

УДК 532.5.013.4

© *К. Б. Циберкин*

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ НАД НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ РАСТВОРЕННУЮ ПРИМЕСЬ

Рассматривается двухслойная система, состоящая из слоя пористой среды конечной толщины и слоя однородной жидкости над ним. Пористый слой ограничен снизу твердой стенкой, верхняя граница жидкости рассматривается как недеформируемая. Исследуется влияние процесса вымывания растворенной примеси, содержащейся в жидкости, заполняющей слой пористой среды, на устойчивость стационарного плоскопараллельного течения однородной жидкости над ним. Пористая среда описывается моделью Бринкмана с условиями Ошоа-Тапия-Уитейкера на границе раздела потоков. Получено точное и приближенное решение для профиля концентрации примеси. В приближении «замороженного» распределения концентрации найден квазистационарный профиль скорости течения в системе. Проведено численное исследование линейной задачи устойчивости течения в широком диапазоне различных параметров задачи. При достижении достаточной скорости течения в системе развиваются колебательные возмущения, приводящие к развитию бегущих волн на границе раздела. Показано, что учет конвективного и диффузионного транспорта примеси практически не оказывает влияния на структуру нейтральных кривых и критические числа Рейнольдса.

*Ключевые слова:* течение над пористой средой, двухслойная система, бимодальность, неустойчивость течения, транспорт примеси, модель Бринкмана.

### Введение

При движении жидкости над пористой средой поток частично увлекает жидкость, насыщающую пористую среду. Благодаря высокой силе сопротивления пористой матрицы происходит резкое снижение скорости потока. Это приводит к развитию неустойчивости, подобной классической неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [1]. Сопутствующее развитие вихрей вблизи границы раздела вызывает перемешивание жидкостей в однородном слое и слое пористой среды. Подобные задачи имеют обширную историю изучения. Классической является задача о течении несжимаемой жидкости в канале, ограниченном твердой стенкой сверху и бесконечным слоем пористой среды снизу, под действием горизонтального градиента давления [2, 3]. Известны отдельные результаты по исследованию аналогичного потока в слое жидкости, расположенном между двумя пористыми слоями сверху и снизу [4, 5]. Ключевым фундаментальным вопросом в данных задачах является формулировка граничных условий, корректно описывающих перенос импульса через границу потоков [2, 6, 7, 9].

Характерной особенностью комбинированных систем жидкости и пористой среды является бимодальность нейтральных кривых, что соответствует реализации двух механизмов неустойчивости [3, 5, 10, 11]. В системе возможно возникновение крупных вихрей с большой длиной волны, охватывающих по толщине практически всю систему. В то же время при определенных условиях в потоке могут сформироваться и малоразмерные коротковолновые вихревые структуры, локализованные вблизи границы раздела. Впервые бимодальность нейтральных кривых была отмечена в работах [12, 13].

Данная проблема имеет большое прикладное значение. Отмеченная неустойчивость течения может быть причиной «взрывных» выбросов загрязнений, скопившихся в донной или наземной растительности [14, 15]. Другим приложением является динамика кристаллизации жидкого металла. Известно, что в процессе кристаллизации на границе расплава образуется слой металлической пены, течение в котором в значительной мере влияет на качество затвердевания материала [10, 17]. Однако большинство перечисленных работ, за исключением [14], не принимают во внимание непосредственный перенос примеси в системе.

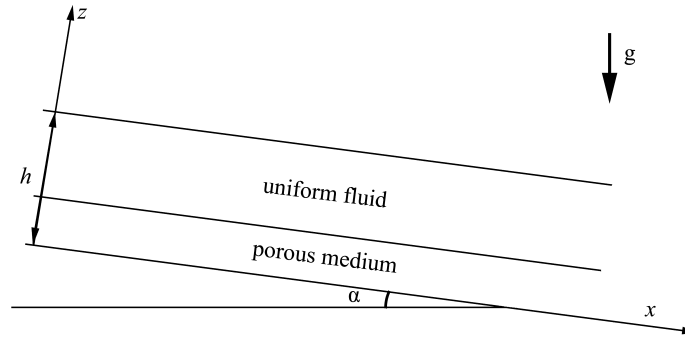


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой двухслойной системы

В настоящей работе проведено исследование линейной устойчивости течения над пористой средой с учетом вымывания из нее растворимой примеси, оказывающей прямое влияние на течение. В приближении «замороженного» профиля концентрации примеси получен приближенный профиль квазистационарного потока, количественно слабо отличающийся от такового без примеси. Влияние тяжелой примеси на устойчивость течения также оказывается незначительным. Влияние на поток легкой примеси в настоящей работе не рассматривается. В таком случае в системе будет развиваться концентрационно-конвективная неустойчивость.

### § 1. Двухслойная система. Модель фильтрации

Рассматривается двухслойная система, состоящая из слоя вязкой несжимаемой жидкости и расположенного под ним слоя пористой среды, насыщенной той же жидкостью. Слои наклонены к горизонту под углом  $\alpha$ , и жидкость свободно стекает вниз под действием силы тяжести, дополнительного продольного градиента давления в системе нет (рис. 1). Нижняя граница системы считается твердой и непроницаемой для жидкости. Верхняя граница свободная и недеформируемая. Граница раздела слоев также рассматривается как плоская и недеформируемая, чтобы исключить связанные с ее кривизной дополнительные эффекты, усложняющие описание задачи. Описание производится в двумерном приближении, задача предполагается однородной вдоль оси  $y$ .

Движение в однородной жидкости описывается обычными уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \bar{v} - g \vec{\gamma}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (1.2)$$

а в пористом слое — уравнениями Бринкмана:

$$\frac{\partial \bar{v}_p}{\partial t} + (\bar{v}_p \cdot \nabla) \bar{v}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla P_p - \frac{\nu}{K} \phi \bar{v}_p + \tilde{\nu} \Delta \bar{v}_p - g \vec{\gamma}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \bar{v}_p = 0, \quad (1.4)$$

где  $\bar{v}$  — скорость движения в слое однородной жидкости;  $\phi \bar{v}_p$  — скорость фильтрации жидкости в пористой среде;  $P$  — давление;  $\phi$ ,  $K$  — пористость и проницаемость среды;  $\rho$ ,  $\nu$  — плотность и кинематическая вязкость жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\vec{\gamma}$  — единичный вектор вдоль вертикали. Индекс  $p$  обозначает величины, относящиеся к пористой среде. На границе раздела потоков используются условия Ошоа–Тапия–Уитейкера [6, 7]:

$$\bar{v} = \phi \bar{v}_p, \quad P - 2\nu\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} = P_p - 2\tilde{\nu}\rho\phi \frac{\partial v_{p,z}}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \phi \frac{\partial v_{p,x}}{\partial z} = -\frac{\beta}{K^{1/2}} \phi v_{p,x}, \quad (1.5)$$

где  $\beta$  — безразмерный коэффициент, зависящий от материальных параметров пористой среды и жидкости вблизи границы раздела двух сред. Эти условия включают условия непрерывности компонент скорости и нормальных напряжений и условие на скачок касательных напряжений, предложенное в работе [6] и имеющее смысл сопротивления пористого скелета движению жидкости в тонком пограничном слое толщиной порядка  $K^{1/2}$ . Значения коэффициента  $\beta$  в этом слагаемом для реальных систем близки к единице [7]. При  $\beta = 0$  условие на скачок касательных напряжений переходит в условие их непрерывности, впервые предложенное в [12]. Граничные условия (1.5) отличаются от других известных вариантов [2, 9, 17] строгостью математической процедуры, в ходе которой они были получены, хотя и включают эмпирический параметр  $\beta$ .

Помимо силы сопротивления пористого скелета, определяемой законом Дарси [2, 16], в уравнение Бринкмана введено дополнительное вязкое слагаемое, связанное с диффузией импульса. Это позволяет более корректно описывать пограничные слои вблизи твердых стенок и границ раздела потоков с различными свойствами. Модель Дарси, в отличие от модели Бринкмана, дает однородные в поперечном направлении профили скорости фильтрации, и в результате на границах формируются разрывы скорости, что некорректно отражает структуру потока в средах с высокой проницаемостью и пористостью. Величина  $\tilde{\nu}$  зависит от свойств пористой среды. Следуя [6, 7], будем полагать

$$\tilde{\nu}/\nu = 1/\phi.$$

Как отмечается в работах [5–8] и ряде других, данное соотношение для эффективной вязкости может быть получено посредством осреднения уравнений Навье–Стокса на поровом уровне. Отдельными авторами указывается, что точное значение эффективной вязкости определяется также параметром извилистости течения в пористой среде  $T$  (англ. *tortuosity*):

$$\tilde{\nu}/\nu = 1/(\phi T).$$

По различным оценкам,  $T$  варьируется в довольно широких пределах (от 0.1 до 10 и более). Однако к настоящему моменту не разработано обоснованной методики его оценки (как теоретической, так и экспериментальной) [2].

В литературе указывается, что предельная пористость, где учет диффузии импульса становится существенным, равна  $\phi = 0.6$  [2]. Именно это значение используется в данной работе. Кроме того, ввиду большого значения пористости, а также возможности быстрого развития неустойчивости в системе в настоящей работе учтены и нелинейные инерционные слагаемые в уравнении (1.3), пренебрежимо малые в случае стационарного течения.

В начальный момент времени в пористом слое присутствует примесь концентрацией  $C_0$ , а верхняя жидкость примеси не содержит. Коэффициент диффузии примеси в жидкости равен  $D$ . Поскольку система однородна в продольном направлении, вблизи границы раздела формируется тонкий диффузионный пограничный слой, также однородный вдоль системы. Характерное время процесса диффузии существенно больше по сравнению с вязкими и гидродинамическими временами, поэтому устойчивость системы исследуется в приближении квазистационарного профиля концентрации. Во избежание развития концентрационной конвекции рассматривается только тяжелая примесь.

Модель (1.1)–(1.5) дополняется уравнениями переноса примеси в однородной жидкости и пористой среде, а также граничными условиями на непрерывность концентрации и потока примеси. Также учитывается, что примесь вызывает изменение плотности жидкости. Для упрощения модели предполагается, что выполняется линейная зависимость плотности от объемной концентрации:

$$\rho(C) = \rho_0(1 + \beta_C C), \quad \beta_C > 0.$$

В целом по слою существенное изменение плотности происходит только в непосредственной близости от границы раздела, а в основном объеме жидкости и пористой среды изменения плотности малы, и линейное приближение таким образом допустимо. Для коэффициента диффузии в пористой среде принято значение  $D_p = \phi D$ . Здесь также можно отметить, что с учетом извилистости эффективный коэффициент диффузии записывается как  $D_p = \phi T D$ .

Проведем обезразмеривание уравнений. Примем следующие масштабы для переменных:

$$[\bar{r}] = h, \quad [t] = \frac{h^2}{\nu}, \quad [\bar{v}] = \frac{gh^2}{\nu} \sin \alpha, \quad [P] = \rho_0 gh \sin \alpha.$$

Масштабом длины является полная толщина системы; масштаб скорости — это удвоенная максимальная скорость стекания слоя однородной жидкости по непроницаемой наклонной плоскости с заданным углом  $\alpha$ ; для времени выбраны вязкие времена, а для давления — гидростатическое давление в наклонном слое. В безразмерной форме полная система уравнений модели принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{Re}(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= -\nabla P + \Delta \bar{v} - \frac{1 + \beta_C C}{\sin \alpha} \bar{\gamma}, \\ \text{div} \bar{v} &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \text{Re} \bar{v} \cdot \nabla C = \frac{1}{\text{Sc}} \Delta C, \\ \frac{\partial \bar{v}_p}{\partial t} + \text{Re}(\bar{v}_p \cdot \nabla) \bar{v}_p &= -\nabla P_p - q^2 \phi \bar{v}_p + \Delta \bar{v}_p - \frac{1 + \beta_C C}{\sin \alpha} \bar{\gamma}, \\ \text{div} \bar{v}_p &= 0, \quad \frac{\partial C_p}{\partial t} + \text{Re} \bar{v}_p \cdot \nabla C_p = \frac{1}{\text{Sc}_p} \Delta C_p. \end{aligned}$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} z = 1 : v_z &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad C = 0, \\ z = 0 : v_{p,z} &= v_{p,x} = 0, \quad C_p = C_0, \\ z = d : \bar{v} &= \phi \bar{v}_p, \quad P - 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = P_p - 2 \phi \frac{\partial v_{p,z}}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_{p,x}}{\partial z} = -\beta q \phi v_{p,x}, \\ C &= C_p, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = \phi \frac{\partial C_p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Начальное распределение концентрации отвечает присутствию примеси только в пористом слое, в то время как верхняя жидкость остается чистой:

$$C(t = 0) = 0, \quad C_p(t = 0) = C_0,$$

где  $C_0$  — характерное значение концентрации. При таком начальном распределении независимо от скорости стационарного плоскопараллельного течения конвективный перенос примеси отсутствует (стационарное течение однородно вдоль слоя), и основное состояние определяется только процессом диффузии. Диффузионные времена крайне малы по сравнению с характерными временами вязких и гидродинамических процессов, поэтому в дальнейшем исследовании рассматривается устойчивость квазистационарного состояния с «замороженным» профилем концентрации. Как будет показано ниже, характерные собственные частоты развивающейся в системе колебательной неустойчивости велики (порядка  $10^4$  безразмерных единиц), и поэтому перемешивание жидкости происходит существенно быстрее, чем изменится профиль концентрации.

В результате обезразмеривания в задаче возникают следующие безразмерные параметры:

$$\text{Re} = \frac{gh^3}{\nu^2} \sin \alpha, \quad \text{Da} = \frac{K}{h^2}, \quad d = \frac{h_p}{h},$$

где  $h_p$  — толщина пористого слоя. Соответственно это число Рейнольдса, число Дарси и безразмерная толщина пористой среды. Вместо числа Дарси более удобен параметр  $q = \text{Da}^{1/2}$ . Его применение позволяет несколько сократить запись уравнений и решений для стационарного профиля скорости. Величина  $q$  возрастает по мере уменьшения проницаемости и, соответственно, увеличения силы сопротивления пористого скелета. Также существует дополнительный управляющий параметр, описывающий процесс диффузии. При используемых масштабах это

число Шмидта  $Sc = \nu/D$ ,  $Sc_p = \nu/D_p = Sc/\phi$ . Основной перепад концентрации между верхней и нижней границей системы происходит в пределах диффузионных пограничных слоев вблизи границы раздела потоков. Их толщина определяется как

$$\delta = 2 \left( \frac{t}{Sc} \right)^{1/2}, \quad \delta_p = 2 \left( \frac{t}{Sc_p} \right)^{1/2}.$$

## § 2. Квазистационарное состояние

Скорость основного стационарного потока не имеет вертикальной составляющей, и поэтому конвективное слагаемое в уравнениях транспорта примеси равно нулю, что также следует из однородности системы в горизонтальном направлении. Соответственно, квазистационарный профиль распределения примеси в системе в данном приближении может быть найден точно с использованием функции ошибок:

$$C(z, t) = \frac{\phi^{1/2} C_0}{1 + \phi^{1/2}} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2} \frac{Sc^{1/2}}{t^{1/2}} (z - d) \right) \right), \quad (2.1)$$

$$C_p(z, t) = \frac{\phi^{1/2} C_0}{1 + \phi^{1/2}} \left( 1 - \frac{1}{\phi^{1/2}} \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2} \frac{Sc_p^{1/2}}{t^{1/2}} (z - d) \right) \right). \quad (2.2)$$

Однако использовать точное решение для вычисления стационарного профиля скорости в явной форме не удастся, поскольку при решении соответствующих дифференциальных уравнений возникают интегралы от произведения экспоненты с линейной функцией  $z$  в показателе и функции ошибки, не выражаемые аналитически. Поэтому для нахождения приближенного вида квазистационарного течения в настоящей работе использована кусочно-линейная аппроксимация в пределах диффузионного пограничного слоя:

$$C(z, t) = \begin{cases} 0, & d + \delta < z < 1, \\ -\phi C_0 \frac{z - d - \delta}{\phi \delta_p + \delta}, & d < z < d + \delta, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$C_p(z, t) = \begin{cases} C_0 \left( 1 - \frac{z - d + \delta_p}{\phi \delta_p + \delta} \right), & d - \delta_p < z < d, \\ C_0, & z < d - \delta_p. \end{cases} \quad (2.4)$$

Сопоставление данного приближенного решения с точным (2.1)–(2.2) показано на рисунке 2, *a*. Ошибка представленной аппроксимации на временах много меньше диффузионных мала ввиду большого значения числа Шмидта (порядка  $10^3$ ) и малой толщины диффузионных слоев. На временах, превышающих диффузионные, погрешность возрастает по мере удаления от границы раздела.

Профиль стационарного течения в данном приближении близок к стационарному течению для модели Бринкмана без примеси и описывается следующими функциями:

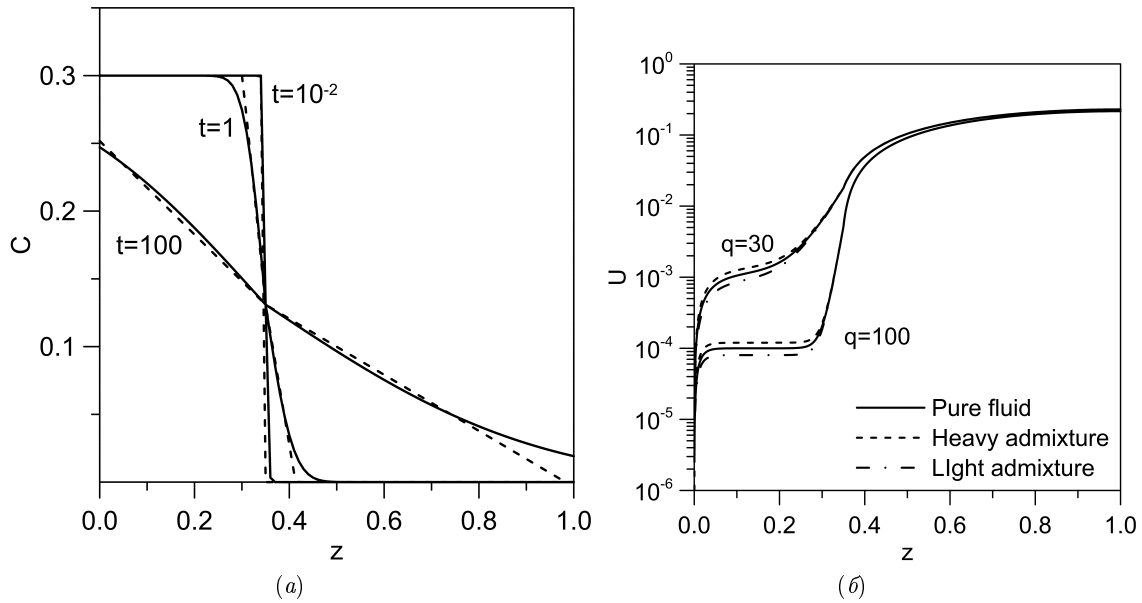
$$U_1(z) = C_1^{(1)} e^{qz} + C_2^{(1)} e^{-qz} + \alpha_1, \quad (2.5)$$

$$U_1(z) = C_1^{(2)} e^{qz} + C_2^{(2)} e^{-qz} + \alpha_2 - \beta_2(z - d), \quad (2.6)$$

$$U_1(z) = C_1^{(3)} + C_2^{(3)} z - \alpha_3 z^2 + \beta_3 z^3, \quad (2.7)$$

$$U_4(z) = C_1^{(4)} + C_2^{(4)} z - \frac{z^2}{2}. \quad (2.8)$$

Используемые в полученном решении константы не приводятся здесь ввиду громоздкости их формальной записи. На рисунке 2, *б* показаны вычисленные приближенные профили скорости. Хорошо видно, что растворенная в жидкости примесь оказывает хотя и заметное, но слабое влияние на скорость потока в пористом слое, в котором она в основном сосредоточена. Тяжелая примесь приводит к незначительному ускорению течения, а легкая (в приближении малых



**Рис. 2.** Точное решение для концентрации примеси и его кусочно-линейная аппроксимация (а) и квазистационарный профиль скорости в двухслойной системе (б) при различных значениях проницаемости, толщине пористого слоя  $d = 0.35$  и числе Шмидта  $Sc = 10^3$

градиентов концентрации, не достаточных для развития конвекции) замедляет его. Скорость течения над пористым слоем не зависит от наличия в системе примеси, поскольку ее концентрация за пределами пограничного слоя исчезающе мала.

### § 3. Характеристики устойчивости течения

Далее численно исследуется устойчивость квазистационарного решения (2.3)–(2.8). Линеаризованные уравнения для малых возмущений стандартным методом приводятся к спектральной задаче для  $z$ -компоненты возмущений скорости  $w$  и возмущений концентрации  $c$

$$(\lambda + ik \operatorname{Re} U)(w'' - k^2 w) = (w^{IV} - 2k^2 w'' + k^4 w) - ik \operatorname{Re} U'' w - \beta_C (ikc' + k^2 \operatorname{ctg} \alpha c), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + ik \operatorname{Re} U_p + q^2 \phi)(w_p'' - k^2 w_p) = \\ & = (w_p^{IV} - 2k^2 w_p'' + k^4 w_p) - ik \operatorname{Re} U_p'' w_p - \beta_C (ikc_p' + k^2 \operatorname{ctg} \alpha c_p), \end{aligned} \quad (3.2)$$

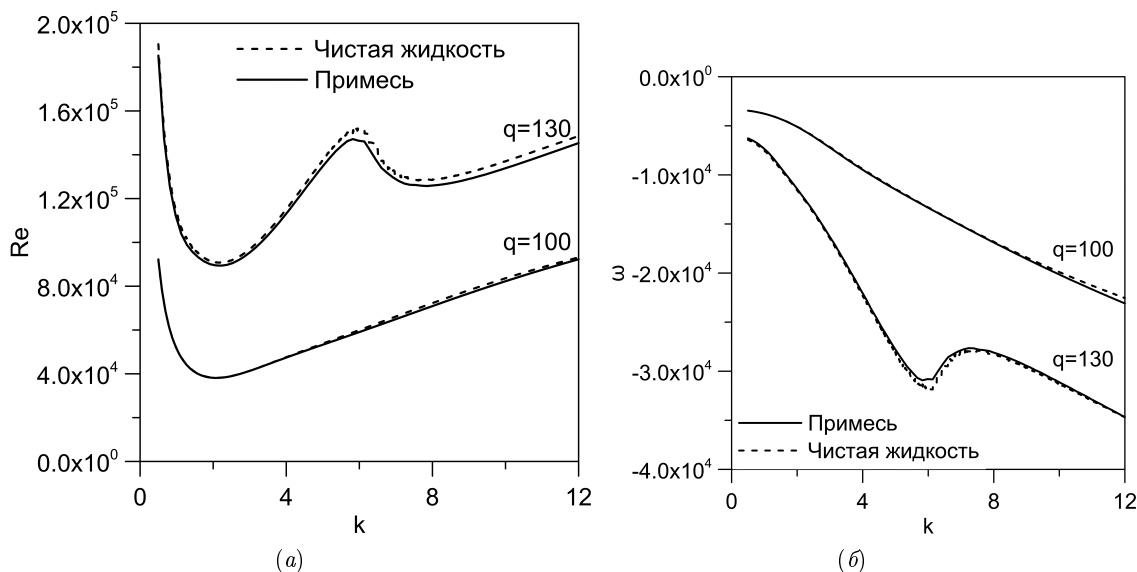
$$(\lambda + ik \operatorname{Re} U)c + \operatorname{Re} C_0' w = \frac{1}{\operatorname{Re}} (c'' - k^2 c), \quad (3.3)$$

$$(\lambda + ik \operatorname{Re} U_p)c_p + \operatorname{Re} C_{p,0}' w_p = \frac{1}{\operatorname{Re}} (c_p'' - k^2 c_p) \quad (3.4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} z = 1: & \quad w = 0, \quad w'' = 0, \quad c = 0, \\ z = 0: & \quad w_p = 0, \quad w_p' = 0, \quad c_p = 0, \\ z = d: & \quad w = \phi w_p, \quad w' = \phi w_p', \quad c = c_p, \quad c' = \phi c_p', \quad w'' - w_p'' = -\beta q \phi w_p', \\ & (w''' - w_p''') - (\lambda + k^2)(w' - w_p') - ik \operatorname{Re} ((U'w - U_p'w_p) - (Uw' - U_p w_p')) + q^2 \phi w = 0. \end{aligned}$$

Решение полученной задачи устойчивости проводилось численно, с использованием метода построения фундаментальной системы решений с ортогонализацией [18–20]. Данный метод является модификацией стандартного метода стрельбы. Его основной особенностью является использование в качестве начальных условий метода Рунге–Кутты набора ортогональных



**Рис. 3.** Нейтральные (а) и дисперсионные (б) кривые для течения в двухслойной системе при различной проницаемости пористой среды;  $d = 0.35$ ,  $Sc = 10^3$ ,  $t = 10^{-2}$ ; пунктиром показаны характеристики устойчивости для системы без переноса примеси

векторов, которые в ходе интегрирования системы уравнений пошагово ортогонализуются и перенормируются для устранения накапливающихся численных погрешностей.

На рисунке 3 показаны нейтральные и дисперсионные кривые для течения в двухслойной системе (сплошные линии) в сопоставлении с результатами для системы, не содержащей примеси (пунктирные линии) [5]. Хорошо видно, что влияние примеси оказывается практически несущественным в масштабе графиков. Наличие примеси в системе приводит к незначительной дестабилизации течения. Отметим, что для данного расчета использовано значение объемной концентрации, отвечающее насыщенному раствору, поэтому содержащаяся в нижележащем слое примесь не оказывает критического влияния на устойчивость. Наблюдаемое понижение нейтральных кривых связано с увеличением скорости потока в пористом слое (см. рис. 2, б). Собственные частоты критических возмущений практически не изменяются.

Общие закономерности изменения характеристик устойчивости течения при различном значении толщины пористого слоя также согласуются с результатами для системы без примеси (рис. 4). При средних значениях толщины ( $d \sim 0.6$ ) реализуется только монотонное повышение устойчивости течения по мере роста  $d$ , что связано с усилением влияния непроницаемой верхней границы на образующиеся длинноволновые вихри. Аналогичный эффект обнаружен и для тонких пористых слоев. Начиная с некоторого критического значения  $d \approx 0.2$  дальнейшее уменьшение толщины пористого слоя также приводит к стабилизации потока. Это теперь уже связано с подавлением образующихся вихрей в пределах пористого слоя благодаря влиянию нижней стенки. Как в модели Бринкмана, так и в модели Дарси без примеси данный результат не был явно обнаружен ранее в известных работах, но это было вызвано только ограничением области параметров задачи. В работе [5] указано на повышение критических чисел Рейнольдса по мере снижения толщины пористого слоя, однако оно не было сильно выражено, поскольку авторами указанного исследования рассмотрена только область  $d > 0.25$ .

Характерной особенностью малых толщин пористого слоя является изменение структуры дисперсионных кривых. В пределе длинных волн собственные частоты возмущений имеют конечные значения (кривые 2–7 на рисунке 4, б). Однако по мере снижения толщины это значение быстро возрастает и уходит на бесконечность (кривая 1 на рисунке 4, б). Экстремальное значение частоты в таком случае уже соответствует конечным длинам волн. Подробное исследование задачи при различных значениях числа Шмидта и времени, прошедшего с момента  $t = 0$ , когда

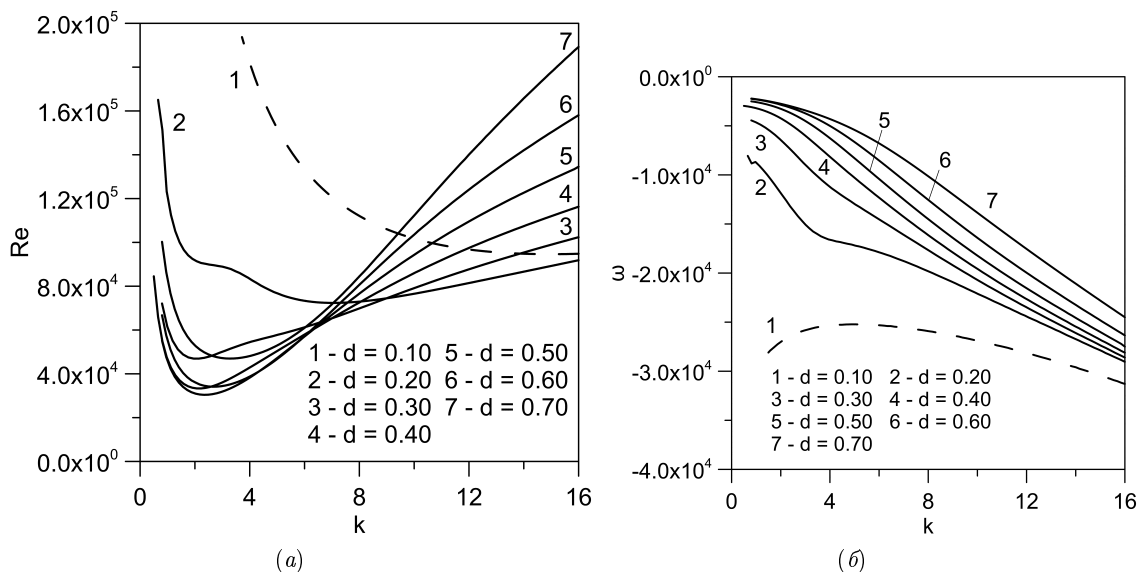


Рис. 4. Нейтральные (а) и дисперсионные (б) кривые для течения в двухслойной системе при различной относительной толщине пористого слоя;  $q = 100$ ,  $Sc = 10^3$ ,  $t = 10^{-2}$

вся примесь сосредоточена в пористом слое, показывает слабую зависимость от них.

Таким образом, характеристики диффузионного процесса практически не вносят изменений в устойчивость системы и собственные частоты. Это легко показать на основе сопоставления характерных значений соответствующих слагаемых в амплитудных уравнениях (3.1)–(3.4). Величина слагаемого вида  $ik \operatorname{Re} U''$  определяется второй производной стационарного профиля скорости и числом Рейнольдса. Вблизи границы раздела скорость резко меняется на малом расстоянии, а характерные критические числа Рейнольдса достигают значений порядка  $10^4$  и выше. В то же время величина слагаемого, которое описывает влияние примеси на поток, определяется прежде всего множителем  $k^2 \operatorname{ctg} \alpha$ . В рассмотренных условиях применительно к качественному моделированию течений в природных системах угол равен  $10^{-2}$ , и указанный множитель варьируется в пределах  $10^2$ – $10^3$ . Соответственно, можно ожидать значительного усиления влияния примеси на устойчивость потока в пределе коротковолновых возмущений (больших значений  $k$ ), которые тем не менее не являются наиболее опасными в рассмотренном диапазоне параметров задачи.

#### § 4. Заключение

Проведено исследование задачи об устойчивости стационарного потока жидкости над пористой средой, насыщенной той же жидкостью и содержащей растворимую примесь. Показано, что присутствие в пористой среде растворимой примеси практически не оказывает влияния на структуру нейтральных и дисперсионных кривых, а также значения критических чисел Рейнольдса и собственных частот колебательных возмущений. В случае тяжелой примеси происходит незначительная дестабилизация течения ввиду ускорения стационарного плоскопараллельного течения. Влияние легкой примеси на течение в рамках настоящей работы не рассматривалось. В данном случае следует ожидать возможности развития в системе концентрационно-конвективной неустойчивости при достижении достаточно большой толщины диффузионного слоя вблизи границы раздела потоков.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson W. (Lord Kelvin). Mathematical and physical papers. Vol. 4. Hydrodynamics and general dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1910. 563 p.
2. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. 4-th ed. New York: Springer, 2013. 778 p.



3. Hill A.A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a highly porous material // *Adv. Water Resour.* 2009. Vol. 32. № 11. P. 1609–1614.
4. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls // *J. Appl. Phys.* 1953. Vol. 24. P. 1232–1235.
5. Tilton N., Cortelezzi L. Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 604. P. 411–445.
6. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1995. Vol. 38. Issue 14. P. 2635–2646.
7. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—II. Comparison with experiment // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1995. Vol. 38. Issue 14. P. 2647–2655.
8. Whitaker S. The Forchheimer equation: a theoretical development // *Transport Porous Med.* 1996. Vol. 25. P. 27–61.
9. Beavers G.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 30. № 1. P. 197–207.
10. Kolchanova E.A., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // *Transport Porous Med.* 2013. Vol. 97. № 1. P. 25–42.
11. Govender S. Stability of solutal convection in a rotating mushy layer solidifying from a vertical surface // *Transport Porous Med.* 2011. Vol. 90. № 2. P. 393–402.
12. Любимов Д.В., Муратов И.Д. О конвективной неустойчивости в слоистой системе // *Межвуз. сб. науч. трудов «Гидродинамика»*. Пермь, 1977. Т. 10. С. 38–46.
13. Chen F., Chen C.F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer // *J. Heat Transfer.* 1988. Vol. 110. № 2. P. 403–409.
14. Gavrilov K., Accary G., Morvan D., Lyubimov D., Méradji S., Bessonov O. Numerical simulation of coherent structures over plant canopy // *Flow Turbul. Combust.* 2011. Vol. 86. № 1. P. 89–111.
15. Ghisalberti M., Nepf H. The structure of the shear layer in flows over rigid and flexible canopies // *Environ. Fluid Mech.* 2006. Vol. 6. № 3. P. 277–301.
16. Алешкова И.А., Шеремет М.А. Математическое моделирование сопряженной термогравитационной конвекции в пористой среде // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2010. № 2. С. 49–56.
17. le Bars M., Worster M.G. Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification // *J. Fluid Mech.* 2006. Vol. 550. P. 149–173.
18. Conte S.D. The numerical solution of linear boundary value problems // *SIAM Review.* 1966. Vol. 8. № 3. P. 309–321.
19. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*. 1961. Т. 16. № 3 (99). С. 171–174.
20. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.

Поступила в редакцию 08.02.2015

Циберкин Кирилл Борисович, ассистент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15.  
E-mail: kbtsiberkin@psu.ru

***K. B. Tsiberkin***

**Stability of the flow over saturated porous medium containing dissolved admixture**

*Keywords:* flow over porous medium, two-layer system, bimodality, flow instability, admixture transport, Brinkman model.

MSC: 76E05, 76S05

A two-layer system consisting of a porous layer of finite thickness and a uniform fluid layer on top is considered. A rigid wall bounds the porous layer from below, while the upper fluid surface is assumed to be undeformable.

We study the process of admixture extraction from the porous layer and its influence on the stability of the stationary plane-parallel flow above it. We describe a porous layer using a Brinkman model with interface boundary conditions by Ochoa-Tapia-Whitaker. We obtain an exact and an approximate solution for the concentration profile. The quasistationary velocity profile is obtained using “frozen” concentration distribution. We solve a linear stability problem for the plane-parallel stationary flow in a wide range of system parameters. Oscillatory instability evolved in the system at the sufficient flow velocity corresponds to traveling waves near the interface. We show that the convective and diffusion transport practically does not affect the structure of neutral stability curves and Reynolds numbers.

## REFERENCES

1. Thomson W. (Lord Kelvin). *Mathematical and physical papers, vol. 4, Hydrodynamics and general dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1910, 563 p.
2. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media, 4-th ed.*, New York: Springer, 2013, 778 p.
3. Hill A.A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a highly porous material, *Adv. Water Resour.*, 2009, vol. 32, no. 11, pp. 1609–1614.
4. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls, *J. Appl. Phys.*, 1953, vol. 24, pp. 1232–1235.
5. Tilton N., Cortelezzi L. Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls, *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 604, pp. 411–445.
6. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—I. Theoretical development, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1995, vol. 38, issue 14, pp. 2635–2646.
7. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—II. Comparison with experiment, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1995, vol. 38, issue 14, pp. 2647–2655.
8. Whitaker S. The Forchheimer equation: a theoretical development, *Transport Porous Med.*, 1996, vol. 25, pp. 27–61.
9. Beavers G.S., Joseph D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall, *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 30, no. 1, pp. 197–207.
10. Kolchanova E.A., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid, *Transport Porous Med.*, 2013, vol. 97, no. 1, pp. 25–42.
11. Govender S. Stability of solutal convection in a rotating mushy layer solidifying from a vertical surface, *Transport Porous Med.*, 2011, vol. 90, no. 2, pp. 393–402.
12. Lyubimov D.V., Muratov I.D. On convective instability of fluid in layered system, *Gidrodinamika (Hydrodynamics)*, Collection of papers, Perm: Perm State Pedagogical Institute, 1977, vol. 10, pp. 38–46 (in Russian).
13. Chen F., Chen C.F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer, *J. Heat Transfer*, 1988, vol. 110, no. 2, pp. 403–409.
14. Gavrilov K., Accary G., Morvan D., Lyubimov D., Méradji S., Bessonov O. Numerical simulation of coherent structures over plant canopy, *Flow Turbul. Combust.*, 2011, vol. 86, no. 1, pp. 89–111.
15. Ghisalberti M., Nepf H. The structure of the shear layer in flows over rigid and flexible canopies, *Environ. Fluid Mech.*, 2006, vol. 6, no. 3, pp. 277–301.
16. Aleshkova I.A., Sheremet M.A. Mathematical simulation of conjugate natural convection in a porous medium, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 2, pp. 49–56 (in Russian).
17. le Bars M., Worster M.G. Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification, *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 550, pp. 149–173.
18. Conte S.D. The numerical solution of linear boundary value problems, *SIAM Review*, 1966, vol. 8, no. 3, pp. 309–321.
19. Godunov S.K. Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961, vol. 16, no. 3 (99), pp. 171–174 (in Russian).
20. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Nepomnyashchii A.A. *Ustoichivost' konvektivnykh techenii (Stability of convective flows)*, Moscow: Nauka, 1989, 320 p.

Received 08.02.2015