рассматривается только метод Ньюмарка, однако очевидно, что исследование остальных методов этой группы можно провести абсолютно аналогично.

§ 2. Линеаризация уравнений движения произвольной механической системы

Принцип линеаризации системы уравнений динамики многокомпонентной механической системы заключается в приведении уравнений (1)–(3) к общему виду (5). При этом необходимо для всех компонент уравнений (1)–(3) принять решение об их зависимости от всевозможных динамических параметров *на одном шаге расчета*.

Для начала необходимо из системы (1)–(2) исключить вектор λ силовых факторов в связях. Выразив вектор $\ddot{\mathbf{x}}$ из уравнения (1) и подставив его в (2), получим уравнение для расчета λ :

$$\mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \lambda = -\mathbf{h} - \mathbf{GM}^{-1}\mathbf{f}.$$

Очевидно, что матрица $\mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T$ симметрична. Можно показать, что для любой совместной механической системы эта матрица является обратимой. Вводя обозначение

$$\mathbf{B} = (\mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T)^{-1},$$

получаем

$$\lambda = -\mathbf{B}(\mathbf{h} + \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}). \quad (6)$$

Подставив это выражение в (1), запишем

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{G}^T\mathbf{B}\mathbf{h} + (\mathbf{I} - \mathbf{G}^T\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{f}.$$

Это уравнение приводится к виду

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{B}\mathbf{h} - \mathbf{R}\mathbf{f}, \quad (7)$$

где через \mathbf{R} обозначена следующая основная матрица:

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}. \quad (8)$$

Очевидно, матрица \mathbf{R} симметрична. Распишем произведение матриц \mathbf{G} и \mathbf{R} : $\mathbf{G}\mathbf{R} = \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{G}\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{G}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{0}$. Таким образом,

$$\mathbf{G}\mathbf{R} \equiv \mathbf{0},$$

И значит все столбцы (и строки) матрицы \mathbf{R} ортогональны всем строкам матрицы \mathbf{G} . Если рассмотреть простую проблему собственных значений для матрицы $\mathbf{R}\mathbf{P}$, где \mathbf{P} — произвольная матрица:

$$(\mathbf{R}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

то легко показать, что $\lambda\mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то есть всякий собственный вектор \mathbf{y} матрицы $\mathbf{R}\mathbf{P}$, соответствующий ненулевому собственному значению, ортогонален всем строкам матрицы \mathbf{G} .

Итак, совокупность уравнений (1)–(2) сведена к уравнению (7). Для дальнейших преобразований этого уравнения нужно перейти к рассмотрению динамического процесса на одном шаге интегрирования. Пусть в момент времени t_i все кинематические параметры и все компоненты уравнений (7) и (3) известны, и нужно определить их значения в момент $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Примем, что на одном шаге расчета матрица масс \mathbf{M} , якобиан связей \mathbf{G} и вектор невязок ускорений связей \mathbf{h} постоянны и равны своим значениям в начале этого шага. Это очень важное приближение, которое само по себе вводит ограничение на максимальный шаг интегрирования, поскольку для корректности расчета реальное поведение конструкции должно удовлетворять этому приближению с достаточной степенью точности. Однако для большинства реальных проектов это приближение оказывается корректным, поскольку общее распределение массы и производные невязок в связях (якобиан связей) изменяются довольно медленно. Легко видеть, что матрицы \mathbf{B} и \mathbf{R} также оказываются постоянными на шаге.

Поскольку $\mathbf{h} \equiv \mathbf{h}_i$ на рассматриваемом i -ом шаге расчета, то, записав выражение (6) для момента времени t_i , выразив из него $\mathbf{B}\mathbf{h}$ и подставив в (7), получим

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T(\lambda_i + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_i) - \mathbf{R}\mathbf{f}.$$

Значение сил в любой момент времени i -го шага можно представить в виде $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i + \delta\mathbf{f}$, значит, $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T(\lambda_i + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_i) - \mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}^T\lambda_i + (\mathbf{R} + \mathbf{M}^{-1})\mathbf{f}_i - \mathbf{R}(\mathbf{f}_i + \delta\mathbf{f}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_i + \mathbf{G}^T\lambda_i) - \mathbf{R}\delta\mathbf{f} = \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{R}\delta\mathbf{f}$. Итак, уравнение (7) преобразуется в уравнение, приближенно эквивалентное ему на шаге расчета,

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{R}\delta\mathbf{f}. \quad (10)$$

Уравнение (3) для датчиков-интегралов удобно представить в виде

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_i + \delta\mathbf{p}. \quad (11)$$

Итак, система уравнений (1)–(3) приближенно эквивалентна системе (10), (11). С учетом зависимостей (4) вариации $\delta \mathbf{f}$ и $\delta \mathbf{p}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{f} &= \mathbf{f}_t \delta t + \mathbf{f}_x \delta \mathbf{x} + \mathbf{f}_{\dot{x}} (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{f}_s \delta \mathbf{s}, \\ \delta \mathbf{p} &= \mathbf{p}_t \delta t + \mathbf{p}_x \delta \mathbf{x} + \mathbf{p}_{\dot{x}} (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{p}_s \delta \mathbf{s},\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$\delta t = t - t_i, \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i, \quad \delta \mathbf{s} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_i.$$

Запишем систему (10), (11) для вариаций $\delta \mathbf{x}$ и $\delta \mathbf{s}$, учитывая, что

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \delta \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}, \quad \delta \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}},$$

где для краткости приняты обозначения

$$\frac{d(\delta \mathbf{x})}{dt} = \delta \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d^2(\delta \mathbf{x})}{dt^2} = \delta \ddot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d(\delta \mathbf{s})}{dt} = \delta \dot{\mathbf{s}}.$$

Подставляя (12) в систему (10), (11) и перенося неизвестные кинематические параметры в левую часть уравнений, окончательно получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}\delta \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{x}} \delta \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{R} \mathbf{f}_x \delta \mathbf{x} + \mathbf{R} \mathbf{f}_s \delta \mathbf{s} &= \overline{\mathbf{F}}_x, \\ -\mathbf{p}_{\dot{x}} \delta \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_x \delta \mathbf{x} + \delta \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{p}_s \delta \mathbf{s} &= \overline{\mathbf{F}}_s,\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{F}}_x &= \ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{R} (\mathbf{f}_{\dot{x}} \dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{f}_t \delta t), \\ \overline{\mathbf{F}}_s &= \dot{\mathbf{s}}_i - \mathbf{p}_{\dot{x}} \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{p}_t \delta t.\end{aligned}\quad (14)$$

Уравнения (13) можно записать в обобщенном виде (5), если ввести следующие матрицы:

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{x}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}_{\dot{x}} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{f}_x & \mathbf{R} \mathbf{f}_s \\ -\mathbf{p}_x & -\mathbf{p}_s \end{bmatrix},\quad (15)$$

и вектор правой части

$$\overline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_x \\ \overline{\mathbf{F}}_s \end{bmatrix},\quad (16)$$

при этом выбрав в качестве обобщенных координат вектор

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{s} \end{bmatrix}.\quad (17)$$

Выражения (5), (14)–(17) дают формулы для расчета линеаризованной модели произвольной многокомпонентной механической системы. Самую серьезную сложность в анализ этой модели вносит присутствие датчиков-интегралов, поскольку обобщенная матрица масс уже не является положительно определенной. Если такие датчики отсутствуют, формулы линеаризации модели принимают гораздо более простой вид

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{M}} &= \mathbf{I}, \quad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{x}}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{R} \mathbf{f}_x, \\ \overline{\mathbf{F}} &= \ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{R} (\mathbf{f}_{\dot{x}} \dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{f}_t \delta t).\end{aligned}\quad (18)$$

Единственная проблема, возникающая при анализе системы (18), заключается в том, что обобщенные матрицы жесткости и демпфирования не являются ни симметричными, ни положительно определенными. Поиск собственных значений такой системы уравнений является хотя и нетривиальной, но хорошо известной и исследованной проблемой. Здесь отметим лишь, что задача на собственные значения для этой системы имеет вид (9), а следовательно, как и было показано, любой собственный вектор линеаризованной системы, соответствующий ненулевому собственному значению, ортогонален всем строкам матрицы \mathbf{G} .

§ 3. Специализированные численные методы интегрирования динамики многокомпонентных механических систем

Принцип формирования специализированных численных методов интегрирования движения систем со связями заключается в применении методов прямого интегрирования уравнений динамики метода конечных элементов к линеаризованной системе (5), (14)–(17). Как и было сказано ранее, в основе методов прямого интегрирования лежат две идеи: уравнение динамического равновесия удовлетворяется на одном шаге и положения, скорости, ускорения аппроксимируются на этом шаге некоторыми простыми формулами. Первая идея была использована и в процессе линеаризации системы (1)–(3), поэтому применение для интегрирования уравнений динамики механических систем численных методов, построенных указанным выше способом на базе линеаризованной системы, очевидно, является корректным. Выбранные формулы аппроксимации кинематических параметров дифференцируют конкретные методы интегрирования. Продемонстрируем процесс построения специализированного численного метода интегрирования на примере семейства неявных методов Ньюмарка. При этом, конечно же, аналогичным способом может быть построен любой подобный метод.

Классический метод Ньюмарка для уравнения (5) основан на независимых разложениях $\mathbf{v}(t_i + \delta t)$ и $\dot{\mathbf{v}}(t_i + \delta t)$ в степенные ряды по δt в окрестности точки t_i до члена $\ddot{\mathbf{v}}_i$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t_i + \delta t) &= \mathbf{v}_i + \delta t \cdot \dot{\mathbf{v}}_i + \frac{\delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{v}}_i + \alpha \delta t^3 \cdot \ddot{\mathbf{v}}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}(t_i + \delta t) &= \dot{\mathbf{v}}_i + \delta t \cdot \ddot{\mathbf{v}}_i + \beta \delta t^2 \cdot \ddot{\mathbf{v}}_i.\end{aligned}\quad (19)$$

В зависимости от выбора параметров α и β получаются методы с различными характеристиками точности и устойчивости. Записав формулы (19) для момента времени $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ и заменив $\ddot{\mathbf{v}}_i$ приближенным выражением: $\ddot{\mathbf{v}}_i = (\ddot{\mathbf{v}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{v}}_i) / \Delta t$, получаем формулы для расчета $\dot{\mathbf{v}}_{i+1}$ и $\ddot{\mathbf{v}}_{i+1}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{i+1} &= \frac{1}{\gamma \Delta t} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \dot{\mathbf{v}}_i + \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{v}}_i, \\ \ddot{\mathbf{v}}_{i+1} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{v}}_i + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) \ddot{\mathbf{v}}_i,\end{aligned}\quad (20)$$

где через γ обозначено отношение:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.\quad (21)$$

Записав уравнение (5) для момента t_{i+1} и подставив в него формулы (20), получим основное уравнение для расчета \mathbf{v}_{i+1} :

$$\overline{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{i+1} = \overline{\mathbf{b}}_{i+1},\quad (22)$$

где:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}} &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \overline{\mathbf{M}} + \frac{1}{\gamma \Delta t} \overline{\mathbf{D}} + \overline{\mathbf{C}}, \\ \overline{\mathbf{b}}_{i+1} &= \overline{\mathbf{F}}_{i+1} + \overline{\mathbf{M}} \cdot \left\{ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{v}_i + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{v}}_i + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{\mathbf{v}}_i \right\} + \\ &\quad \overline{\mathbf{D}} \cdot \left\{ \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{v}_i + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \dot{\mathbf{v}}_i + \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right) \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{v}}_i \right\}.\end{aligned}\quad (23)$$

Выражения (20)–(23) описывают классический метод Ньюмарка для уравнения (5). Исследование устойчивости дает следующие соотношения, накладываемые на значения параметров α и β , при которых метод является безусловно устойчивым:

$$\begin{aligned}\alpha &\geq 0.25 \cdot (\beta + 0.5)^2, \\ \beta &\geq 0.5.\end{aligned}\quad (24)$$

Исследование точности метода показывает, что точность отслеживания частоты собственных колебаний уравнения (5) падает с увеличением параметра α , а параметр β управляет эффектом искусственного демпфирования метода. При минимальном значении β , равном 0.5, искусственное демпфирование отсутствует, а при большем значении параметра демпфирующий эффект численной процедуры Ньюмарка тем сильнее, чем меньше собственная частота колебаний по сравнению с шагом интегрирования. Поэтому чаще всего выбирают значение β , равное или близкое к 0.5, а значение $\alpha = 0.25 \cdot (\beta + 0.5)^2$. Идеальными значениями параметров, при которых достигается безусловная устойчивость метода и наилучшая его точность, являются следующие величины:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.25, \\ \beta &= 0.5.\end{aligned}\tag{25}$$

Применим формулы метода Ньюмарка (22), (23) к линеаризованной системе (5), (14)–(17), учитывая, что $\mathbf{v}_i \equiv \mathbf{0}$, и полагая $\delta \dot{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{0}$, получим следующее базовое уравнение:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{b},\tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{xx} & \mathbf{A}_{xs} \\ \mathbf{A}_{sx} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{I} + \mathbf{R} \left(\frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} + \mathbf{f}_{\mathbf{x}} \right) & \mathbf{R} \mathbf{f}_{\mathbf{s}} \\ -\frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} - \mathbf{p}_{\mathbf{x}} & \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{p}_{\mathbf{s}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{s}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \\ \mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_s \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_x &= \left\{ \frac{1}{2\alpha} \mathbf{I} + \left(\frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \Delta t \cdot \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} \right\} \ddot{\mathbf{x}}_i + \left\{ \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{I} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} \right\} \dot{\mathbf{x}}_i - \Delta t \cdot \mathbf{R} \mathbf{f}_t, \\ \mathbf{b}_s &= \left(1 - \frac{1}{2\gamma} \right) \Delta t \cdot \mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{\gamma} \mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{\gamma} \dot{\mathbf{s}}_i + \Delta t \cdot \mathbf{p}_t.\end{aligned}$$

Формулы получились громоздкими и малоприспособными для проведения численных расчетов. Матрица \mathbf{A} не сбалансирована относительно шага интегрирования Δt , поскольку базовые значения диагональных элементов блока \mathbf{A}_{xx} имеют порядок Δt^{-2} , а блока \mathbf{A}_{ss} — порядок Δt^{-1} . При достаточно малых значениях Δt этот факт негативно сказывается на численной процедуре обращения матрицы (например, с помощью LU-разложения). Поэтому перепишем эти формулы, выбрав в качестве обобщенных координат модифицированный вектор

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma \Delta t} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{s} \end{bmatrix},\tag{27}$$

получим

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{xx} & \mathbf{A}_{xs} \\ \mathbf{A}_{sx} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{I} + \mathbf{R} (\mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} + \gamma \Delta t \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{x}}) & \mathbf{R} \mathbf{f}_{\mathbf{s}} \\ -\mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} - \gamma \Delta t \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} & \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{p}_{\mathbf{s}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \ddot{\mathbf{x}}_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{I} + \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{x}}_i - \Delta t \cdot \mathbf{R} \mathbf{f}_t \\ -\mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{\gamma} \dot{\mathbf{s}}_i + \Delta t \cdot \mathbf{p}_t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i+1,x} \\ \mathbf{v}_{i+1,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma \Delta t} \delta \mathbf{x}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{s}_{i+1} \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{28}$$

где

$$\dot{\ddot{\mathbf{x}}}_i = \left(\frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{\gamma} \dot{\mathbf{x}}_i.\tag{29}$$

Формулы (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{v}_{i+1,x} - \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i, \\ \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} &= \ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\Delta t} (\dot{\mathbf{x}}_{i+1} - \dot{\mathbf{x}}_i) - \ddot{\bar{\mathbf{x}}}_i \right), \\ \dot{\mathbf{s}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{s}}_i + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{v}_{i+1,s} - \dot{\bar{\mathbf{s}}}_i \right).\end{aligned}\quad (30)$$

Выражения (26)–(30) являются расчетными формулами специализированного метода Ньюмарка для численного решения системы уравнений динамики многокомпонентной механической системы (1)–(3). Особый интерес этот метод представляет при идеальных значениях параметров α и β (25), при которых достигается безусловная устойчивость и наибольшая точность классического метода Ньюмарка. Выпишем расчетные формулы для идеальных параметров, учитывая, что $\gamma = 0.5$ и $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_i = 2\dot{\mathbf{x}}_i$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \mathbf{I} + \mathbf{R}(\mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} + \tau \mathbf{f}_{\mathbf{x}}) & \mathbf{R} \mathbf{f}_{\mathbf{s}} \\ -\mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} - \tau \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{x}} & \frac{1}{\tau} \mathbf{I} - \mathbf{p}_{\mathbf{s}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \cdot \Delta \mathbf{x}_{i+1} \\ \Delta \mathbf{s}_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_i + \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{I} + \mathbf{R} \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{x}}_i - \tau \mathbf{R} \mathbf{f}_t \\ -\mathbf{p}_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{s}}_i + \tau \mathbf{p}_t \end{bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{x}}_{i+1} &= \mathbf{v}_{i+1,x} - \dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = \frac{1}{\tau} (\dot{\mathbf{x}}_{i+1} - \dot{\mathbf{x}}_i) - \ddot{\mathbf{x}}_i, \quad \dot{\mathbf{s}}_{i+1} = \frac{1}{\tau} \mathbf{v}_{i+1,s} - \dot{\mathbf{s}}_i,\end{aligned}$$

где через τ обозначена половина шага интегрирования

$$\tau = \frac{\Delta t}{2}.$$

§ 4. Краткий анализ специализированных численных методов интегрирования динамики механических систем

Основными свойствами любого численного метода интегрирования уравнений являются его устойчивость и точность. Полноценный анализ выведенных численных методов интегрирования не является объектом исследования настоящей статьи. Рассмотрим устойчивость и точность этих методов кратко с практической точки зрения. Для этого возьмем некоторый набор характерных типов механических систем, которые будем считать контрольными точками. Далее тип любой системы можно примерно оценить по близости к некоторой контрольной точке, и тем самым определить применимость специализированного численного метода для интегрирования данной системы. Для простоты будем рассматривать системы без датчиков-интегралов, поскольку реальная практическая необходимость в них возникает достаточно редко, а исследование метода в условиях их наличия крайне усложняется. В качестве контрольных естественно выбрать следующие два типа механических систем:

- 1) система без шарниров;
- 2) система без силовых элементов и упругих тел.

Для первого типа систем уравнения динамики (1), (2) переписываются в виде

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}.$$

Если расписать на одном шаге значение обобщенной силы \mathbf{f} через ее вариацию (12), это уравнение можно привести к виду (5), где

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{f}_{\dot{\mathbf{x}}}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}.$$

Никаких принципиальных отличий этой системы от классической системы уравнений динамики МКЭ нет. Поэтому все результаты анализа классического метода Ньюмарка остаются

верны. Специализированный метод для этого типа систем безусловно устойчив при значениях параметров α и β , даваемых формулой (24), и максимальная точность достигается при их идеальных значениях (25).

Второй тип систем характеризуется равенством нулю матриц производных силовых элементов:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_x = \mathbf{f}_x = \mathbf{0}.$$

Из выражений (5), (14)–(17) ясно, что основная решающая матрица \mathbf{R} в данном случае никак не влияет на вид линеаризованной системы, а значит и на формулы метода Ньюмарка (26)–(30). Более того, можно показать, что для любых значений параметров α и β формулы метода для этого типа систем вырождаются в следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}_i, \\ \dot{\mathbf{x}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{x}}_i + \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i, \\ \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} &= \ddot{\mathbf{x}}_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Это простейшие формулы прямолинейного равноускоренного движения. Ясно, что формулы (31) абсолютно непригодны для интегрирования движения произвольной системы рассматриваемого типа. Ни о какой устойчивости и точности метода в данном случае говорить не приходится.

Итак, анализ двух контрольных типов механических систем дает противоположные результаты: в первом случае метод Ньюмарка безусловно устойчив и точен при соответствующем выборе параметров, а во втором — попросту неприменим. А поскольку практически любая реальная система является системой смешанного типа, так как содержит и шарниры, и силовые элементы, то на первый взгляд кажется, что использовать этот метод нельзя ни для каких реальных систем, потому что неприменимость метода для части системы влечет его неприменимость для всей системы.

Однако практика использования выведенного специализированного метода Ньюмарка говорит об обратном. Для большинства систем метод не является безусловно устойчивым, расчет сходится только если шаг интегрирования меньше некоторого значения Δt_{cr} . При этом данное критическое значение обычно оказывается заметно больше ограничений на шаг интегрирования всевозможных явных методов интегрирования типа Рунге–Кутты, Адамса и других. Общее время расчета нередко удается сократить в десятки раз без потери его точности. Но всё же основная область применимости полученных методов — это множество проектов, близких к рассмотренному типу 1, то есть с относительно небольшим количеством шарниров. Для этих проектов либо метод оказывается безусловно устойчивым, либо максимальное ограничение на шаг так велико, что никогда не достигается по причине необходимости удовлетворения определенной точности.

Причина такого серьезного, как кажется на первый взгляд, расхождения между теорией и практикой заключается в следующем. При проведении расчетов на каждом шаге помимо интегрирования системы уравнений динамики (1), (2) производится коррекция положений и скоростей всех тел проекта с целью единовременной ликвидации нарушений всех связей, либо вводится стабилизация связей (смотрите [5]). Для небольших частей систем расчет одного шага производится по формулам, близким к формулам (31), но появляющиеся разрывы связей сразу же компенсируются коррекцией и стабилизацией. Основные же части систем, как и было показано, интегрируются специализированным методом Ньюмарка корректно и с очень хорошей точностью. Суммарно получаем расчет, хорошо согласующийся с реальным поведением модельных систем и с результатами численного интегрирования, проведенного с помощью контрольных методов, таких, например, как метод Рунге–Кутты–Фелберга пятого порядка с автоматической коррекцией шага.

§ 5. Примеры тестовых расчетов

В качестве иллюстрации всего вышесказанного приведем результаты расчета нескольких тестовых примеров в программном комплексе динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER. В первом примере рассматривается жесткая система типа 1 (система без шарниров), усложненная наличием нескольких датчиков-интегралов. Система состоит из двух одинаковых абсолютно твердых, шарообразных тел радиуса $1 [м]$, массой $1 [кг]$. Между телами поставлена пружина с большой поступательной жесткостью, равной $1 \cdot 10^6 [кг/с^2]$. Такая же пружина установлена между первым телом и базовой неподвижной системой координат (инерциальным звеном). В отрицательном направлении оси Oy действует сила гравитации с ускорением свободного падения $g = 10 [м/с^2]$. Датчик « y_1 » измеряет положение центра первого тела по оси Oy , датчик « Int_y_1 » — это интеграл датчика « y_1 » по времени, « $Int2_y_1$ » — интеграл датчика « Int_y_1 ». Эталонный расчет произведен методом Рунге–Кутты–Фелберга 5-го порядка с автоматической коррекцией шага (РКФ5). Средний шаг расчета оказался равен $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4} [с]$. На рис. 1 представлен график датчика « y_1 » для времени расчета, равного $1 [с]$, на рис. 2 — графики датчиков « Int_y_1 » и « $Int2_y_1$ ». Результаты эталонного решения прекрасно согласуются с теорией. Расчет методом Рунге–Кутты 4-го порядка с постоянным шагом (РК4) был произведен для максимально возможного шага интегрирования, при котором расчет устойчив: $\Delta t = 10^{-3} [с]$. График датчика « y_1 » для данного метода интегрирования показан на рис. 3. Точность расчета мала, поскольку амплитуда колебаний постоянно уменьшается, хотя частота по-прежнему отслеживается хорошо. Графики датчиков « Int_y_1 » и « $Int2_y_1$ » совпадают с эталонными.

Результаты расчета системы специализированным методом Ньюмарка с шагом $\Delta t = 10^{-3} [с]$ соответствуют эталонным с высокой точностью. График датчика « y_1 » приведен на рис. 4. Видно, что и частота колебаний, и их амплитуда, отслеживаются верно. Расчет проекта тем же методом с шагом $\Delta t = 0.1 [с]$ оказывается не только устойчивым, но и относительно точным. График датчика « y_1 » показан на рис. 5; при этом для наглядности время расчета увеличено до $10 [с]$. Вид графика характерен для расчета колебательных систем специализированными неявными методами, выведенными в настоящей статье, в случае, когда шаг интегрирования превышает максимальный период собственных колебаний системы. Из графика видно, что амплитуда основных колебаний определяется достаточно точно и сохраняется со временем. Частота колебаний не может быть адекватно отражена, поскольку шаг расчета больше периода колебаний. Однако сам факт наличия колебаний в системе всегда отслеживается. Датчики-интегралы рассчитываются точно, их графики совпадают с эталонными.

Помимо точности интегрирования важной характеристикой расчета является количество реального времени, затраченного на этот расчет. В таблице 1 приведены точные данные по времени всех описанных выше расчетов рассматриваемого проекта, выполненных на машине с процессором Intel Core i7-2600K CPU @ 3.40GHz для расчетного промежутка времени, равного $10 [с]$. Из таблицы видно, что расчет методом Ньюмарка с шагом $\Delta t = 10^{-3} [с]$ производится в 7.4 раза быстрее по сравнению с эталонным расчетом методом РКФ5. Расчет методом Ньюмарка с шагом $\Delta t = 0.1 [с]$ дает хорошую точность, зачастую достаточную для исследования жестких систем; при этом время расчета оказывается в 537.5 раз меньше эталонного.

№	Метод интегрирования	Шаг расчета, [с]	Время, [мс]
1	Метод Рунге–Кутты–Фелберга 5-го порядка с автоматической коррекцией шага	$2.5 \cdot 10^{-4}$ (в среднем)	12900
2	Метод Рунге–Кутты 4-го порядка	10^{-3}	2350
3	Специализированный метод Ньюмарка	10^{-3}	1750
4	Специализированный метод Ньюмарка	0.1	24

Таблица 1. Пример 1: реальные времена счета

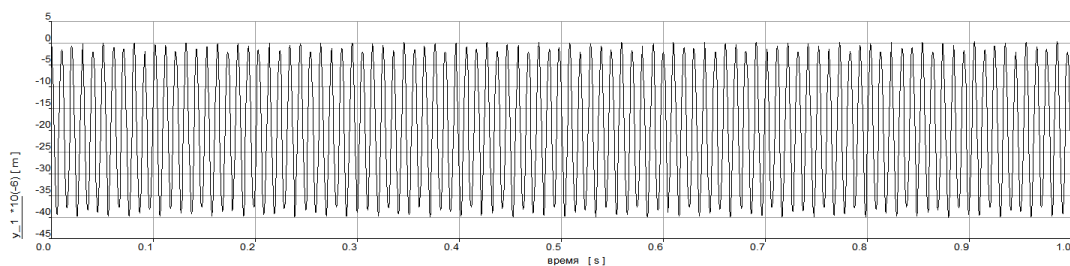


Рис. 1. Пример 1, метод РКФ5, график датчика «у_1»

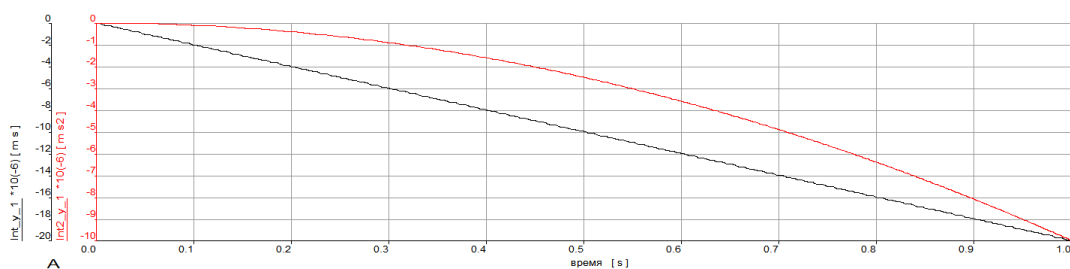
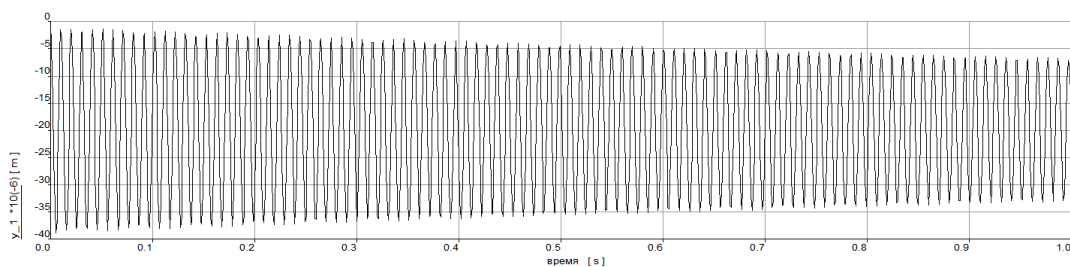
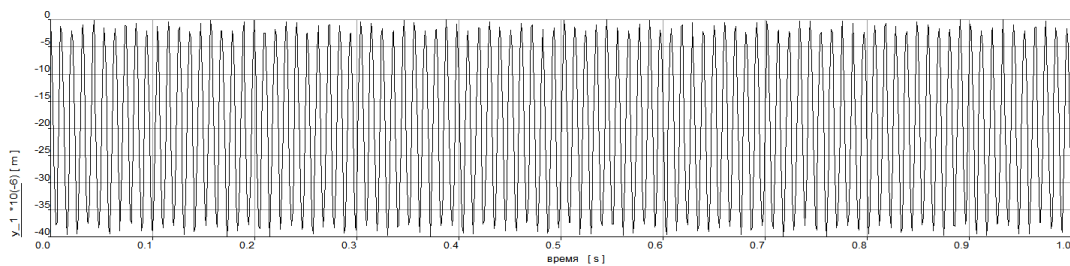
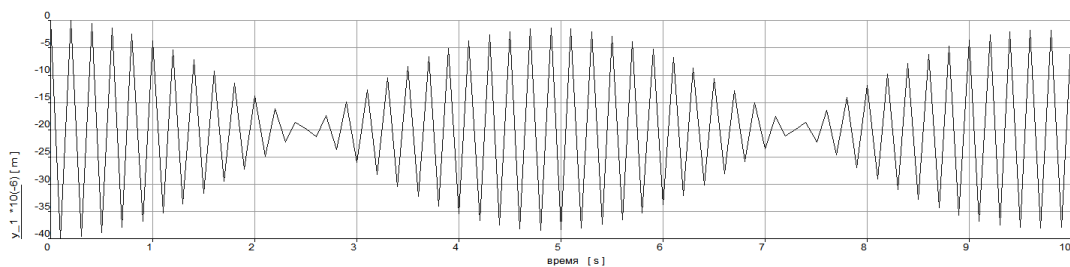


Рис. 2. Пример 1, метод РКФ5, графики датчиков «Int_y_1» и «Int2_y_1»

Рис. 3. Пример 1, метод РК4, шаг $\Delta t = 10^{-3}$ [с], график датчика «у_1»Рис. 4. Пример 1, метод Ньюмарка, шаг $\Delta t = 10^{-3}$ [с], график датчика «у_1»Рис. 5. Пример 1, метод Ньюмарка, шаг $\Delta t = 0.1$ [с], график датчика «у_1»

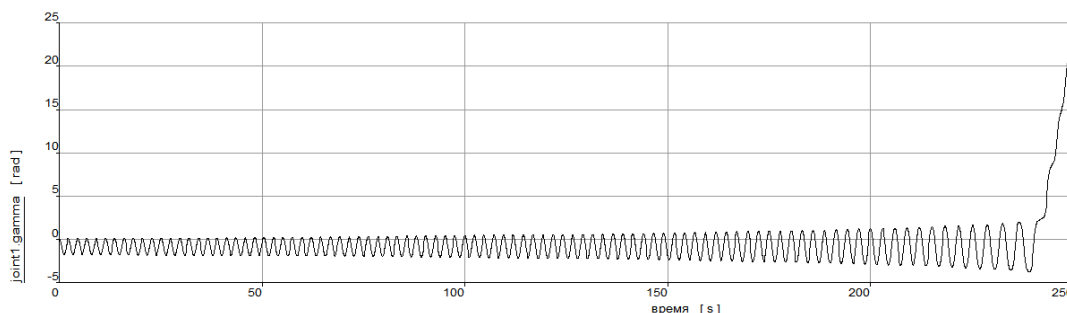


Рис. 6. Пример 2, метод Ньюмарка, шаг $\Delta t = 10^{-3}$ [с], график угла поворота

Итак, в полной мере продемонстрирована выгода от использования выведенных специализированных методов для интегрирования систем типа 1. Рассмотрим далее простейшую систему типа 2 (систему без силовых элементов и упругих тел) — физический маятник, то есть массовое тело на вращательном шарнире под гравитацией. Эталонный расчет методом РКФ5 дает очень точный результат при среднем шаге интегрирования, равном 0.1 [с]. Расчет же методом Ньюмарка даже с шагом 10^{-3} [с] ведет к постоянному росту амплитуды колебаний и, как следствие, к падению счета. График зависимости угла поворота в шарнире от времени показан на рис. 6. Таким образом, специализированный метод Ньюмарка, как это и предсказывает теория, не пригоден для расчета систем типа 2.

Все реальные системы являются системами смешанного типа, поскольку в них всегда присутствуют и силовые элементы, и шарниры. Они лишь могут быть отнесены к одному из типов по степени близости к нему. Рассмотрим реальный проект, относительно близкий к типу 1. В примере производится сброс головного обтекателя ракеты в процессе полета. Каждая створка обтекателя моделируется упругим телом. Створка изначально связана с корпусом ракеты

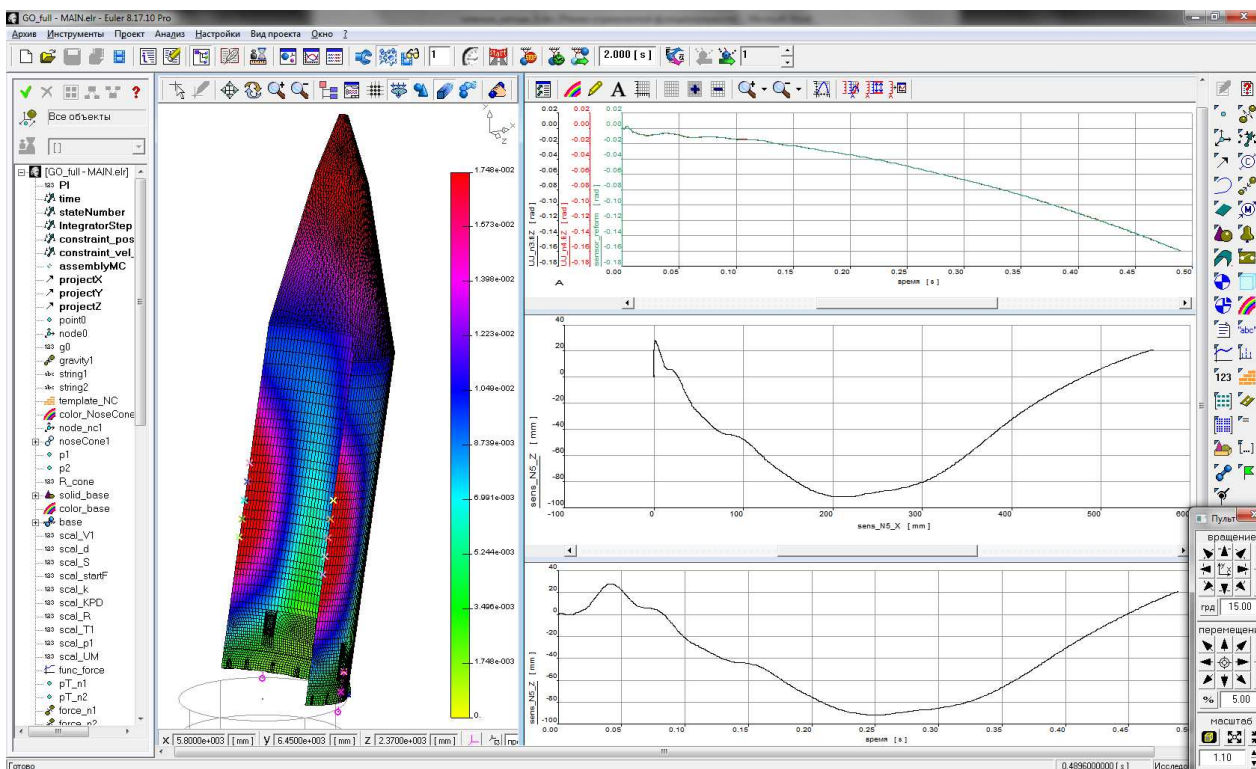


Рис. 7. Пример 3, среда ПК EULER в момент исследования проекта

№	Метод интегрирования	Шаг расчета, [с]	Время, [с]
1	Метод Рунге–Кутты–Фелберга 5-го порядка с автоматической коррекцией шага	$1.5 \cdot 10^{-5}$ (в среднем)	756.5
2	Специализированный метод Ньюмарка	$1.2 \cdot 10^{-4}$	18.5

Таблица 2. Пример 3: реальные времена счета

податливыми вращательными шарнирами. Толкатели, моделируемые силовыми элементами, воздействуют на створку, посредством чего она опрокидывается. В некоторый момент шарниры разрушаются и створка сбрасывается. На рис. 7 показан вид среды ПК EULER в режиме исследования проекта. Рассчитывается одна створка, поскольку движение второй абсолютно симметрично. Помимо визуального наблюдения за общим поведением системы и упругими перемещениями точек МКЭ-модели створки производится измерение состояния системы с помощью датчиков, расставленных в контрольных точках. Эталонный расчет произведен методом РКФ5. Максимальный шаг интегрирования, для которого расчет методом Ньюмарка устойчив и хорошо соответствует эталонному, равен $1.2 \cdot 10^{-4}$ [с]. Реальные времена счета для обоих методов приведены в таблице 2. Из таблицы видно, что использование метода Ньюмарка позволяет сократить время счета реального проекта более чем в 40 раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
2. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
3. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
4. Михеев Г.В. Компьютерное моделирование динамики систем абсолютно твердых и упругих тел, подверженных малым деформациям: дис. ... канд. техн. наук. Брянск, 2004. 153 с.
5. Бойков В.Г., Юдаков А.А. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. № 1. С. 42–52.
6. Юдаков А.А. Общие уравнения движения упругих тел, основанные на методе конечных элементов и модели Крейга-Бэмптона // Высокие технологии, образование, промышленность: сб. статей XI Междунар. науч.-практ. конф. СПбГУ. СПб.: Изд-во политехнического ун-та, 2011. Т. 4. С. 135–142.
7. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

Поступила в редакцию 01.11.2012

Юдаков Алексей Александрович, научный сотрудник, ЗАО «АвтоМеханика», 125363, Россия, Москва, ул. Новопоселковая, 6.

E-mail: you_AD@mail.ru

Бойков Владимир Георгиевич, к.т.н., доцент, кафедра оптимального управления, МГУ им. М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, 1; генеральный директор, ЗАО «АвтоМеханика», 125363, Россия, Москва, ул. Новопоселковая, 6.

E-mail: Boykov@Euler.ru

A. A. Yudakov, V. G. Boikov

Numerical methods of multibody mechanical system's dynamic equations integration, based on methods of direct integration of finite element method's dynamic equations

Keywords: multibody system, finite element method, stiff problem, system linearization, implicit numerical integration methods, Newmark's method.

Mathematical Subject Classifications: 65L80, 70E55

The article covers the basic principles of the linearization of dynamic equations for an arbitrary multibody mechanical system. General approaches to the formation of specialized numerical methods for integrating multibody systems are described, which are based on classical methods of finite-element method for direct integration of the dynamic equations. The method based on the known implicit Newmark method is considered. The calculation formulae are derived and a brief study on stability is conducted. In addition, the examples of test calculation are given, which are performed using the Newmark specialized method by means of bundled EULER software for dynamic analysis of multibody mechanical systems.

REFERENCES

1. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*, New Jersey: Prentice-Hall, 1976, 528 p. Translated under the title *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov*, Moscow: Stroiizdat, 1982, 448 p.
2. Obratsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* (Finite element method in the problems of aircraft structural mechanics), Moscow: Vysshaya Shkola, 1985, 392 p.
3. Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart: B.G. Teubner, 1977, 224 p. Translated under the title *Dinamika sistem tverdykh tel*, Moscow: Mir, 1980, 292 p.
4. Mikheev G.V. Computer simulation of rigid and flexible multibody system dynamics with small deformations, *Cand. Sci. (Eng.) Dissertation*, Bryansk, 2004, 153 p.
5. Boikov V.G., Yudakov A.A. Simulation of rigid and flexible multibody system dynamics with EULER software, *Inform. Tekhnol. Vychisl. Sist.*, 2011, no. 1, pp. 42–52.
6. Yudakov A.A. General equations of flexible bodies motion, based on finite element method and Craig-Bampton model, *High Technologies, Education, Industry: Transactions of XI Int. Sci.-Pract. Conf.*, Saint Petersburg State University, St. Petersburg, 2011, vol. 4, pp. 135–142.
7. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems*, Springer, 1993, 614 p. Translated under the title *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi*, Moscow: Mir, 1999, 685 p.

Received 01.11.2012

Yudakov Aleksei Aleksandrovich, researcher, ZAO (Close Corporation) "Avtomekhanika", ul. Novoposelkovaya, 6, Moscow, 125363, Russia.

E-mail: you_AD@mail.ru

Boikov Vladimir Georgievich, Candidate of Engineering, Associate Professor, Department of Optimal Control, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia; director general, ZAO (Close Corporation) "Avtomekhanika", ul. Novoposelkovaya, 6, Moscow, 125363, Russia.

E-mail: Boykov@Euler.ru