УДК 519.651, 517.518.823

© *В. И. Родионов*

О ЛИНЕЙНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Решение краевой задачи для простейшего волнового уравнения, заданной в прямоугольнике, допускает представление в виде суммы двух слагаемых. Они являются решениями двух краевых задач: в первом случае граничные функции постоянны, а во втором начальные функции имеют специальный вид. Подобная декомпозиция позволяет применять для численного решения обеих задач двумерные сплайны. Первая задача исследована ранее, получен экономичный алгоритм ее численного решения.

Для решения второй задачи определено конечномерное пространство сплайнов лагранжевого типа, а в качестве решения предложен оптимальный сплайн, дающий наименьшую невязку. Для коэффициентов этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от исходных конечных разностей, заданных на границе.

Формула для невязки представляет собой сумму двух простых слагаемых и двух положительно определенных квадратичных форм от новых конечных разностей, заданных на границе. Элементы матриц форм выражаются через многочлены Чебышёва, обе матрицы обратимы и таковы, что обратные к ним матрицы имеют трехдиагональный вид. Эта особенность позволяет получить для спектра матриц верхние и нижние оценки и показать, что невязка стремится к нулю с ростом размерности численной задачи. Данное обстоятельство обеспечивает корректность предлагаемого алгоритма численного решения второй задачи, обладающего линейной сложностью вычислений.

Ключевые слова: волновое уравнение, интерполяция, аппроксимирующий сплайн, трехдиагональная матрица, многочлены Чебышёва.

Введение

Работа развивает авторский метод построения экономичных разностных схем для решения простейших задач математической физики и продолжает цикл публикаций [1–8].

Уравнение $\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{c}\mathrm{u}_{\xi\xi}$, заданное в прямоугольнике, заменой переменных приводится к виду $\mathrm{a}\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}$ (в терминах новых переменных из квадрата $\Pi \doteq [0,1]^2$). Пусть числа a, b — положительные, а непрерывные функции $\phi, \psi, \rho_0, \rho_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ таковы, что $\phi(0) = \rho_0(0)$, $\phi(1) = \rho_1(0)$ и существуют производные $\rho_0'(0), \rho_1'(0), \rho_0''(0), \rho_1''(0)$.

Решение $\mathrm{u} = \mathrm{u}(t,\xi)$ задачи

$$\begin{gathered}\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \phi(\xi), \quad \mathrm{u}_t(0,\xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [0,1], \\ \mathrm{u}(t,0) = \rho_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \rho_1(t), \quad t \in [0,1],\end{gathered}$$

представимо в виде $\mathrm{u} = \mathrm{u}^{(1)} + \mathrm{u}^{(2)}$, где $\mathrm{u}^{(1)} = \mathrm{u}^{(1)}(t,\xi)$, $\mathrm{u}^{(2)} = \mathrm{u}^{(2)}(t,\xi)$ — это решения задач

$$\begin{gathered}\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi), \quad \mathrm{u}_t(0,\xi) = \widehat{\psi}(\xi), \quad \xi \in [0,1], \\ \mathrm{u}(t,0) = \widehat{\rho}_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \widehat{\rho}_1(t), \quad t \in [0,1],\end{gathered} \tag{I}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt} = \mathrm{b}\,\mathrm{u}_{\xi\xi}, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \phi(\xi) - \widehat{\phi}(\xi), \quad \mathrm{u}_t(0,\xi) = \psi(\xi) - \widehat{\psi}(\xi), \quad \xi \in [0,1], \\ \mathrm{u}(t,0) = \rho_0(0), \quad \mathrm{u}(t,1) = \rho_1(0), \quad t \in [0,1],\end{gathered} \tag{II}$$

соответственно. Использованы обозначения $\widehat{\rho}_0(t) \doteq \rho_0(t) - \rho_0(0)$, $\widehat{\rho}_1(t) \doteq \rho_1(t) - \rho_1(0)$,

$$\widehat{\phi}(\xi) \doteq -\tfrac{\mathrm{a}}{6\mathrm{b}}\,\xi\,(1-\xi)\left[\rho_0''(0)\,(2-\xi) + \rho_1''(0)\,(1+\xi)\right], \qquad \widehat{\psi}(\xi) \doteq \rho_0'(0)\,(1-\xi) + \rho_1'(0)\,\xi.$$

(Выбор в пользу вспомогательных функций $\widehat{\phi}$ и $\widehat{\psi}$ обсуждается в § 4.) Задача (II) исследована в работах [5, 6] (получен экономичный алгоритм), а в настоящей работе мы предлагаем экономичный алгоритм численного решения задачи (I). В качестве ее решения предлагается использовать оптимальный сплайн задачи $\left\| \mathrm{a}u_{tt} - \mathrm{b}u_{\xi\xi} \right\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min$, $u \in \sigma(\Pi)$.

Через $\sigma(\Pi)$ обозначено пространство, состоящее из сплайнов (см. ниже), зависящих от коэффициентов u_1^i, u_2^i, $i = 3, \ldots, 2N$ (где N — это параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в квадрате Π. Пусть, далее, $n \doteq N-1$, $\tau \doteq \frac{1}{2N}$, $h \doteq \frac{1}{3}$, $\theta \doteq \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \frac{\tau^2}{h^2} = \frac{9\mathrm{b}}{4\mathrm{a}N^2}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Pi$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $h_j \doteq jh$, $j = 0, 1, 2, 3$.

§ 1. Постановка задачи построения оптимального аппроксимирующего сплайна

Массив (u_j^i), $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 0, 1, 2, 3$, называется *допустимым* для задачи (I), если:

1) $u_0^i = \widehat{\rho}_0(\tau_i)$, $u_3^i = \widehat{\rho}_1(\tau_i)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, 2N$;
2) $u_j^0 = \widehat{\phi}(h_j)$ для $j = 0, 1, 2, 3$ (в частности, $u_0^0 = u_3^0 = 0$);
3) $u_1^1 - u_1^0 = \frac{2}{3} u_0^1 + \frac{1}{3} u_3^1$; $u_2^1 - u_2^0 = \frac{1}{3} u_0^1 + \frac{2}{3} u_3^1$; $u_1^2 - u_1^0 = \frac{2}{3} u_0^2 + \frac{1}{3} u_3^2$; $u_2^2 - u_2^0 = \frac{1}{3} u_0^2 + \frac{2}{3} u_3^2$.

Одномерные интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\chi_\kappa(s) \doteq \prod_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha\neq\kappa}}^{2} \frac{s-\alpha}{\kappa-\alpha}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \kappa = 0, 1, 2; \qquad \omega_\kappa(\eta) \doteq \prod_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha\neq\kappa}}^{3} \frac{\eta-\alpha}{\kappa-\alpha}, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

(такие, что $\chi_\kappa(\mu) = \delta_{\kappa\mu}$ для всех $\kappa, \mu = 0, 1, 2$ и $\omega_\kappa(\mu) = \delta_{\kappa\mu}$ для всех $\kappa, \mu = 0, 1, 2, 3$), и допустимый массив (u_j^i), $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 0, 1, 2, 3$, порождают семейство полиномов

$$Q^k(s, \eta) \doteq \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} u_j^{2k-2+i} \chi_i(s)\, \omega_j(\eta), \quad s, \eta \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

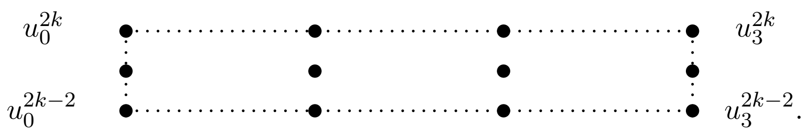
Пусть, далее, $P^k(t, \xi) \doteq Q^k(s, \eta)$, где $s \doteq \frac{t}{\tau} - 2k+2$, $\eta \doteq \frac{\xi}{h} = 3\xi$, то есть

$$P^k(t, \xi) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} u_j^{2k-2+i} \chi_i\big(\tfrac{t}{\tau} - 2k+2\big)\, \omega_j\big(\tfrac{\xi}{h}\big).$$

Очевидно, для всех $k = 1, \ldots, N$, $\ell = 0, 1, 2$ и $\mu = 0, 1, 2, 3$ справедлива цепочка равенств

$$Q^k(\ell, \mu) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} u_j^{2k-2+i} \prod_{\substack{\alpha=0 \\ \alpha\neq i}}^{2} \frac{\ell-\alpha}{i-\alpha} \prod_{\substack{\beta=0 \\ \beta\neq j}}^{3} \frac{\mu-\beta}{j-\beta} = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} u_j^{2k-2+i} \delta_{\ell i}\, \delta_{\mu j} = u_\mu^{2k-2+\ell},$$

следовательно, $P^k(\tau_{2k-2+i}, h_j) = P^k\big((2k-2+i)\tau, jh\big) = Q^k(i, j) = u_j^{2k-2+i}$ для всех $k = 1, \ldots, N$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2, 3$, то есть полином P^k является двумерным интерполяционным многочленом Лагранжа, определенным в 12 узлах полосы $\Pi^k \doteq \big\{(t, \xi) \in \Pi \colon \tau_{2k-2} \leqslant t \leqslant \tau_{2k},\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1\big\}$:



Таким образом, определена непрерывная функция $u \colon \Pi \to \mathbb{R}$ такая, что $u(t, \xi) = P^k(t, \xi)$, если $(t, \xi) \in \Pi^k$. Другими словами, допустимый массив (u_j^i), $i = 0, 1, \ldots, 2N$, $j = 0, 1, 2, 3$, порождает сплайн, который мы называем *аппроксимирующим*. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_1^i, u_2^i, $i = 3, \ldots, 2N$. Это означает, что аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное пространство размерности $4n$. Обозначим его $\sigma(\Pi) = \sigma_N(\Pi)$.

Определим оператор $D \colon \sigma(\Pi) \to \mathrm{L}_2(\Pi)$ следующим образом. Сплайн $u \in \sigma(\Pi)$ имеет все частные производные во всех точках множества Π, за исключением множества S меры нуль:

$$\mathrm{S} \doteq \Pi \cap \big\{(t, \xi) \colon t = \tau_{2k}\big\}_{k=1}^{n}.$$

Пусть $(Du)(t, \xi) \doteq 0$ во всех точках множества S, а в остальных точках квадрата Π полагаем $(Du)(t, \xi) \doteq \mathrm{a} u_{tt} - \mathrm{b} u_{\xi\xi}$. Таким образом, в качестве приближенного решения задачи (I) можно принять оптимальный аппроксимирующий сплайн $\overline{u} \in \sigma(\Pi)$ задачи

$$J \doteq \| Du \|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \qquad u \in \sigma_N(\Pi), \tag{1.2}$$

решение которой в конечном счете сводится к поиску чисел $\overline{u}_1^i$, $\overline{u}_2^i$, $i=3,\ldots,2N$, реализующих минимум J^* функционала и порождающих оптимальное решение $\overline{u}\in\sigma_N(\Pi)$.

Для функционала (1.2) справедлива цепочка равенств

$$J=\int_\Pi\big[\,\mathrm{a}u_{tt}-\mathrm{b}\,u_{\xi\xi}\big]^2dt\,d\xi=\sum_{k=1}^N\int_{\Pi^k}\big[\,\mathrm{a}P_{tt}^k-\mathrm{b}\,P_{\xi\xi}^k\big]^2dt\,d\xi=\sum_{k=1}^N\int_{\Pi^k}f_k^2(t,\xi)\,dt\,d\xi, \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}f_k(t,\xi)&\doteq\mathrm{a}P_{tt}^k(t,\xi)-\mathrm{b}\,P_{\xi\xi}^k(t,\xi)=\mathrm{a}\,\tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\,Q^k(s,\eta)-\mathrm{b}\,\tfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\,Q^k(s,\eta)=\\&=\frac{\mathrm{a}}{\tau^2}\,\sum_{i=0}^2\sum_{j=0}^3u_j^{2k-2+i}\,\chi_i''(s)\,\omega_j(\eta)-\frac{\mathrm{b}}{h^2}\,\sum_{i=0}^2\sum_{j=0}^3u_j^{2k-2+i}\,\chi_i(s)\,\omega_j''(\eta)=\\&=\frac{\mathrm{a}}{\tau^2}\,\sum_{i=0}^2\sum_{j=0}^3u_j^{2k-2+i}\,\Omega_{ij}(s,\eta).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь и далее используем обозначение $\Omega_{ij}\doteq\Omega_{ij}(s,\eta)\doteq\chi_i''(s)\,\omega_j(\eta)-\theta\,\chi_i(s)\,\omega_j''(\eta)$.

§ 2. Безынтегральная формула для функционала невязок

Всякий допустимый массив (u_j^i), $i=0,1,\ldots,2N$, $j=0,1,2,3$, порождает термы

$$x^i\doteq u_0^i-u_1^i-u_2^i+u_3^i,\qquad y^i\doteq u_0^i-3u_1^i+3u_2^i-u_3^i,\qquad i=0,1,\ldots,2N, \tag{2.1}$$

$$X^k\doteq x^{2k-2}-2x^{2k-1}+x^{2k},\qquad Y^k\doteq y^{2k-2}-2y^{2k-1}+y^{2k},\qquad k=1,\ldots,N, \tag{2.2}$$

и граничные элементы

$$\begin{aligned}&z^k\doteq\tfrac{1}{\theta}\big(u_0^{2k-2}-2u_0^{2k-1}+u_0^{2k}+u_3^{2k-2}-2u_3^{2k-1}+u_3^{2k}\big),\\&w^k\doteq\tfrac{1}{3\theta}\big(u_0^{2k-2}-2u_0^{2k-1}+u_0^{2k}-u_3^{2k-2}+2u_3^{2k-1}-u_3^{2k}\big),\qquad k=1,\ldots,N,\\&\xi^0\doteq x^0-z^1,\qquad \xi^1\doteq x^2-z^2,\qquad \xi^k\doteq z^k-z^{k+1},\qquad k=2,\ldots,n,\\&\eta^0\doteq y^0-w^1,\qquad \eta^1\doteq y^2-w^2,\qquad \eta^k\doteq w^k-w^{k+1},\qquad k=2,\ldots,n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Применяем также фиктивные элементы $z^{N+1}\doteq0$ и $w^{N+1}\doteq0$. Очевидно, величины x^0, x^1, x^2, y^0, y^1, y^2, X^1, Y^1 постоянны (не зависят от выбора аппроксимирующего сплайна $u\in\sigma_N(\Pi)$; см. определение допустимого массива или формулы (4.2)). В силу (2.1) справедливы равенства $u_1^i=\frac{1}{6}\big(4u_0^i-3x^i-y^i+2u_3^i\big)$, $u_2^i=\frac{1}{6}\big(2u_0^i-3x^i+y^i+4u_3^i\big)$, поэтому формула (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\tau^2}{\mathrm{a}}\,f_k(t,\xi)&=\sum_{i=0}^2u_0^{2k-2+i}\,\Omega_{i0}+\frac{1}{6}\,\sum_{i=0}^2\big[\,4u_0^{2k-2+i}-3x^{2k-2+i}-y^{2k-2+i}+2u_3^{2k-2+i}\big]\,\Omega_{i1}+\\&+\frac{1}{6}\,\sum_{i=0}^2\big[\,2u_0^{2k-2+i}-3x^{2k-2+i}+y^{2k-2+i}+4u_3^{2k-2+i}\big]\,\Omega_{i2}+\sum_{i=0}^2u_3^{2k-2+i}\,\Omega_{i3}=\\&=\sum_{i=0}^2u_0^{2k-2+i}\varphi_0^i+\sum_{i=0}^2x^{2k-2+i}\varphi_1^i+\sum_{i=0}^2y^{2k-2+i}\varphi_2^i+\sum_{i=0}^2u_3^{2k-2+i}\varphi_3^i,\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\varphi_0^i\doteq\Omega_{i0}+\frac{2}{3}\,\Omega_{i1}+\frac{1}{3}\,\Omega_{i2}$, $\varphi_1^i\doteq-\frac{1}{2}\,\Omega_{i1}-\frac{1}{2}\,\Omega_{i2}$, $\varphi_2^i\doteq-\frac{1}{6}\,\Omega_{i1}+\frac{1}{6}\,\Omega_{i2}$, $\varphi_3^i\doteq\frac{1}{3}\,\Omega_{i1}+\frac{2}{3}\,\Omega_{i2}+\Omega_{i3}$.
В силу (1.1) справедливы равенства

$$\omega_0(\eta)=-\tfrac{1}{6}\,(\eta^3-6\eta^2+11\eta-6),\quad \omega_1(\eta)=\tfrac{1}{2}\,(\eta^3-5\eta^2+6\eta),\quad \omega_2(\eta)=-\tfrac{1}{2}\,(\eta^3-4\eta^2+3\eta),$$

$$\omega_3(\eta)=\tfrac{1}{6}\,(\eta^3-3\eta^2+2\eta),\ \omega_0''(\eta)=-\eta+2,\ \omega_1''(\eta)=3\eta-5,\ \omega_2''(\eta)=-3\eta+4,\ \omega_3''(\eta)=\eta-1, \tag{2.5}$$

следовательно, из определения функций Ω_{ij} следует, что

$$\varphi_0^i = \chi_i''(s)\left[\omega_0(\eta) + \tfrac{2}{3}\,\omega_1(\eta) + \tfrac{1}{3}\,\omega_2(\eta)\right] - \theta\,\chi_i(s)\left[\omega_0''(\eta) + \tfrac{2}{3}\,\omega_1''(\eta) + \tfrac{1}{3}\,\omega_2''(\eta)\right] = \tfrac{1}{3}\,\chi_i''(s)\,(3-\eta),$$

$$\varphi_1^i = -\tfrac{1}{2}\,\chi_i''(s)\left[\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta)\right] + \tfrac{1}{2}\,\theta\,\chi_i(s)\left[\omega_1''(\eta) + \omega_2''(\eta)\right] = -\tfrac{1}{4}\,\chi_i''(s)\,\eta\,(3-\eta) - \tfrac{1}{2}\,\theta\,\chi_i(s),$$

$$\varphi_2^i = \tfrac{1}{6}\,\chi_i''(s)\left[-\,\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta)\right] - \tfrac{1}{6}\,\theta\,\chi_i(s)\left[-\,\omega_1''(\eta) + \omega_2''(\eta)\right] = \\ = -\tfrac{1}{12}\,\chi_i''(s)\,\eta\,(3-\eta)\,(3-2\eta) - \tfrac{1}{2}\,\theta\,\chi_i(s)\,(3-2\eta),$$

$$\varphi_3^i = \chi_i''(s)\left[\tfrac{1}{3}\,\omega_1(\eta) + \tfrac{2}{3}\,\omega_2(\eta) + \omega_3(\eta)\right] - \theta\,\chi_i(s)\left[\tfrac{1}{3}\,\omega_1''(\eta) + \tfrac{2}{3}\,\omega_2''(\eta) + \omega_3''(\eta)\right] = \tfrac{1}{3}\,\chi_i''(s)\,\eta.$$

Преобразуем первую и четвертую суммы формулы (2.4):

$$\sum_{i=0}^{2} u_0^{2k-2+i}\varphi_0^i = \tfrac{1}{3}\,(3-\eta)\sum_{i=0}^{2} u_0^{2k-2+i}\chi_i''(s) = \\ = \tfrac{1}{3}\,(3-\eta)\left[\,u_0^{2k-2} - 2\,u_0^{2k-1} + u_0^{2k}\right] = \tfrac{1}{6}\,\theta\,(3-\eta)\left[\,z^k + 3\,w^k\right],$$

$$\sum_{i=0}^{2} u_3^{2k-2+i}\varphi_3^i = \tfrac{1}{3}\,\eta\sum_{i=0}^{2} u_3^{2k-2+i}\chi_i''(s) = \tfrac{1}{3}\,\eta\left[\,u_3^{2k-2} - 2\,u_3^{2k-1} + u_3^{2k}\right] = \tfrac{1}{6}\,\theta\,\eta\left[\,z^k - 3\,w^k\right].$$

Воспользовались равенствами

$$\begin{gathered}\chi_0(s) = \tfrac{1}{2}\,(s^2 - 3s + 2), \quad \chi_1(s) = -s^2 + 2s, \quad \chi_2(s) = \tfrac{1}{2}\,(s^2 - s), \\ \chi_0''(s) = 1, \quad \chi_1''(s) = -2, \quad \chi_2''(s) = 1\end{gathered} \tag{2.6}$$

(см. формулы (1.1)). Таким образом, формула (2.4) принимает вид

$$\tfrac{\tau^2}{\mathrm{a}}\,f_k(t,\xi) = \tfrac{1}{2}\,\theta\,z^k + \tfrac{1}{2}\,\theta\,(3-2\eta)\,w^k + \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\varphi_1^i + \sum_{i=0}^{2} y^{2k-2+i}\varphi_2^i. \tag{2.7}$$

Обозначим суммы через σ_k^x и σ_k^y. Справедливо равенство $\sigma_k^x = -\frac{1}{4}\,\eta\,(3-\eta)\,\varsigma_0^x - \frac{1}{2}\,\theta\,\varsigma_1^x$, где

$$\varsigma_0^x \doteq \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\chi_i''(s) = x^{2k-2} - 2x^{2k-1} + x^{2k} = X^k,$$

$$\varsigma_1^x \doteq \sum_{i=0}^{2} x^{2k-2+i}\chi_i(s) = \tfrac{1}{2}\,(s^2 - 3s + 2)\,x^{2k-2} + \tfrac{1}{2}\,(-s^2 + 2s)\left[x^{2k-2} + x^{2k} - X^k\right] + \tfrac{1}{2}\,(s^2 - s)\,x^{2k} = \\ = \tfrac{1}{2}\,(2-s)\,x^{2k-2} + \tfrac{1}{2}\,s\,x^{2k} - \tfrac{1}{2}\,s\,(2-s)\,X^k.$$

(Для исключения величин x^{2k-1} воспользовались формулой (2.2).) Следовательно,

$$\sigma_k^x = -\tfrac{1}{4}\,\theta\,(2-s)\,x^{2k-2} - \tfrac{1}{4}\,\theta s\,x^{2k} - \tfrac{1}{4}\left[\,\eta\,(3-\eta) - \theta s\,(2-s)\right]X^k.$$

Аналогично, имеет место равенство $\sigma_k^y = -\frac{1}{12}\,\eta\,(3-\eta)\,(3-2\eta)\,\varsigma_0^y - \frac{1}{2}\,\theta\,(3-2\eta)\,\varsigma_1^y$, где

$$\varsigma_0^y \doteq \sum_{i=0}^{2} y^{2k-2+i}\chi_i''(s) = Y^k, \qquad \varsigma_1^y \doteq \sum_{i=0}^{2} y^{2k-2+i}\chi_i(s) = \tfrac{1}{2}\,(2-s)\,y^{2k-2} + \tfrac{1}{2}\,s\,y^{2k} - \tfrac{1}{2}\,s\,(2-s)\,Y^k.$$

(Вывод формул для ς_0^y и ς_1^y дословно повторяет вывод формул для ς_0^x и ς_1^x.) Следовательно,

$$\sigma_k^y = -\tfrac{1}{4}\,\theta\,(2-s)\,(3-2\eta)\,y^{2k-2} - \tfrac{1}{4}\,\theta s\,(3-2\eta)\,y^{2k} - \tfrac{1}{4}\left[\,\tfrac{1}{3}\,\eta\,(3-\eta)\,(3-2\eta) - \theta s\,(2-s)\,(3-2\eta)\right]Y^k,$$

а формула (2.7) принимает вид $f_k(t,\xi) = \frac{\mathrm{a}}{\tau^2}\,F_k(u,v)$, где

$$F_k(u,v) \doteq \tfrac{1}{2}\,\theta\,z^k - \tfrac{3}{2}\,\theta\,v\,w^k - \tfrac{1}{4}\,\theta\,(1-u)\,x^{2k-2} - \tfrac{1}{4}\,\theta\,(1+u)\,x^{2k} - \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{9}{4}\,(1-v^2) - \theta\,(1-u^2)\right]X^k +$$

$$+\tfrac{3}{4}\,\theta\,(1-u)\,v\,y^{2k-2}+\tfrac{3}{4}\,\theta\,(1+u)\,v\,y^{2k}+\tfrac{3}{4}\,v\left[\tfrac{3}{4}\,(1-v^2)-\theta\,(1-u^2)\right]Y^k.$$

(Ввели переменные $u\doteq s-1$, $v\doteq\frac{2}{3}\,\eta-1$. Поскольку $s=\frac{t}{\tau}-2k+2$, $\eta=3\xi$, то $u=\frac{t}{\tau}-2k+1$, $v=2\xi-1$.) Следовательно, для функционала (1.3) имеет место равенство $J=\sum\limits_{k=1}^{N}J^k$, где

$$J^k\doteq\int_{\Pi^k}f_k^2(t,\xi)\,dt\,d\xi=\frac{\mathrm{a}^2}{\tau^4}\int_{(2k-2)\tau}^{2k\tau}\int_0^1F_k^2(u,v)\,dt\,d\xi=\frac{\mathrm{a}^2}{2\tau^3}\int_{-1}^1\int_{-1}^1F_k^2(u,v)\,du\,dv.$$

Справедливо представление $F_k(u,v)=\frac{1}{4}\left[-F_{k1}(u,v)+u\,F_{k2}+3v\,F_{k3}(u,v)-3uv\,F_{k4}\right]$, где

$$F_{k1}(u,v)\doteq\theta\left[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\right]+\left[\tfrac{9}{4}\,(1-v^2)-\theta\,(1-u^2)\right]X^k,\qquad F_{k2}\doteq\theta\left[x^{2k-2}-x^{2k}\right],$$

$$F_{k3}(u,v)\doteq\theta\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\right]+\left[\tfrac{3}{4}\,(1-v^2)-\theta\,(1-u^2)\right]Y^k,\qquad F_{k4}\doteq\theta\left[y^{2k-2}-y^{2k}\right],$$

причем полиномы $F_{k1}(u,v)$ и $F_{k3}(u,v)$ — четные функции по обеим переменным, значит,

$$\begin{aligned}\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,J^k&=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\Big[-F_{k1}(u,v)+u\,F_{k2}+3v\,F_{k3}(u,v)-3uv\,F_{k4}\Big]^2du\,dv=\\&=\int_{-1}^1\int_{-1}^1\Big[F_{k1}^2(u,v)+u^2F_{k2}^2+9v^2F_{k3}^2(u,v)+9u^2v^2F_{k4}^2\Big]\,du\,dv=\\&=4\theta^2\left[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\right]^2+\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\left[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\right]X^k+\\&\quad+\tfrac{2}{15}\,(81-60\theta+16\theta^2)\left[X^k\right]^2+\tfrac{4}{3}\theta^2\left[x^{2k-2}-x^{2k}\right]^2+\\&\quad+12\theta^2\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\right]^2+\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\right]Y^k+\\&\quad+\tfrac{2}{35}\,(27-84\theta+112\theta^2)\left[Y^k\right]^2+4\theta^2\left[y^{2k-2}-y^{2k}\right]^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Так как $J=\sum\limits_{k=1}^{N}J^k$, то в итоге мы получили безынтегральное представление для функционала (1.3) (значит, и для функционала (1.2)). Теперь он является квадратичной формой от величин (2.1)–(2.3) (исключая величины вида x^{2k-1} и y^{2k-1} и все ξ^k, η^k).

Поскольку величины x^0, x^1, x^2, y^0, y^1, y^2, X^1, Y^1 постоянны (см. комментарии к формулам (2.1)–(2.3)), а термы (2.3), входящие в формулу (2.8), тоже постоянны (как граничные элементы), то функционал в конечном счете является квадратичной функцией от переменных x^{2k}, X^k, y^{2k}, Y^k, $k=2,\ldots,N$ (определен в пространстве $\mathbb{R}^{4n}$). Для нахождения минимума функционала необходимо вычислить его частные производные.

§ 3. Частные производные функционала невязок

Для любого $k=2,\ldots,N$ справедливо

$$\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J}{\partial X^k}=\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J^k}{\partial X^k}=\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\left[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\right]+\tfrac{4}{15}\,(81-60\theta+16\theta^2)\,X^k,\tag{3.1}$$

$$\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J}{\partial Y^k}=\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J^k}{\partial Y^k}=\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\right]+\tfrac{4}{35}\,(27-84\theta+112\theta^2)\,Y^k.\tag{3.2}$$

Для любого $k=2,\ldots,n$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J}{\partial x^{2k}}&=\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\left[\frac{\partial J^k}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial J^{k+1}}{\partial x^{2k}}\right]=8\theta^2\left[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\right]+\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\,X^k-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\left[x^{2k-2}-x^{2k}\right]+\\&\quad+8\theta^2\left[x^{2k}+x^{2k+2}-2\,z^{k+1}\right]+\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\,X^{k+1}+\tfrac{8}{3}\,\theta^2\left[x^{2k}-x^{2k+2}\right],\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J}{\partial y^{2k}}&=\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\left[\frac{\partial J^k}{\partial y^{2k}}+\frac{\partial J^{k+1}}{\partial y^{2k}}\right]=24\theta^2\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\right]+\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\,Y^k-8\theta^2\left[y^{2k-2}-y^{2k}\right]+\\&\quad+24\theta^2\left[y^{2k}+y^{2k+2}-2\,w^{k+1}\right]+\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\,Y^{k+1}+8\theta^2\left[y^{2k}-y^{2k+2}\right].\end{aligned}\tag{3.4}$$

Наконец,

$$\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J}{\partial x^{2N}}=\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J^N}{\partial x^{2N}}=8\theta^2\big[x^{2n}+x^{2N}-2\,z^N\big]+\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\,X^N-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2n}-x^{2N}\big],\qquad(3.5)$$

$$\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J}{\partial y^{2N}}=\frac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,\frac{\partial J^N}{\partial y^{2N}}=24\theta^2\big[y^{2n}+y^{2N}-2\,w^N\big]+\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\,Y^N-8\theta^2\big[y^{2n}-y^{2N}\big].\qquad(3.6)$$

§ 4. Поведение аппроксимирующих сплайнов в первой полосе

Остановимся на вопросе реализации начальных условий $\mathrm{u}(0,\xi)=\widehat{\phi}(\xi)$ и $\mathrm{u}_t(0,\xi)=\widehat{\psi}(\xi)$ сплайнами $u\in\sigma_N(\Pi)$. К этим условиям имеют отношение лишь полоса Π^1 и определенный на ней многочлен

$$P^1(t,\xi)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}u_j^i\,\chi_i\big(\tfrac{t}{\tau}\big)\,\omega_j\big(\tfrac{\xi}{h}\big)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}u_j^i\,\chi_i(s)\,\omega_j(\eta).$$

В силу формул (2.6) и (2.5) справедлива цепочка равенств

$$P^1(0,\xi)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}u_j^i\,\chi_i(0)\,\omega_j(\eta)=\sum_{j=0}^{3}u_j^0\,\omega_j(\eta)=\sum_{j=0}^{3}\widehat{\phi}(h_j)\,\omega_j(\eta)=\widehat{\phi}(h_1)\,\omega_1(\eta)+\widehat{\phi}(h_2)\,\omega_2(\eta)=$$
$$=\widehat{\phi}(\tfrac{1}{3})\,\omega_1(\eta)+\widehat{\phi}(\tfrac{2}{3})\,\omega_2(\eta)=-\tfrac{\mathrm{a}}{81\mathrm{b}}\big[5\rho_0''(0)+4\rho_1''(0)\big]\,\omega_1(\eta)-\tfrac{\mathrm{a}}{81\mathrm{b}}\big[4\rho_0''(0)+5\rho_1''(0)\big]\,\omega_2(\eta)=$$
$$=-\tfrac{\mathrm{a}}{81\mathrm{b}}\,\rho_0''(0)\,\big[5\,\omega_1(\eta)+4\omega_2(\eta)\big]-\tfrac{\mathrm{a}}{81\mathrm{b}}\,\rho_1''(0)\,\big[4\omega_1(\eta)+5\,\omega_2(\eta)\big]=$$
$$=-\tfrac{\mathrm{a}}{81\mathrm{b}}\,\rho_0''(0)\cdot\tfrac{1}{2}\,\eta\,(3-\eta)\,(6-\eta)-\tfrac{\mathrm{a}}{81\mathrm{b}}\,\rho_1''(0)\cdot\tfrac{1}{2}\,\eta\,(3-\eta)\,(3+\eta)=$$
$$=-\tfrac{\mathrm{a}}{6\mathrm{b}}\,\rho_0''(0)\,\xi\,(1-\xi)\,(2-\xi)-\tfrac{\mathrm{a}}{6\mathrm{b}}\,\rho_1''(0)\,\xi\,(1-\xi)\,(1+\xi)=\widehat{\phi}(\xi).$$

Значит, всякий аппроксимирующий сплайн удовлетворяет начальному условию $\mathrm{u}(0,\xi)=\widehat{\phi}(\xi)$.

В силу (2.6) имеет место цепочка равенств

$$\frac{\partial P^1}{\partial t}(0,\xi)=\frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}u_j^i\,\chi_i'(0)\,\omega_j(\eta)=\frac{1}{2\tau}\sum_{j=0}^{3}\big(-3u_j^0+4u_j^1-u_j^2\big)\,\omega_j(\eta)=\frac{1}{2\tau}\sum_{j=0}^{3}\sigma_j\,\omega_j(\eta),$$

где $\sigma_j\doteq-3u_j^0+4u_j^1-u_j^2$. Из уравнений связи в определении допустимых массивов справедливо

$$\sigma_1=-3u_1^0+4\left(u_1^0+\tfrac{2}{3}\,u_0^1+\tfrac{1}{3}\,u_3^1\right)-u_1^0-\tfrac{2}{3}\,u_0^2-\tfrac{1}{3}\,u_3^2=\tfrac{2}{3}\left(4u_0^1-u_0^2\right)+\tfrac{1}{3}\left(4u_3^1-u_3^2\right)=\tfrac{2}{3}\,\sigma_0+\tfrac{1}{3}\,\sigma_3,$$
$$\sigma_2=-3u_2^0+4\left(u_2^0+\tfrac{1}{3}\,u_0^1+\tfrac{2}{3}\,u_3^1\right)-u_2^0-\tfrac{1}{3}\,u_0^2-\tfrac{2}{3}\,u_3^2=\tfrac{1}{3}\left(4u_0^1-u_0^2\right)+\tfrac{2}{3}\left(4u_3^1-u_3^2\right)=\tfrac{1}{3}\,\sigma_0+\tfrac{2}{3}\,\sigma_3,$$

следовательно, функция

$$P_t^1(0,\xi)=\tfrac{1}{2\tau}\,\sigma_0\,\big[\omega_0(\eta)+\tfrac{2}{3}\,\omega_1(\eta)+\tfrac{1}{3}\,\omega_2(\eta)\big]+\tfrac{1}{2\tau}\,\sigma_3\,\big[\tfrac{1}{3}\,\omega_1(\eta)+\tfrac{2}{3}\,\omega_2(\eta)+\omega_3(\eta)\big]=$$
$$=\tfrac{1}{6\tau}\,\sigma_0\,(3-\eta)+\tfrac{1}{6\tau}\,\sigma_3\,\eta=\tfrac{1}{2\tau}\,\sigma_0\,(1-\xi)+\tfrac{1}{2\tau}\,\sigma_3\,\xi=\tfrac{1}{\tau}\,\big[2u_0^1-\tfrac{1}{2}\,u_0^2\big]\,(1-\xi)+\tfrac{1}{\tau}\,\big[2u_3^1-\tfrac{1}{2}\,u_3^2\big]\,\xi$$

линейна. Предположим, что $\rho_0,\rho_1\in\mathrm{C}^3[0,1]$, тогда $\widehat{\rho}_0,\widehat{\rho}_1\in\mathrm{C}^3[0,1]$. Так как $\widehat{\rho}_0(0)=\widehat{\rho}_1(0)=0$, то в силу формулы Тейлора и определения допустимых массивов справедливо

$$\widehat{\rho}_\iota(t)=\rho_\iota'(0)t+\tfrac{1}{2}\,\rho_\iota''(0)t^2+O(t^3),\qquad t\to0,\qquad \iota=0,1,\qquad(4.1)$$

$$\tfrac{1}{\tau}\,\big[2u_0^1-\tfrac{1}{2}\,u_0^2\big]=\tfrac{1}{\tau}\,\big[2\,\widehat{\rho}_0(\tau)-\tfrac{1}{2}\,\widehat{\rho}_0(2\tau)\big]=\rho_0'(0)+O(\tau^2),\qquad\tau\to0,$$
$$\tfrac{1}{\tau}\,\big[2u_3^1-\tfrac{1}{2}\,u_3^2\big]=\tfrac{1}{\tau}\,\big[2\,\widehat{\rho}_1(\tau)-\tfrac{1}{2}\,\widehat{\rho}_1(2\tau)\big]=\rho_1'(0)+O(\tau^2),\qquad\tau\to0.$$

Следовательно, при $N\to\infty$ справедлива равномерная по $\xi\in[0,1]$ оценка

$$P_t^1(0,\xi)-\widehat{\psi}(\xi)=\Big(\tfrac{1}{\tau}\,\big[2u_0^1-\tfrac{1}{2}\,u_0^2\big]-\rho_0'(0)\Big)\,(1-\xi)+\Big(\tfrac{1}{\tau}\,\big[2u_3^1-\tfrac{1}{2}\,u_3^2\big]-\rho_1'(0)\Big)\,\xi=O(N^{-2}),$$

то есть всякий аппроксимирующий сплайн удовлетворяет начальному условию $\mathrm{u}_t(0,\xi)=\widehat{\psi}(\xi)$ с весьма приемлемой точностью.

В силу (2.1) и уравнений связи в определении допустимых массивов справедливы равенства

$$\begin{gathered}
x^0=u_0^0-u_1^0-u_2^0+u_3^0=-u_1^0-u_2^0=-\widehat{\phi}(\tfrac{1}{3})-\widehat{\phi}(\tfrac{2}{3})=\\
=\tfrac{\mathrm{a}}{9\mathrm{b}}\left[\rho_0''(0)+\rho_1''(0)\right]=\tfrac{\tau^2}{\theta}\left[\rho_0''(0)+\rho_1''(0)\right],\\
y^0=u_0^0-3\,u_1^0+3\,u_2^0-u_3^0=-3u_1^0+3u_2^0=-3\,\widehat{\phi}(\tfrac{1}{3})+3\,\widehat{\phi}(\tfrac{2}{3})=\\
=\tfrac{\mathrm{a}}{27\mathrm{b}}\left[\rho_0''(0)-\rho_1''(0)\right]=\tfrac{\tau^2}{3\theta}\left[\rho_0''(0)-\rho_1''(0)\right],\\
x^1=u_0^1-u_1^1-u_2^1+u_3^1=u_0^1-\left(u_1^0+\tfrac{2}{3}\,u_0^1+\tfrac{1}{3}\,u_3^1\right)-\\
-\left(u_2^0+\tfrac{1}{3}\,u_0^1+\tfrac{2}{3}\,u_3^1\right)+u_3^1=-u_1^0-u_2^0=x^0,\\
x^2=u_0^2-u_1^2-u_2^2+u_3^2=u_0^2-\left(u_1^0+\tfrac{2}{3}\,u_0^2+\tfrac{1}{3}\,u_3^2\right)-\\
-\left(u_2^0+\tfrac{1}{3}\,u_0^2+\tfrac{2}{3}\,u_3^2\right)+u_3^2=-u_1^0-u_2^0=x^0,\\
y^1=u_0^1-3u_1^1+3u_2^1-u_3^1=u_0^1-3\left(u_1^0+\tfrac{2}{3}\,u_0^1+\tfrac{1}{3}\,u_3^1\right)+\\
+3\left(u_2^0+\tfrac{1}{3}\,u_0^1+\tfrac{2}{3}\,u_3^1\right)-u_3^1=-3u_1^0+3u_2^0=y^0,\\
y^2=u_0^2-3u_1^2+3u_2^2-u_3^2=u_0^2-3\left(u_1^0+\tfrac{2}{3}\,u_0^2+\tfrac{1}{3}\,u_3^2\right)+\\
+3\left(u_2^0+\tfrac{1}{3}\,u_0^2+\tfrac{2}{3}\,u_3^2\right)-u_3^2=-3u_1^0+3u_2^0=y^0,
\end{gathered}\tag{4.2}$$

а в силу (2.2) имеем $X^1=0,\ Y^1=0$. Следовательно, формула (2.8) при $k=1$ принимает вид

$$\begin{gathered}
\tfrac{32\tau^3}{\mathrm{a}^2}\,J^1=4\theta^2\left[2x^0-2z^1\right]^2+12\theta^2\left[2y^0-2w^1\right]^2=\\
=16\left(\tau^2\left[\rho_0''(0)+\rho_1''(0)\right]-\left[u_0^0-2u_0^1+u_0^2+u_3^0-2u_3^1+u_3^2\right]\right)^2+\\
+\tfrac{16}{3}\left(\tau^2\left[\rho_0''(0)-\rho_1''(0)\right]-\left[u_0^0-2u_0^1+u_0^2-u_3^0+2u_3^1-u_3^2\right]\right)^2.
\end{gathered}\tag{4.3}$$

Поскольку $u_0^0=0,\ u_0^1=\widehat{\rho}_0(\tau),\ u_0^2=\widehat{\rho}_0(2\tau),\ u_3^0=0,\ u_3^1=\widehat{\rho}_1(\tau),\ u_3^2=\widehat{\rho}_1(2\tau)$, то в соответствии с (4.1) оба слагаемых, входящих в (4.3), равны $O(\tau^6)$, следовательно, $J^1=O(\tau^3)=O(N^{-3})$.

Таким образом, для любого аппроксимирующего сплайна $u\in\sigma_N(\Pi)$ имеют место равенства

$$u(0,\xi)=\widehat{\phi}(\xi),\qquad u_t(0,\xi)=\widehat{\psi}(\xi)+O(N^{-2}),\qquad J^1=\int_{\Pi^1}\left[\mathrm{a}u_{tt}-\mathrm{b}u_{\xi\xi}\right]^2dt\,d\xi=O(N^{-3}).$$

§ 5. Система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

Далее полагаем, что $\theta<\frac{1}{36}$, то есть $N>9\sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}$. Тогда определены числа

$$\begin{gathered}
\alpha\doteq\frac{1}{2}\,\frac{81+16\theta^2}{81-60\theta+16\theta^2},\qquad\gamma\doteq\frac{2\theta\,(3-\alpha)}{9-4\theta}=\frac{5\theta\,(9-4\theta)}{81-60\theta+16\theta^2},\qquad\mathrm{y}\doteq-\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}<-3,\\
\beta\doteq\frac{1}{10}\,\frac{243+560\theta^2}{27-84\theta+112\theta^2},\qquad\delta\doteq\frac{10\theta\,(3-\beta)}{9-20\theta}=\frac{7\theta\,(9-20\theta)}{27-84\theta+112\theta^2},\qquad\mathrm{x}\doteq-\,\frac{1+\beta}{1-\beta}<-19.
\end{gathered}\tag{5.1}$$

Действительно, легко проверить, что

$$1-\alpha=\frac{1}{2}\,\frac{81-120\theta+16\theta^2}{81-60\theta+16\theta^2}>0,\qquad 1-\beta=\frac{1}{10}\,\frac{27-840\theta+560\theta^2}{27-84\theta+112\theta^2}>0,$$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-3=\frac{2}{1-\alpha}\,(2\alpha-1)=\frac{2}{1-\alpha}\Big(\frac{81+16\theta^2}{81-60\theta+16\theta^2}-1\Big)=\frac{2}{1-\alpha}\ \frac{60\theta}{81-60\theta+16\theta^2}>0,$$

$$\frac{1+\beta}{1-\beta}-19=\frac{2}{1-\beta}\,(10\beta-9)=\frac{2}{1-\beta}\Big(\frac{243+560\theta^2}{27-84\theta+112\theta^2}-9\Big)=\frac{2}{1-\beta}\;\frac{756\theta-448\theta^2}{27-84\theta+112\theta^2}>0.$$

Приравняем производные (3.1) и (3.2) нулю, тогда для всех $k=2,\ldots,N$ справедливы равенства

$$X^k=-\gamma\,\big[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\big],\qquad Y^k=-\delta\,\big[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\big]. \tag{5.2}$$

Если $\partial J/\partial x^{2k}=0,\ k=2,\ldots,n,$ то в силу (3.3) и (5.2) имеет место равенство

$$0=8\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\big]-\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\,\gamma\,\big[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2k-2}-x^{2k}\big]+$$
$$+\,8\theta^2\big[x^{2k}+x^{2k+2}-2\,z^{k+1}\big]-\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\,\gamma\,\big[x^{2k}+x^{2k+2}-2\,z^{k+1}\big]+\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2k}-x^{2k+2}\big],$$

а в силу определения (5.1) для числа γ имеем

$$0=8\theta^2\big[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2(3-\alpha)\big[x^{2k-2}+x^{2k}-2\,z^k\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2k-2}-x^{2k}\big]+$$
$$+\,8\theta^2\big[x^{2k}+x^{2k+2}-2\,z^{k+1}\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2(3-\alpha)\big[x^{2k}+x^{2k+2}-2\,z^{k+1}\big]+\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2k}-x^{2k+2}\big]=$$
$$=-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[(1-\alpha)\,x^{2k-2}-2\,(1+\alpha)\,x^{2k}+(1-\alpha)\,x^{2k+2}+2\alpha\,z^k+2\alpha\,z^{k+1}\big].$$

Значит,

$$x^{2k-2}+2\mathrm{y}\,x^{2k}+x^{2k+2}=v^k,\qquad k=2,\ldots,n, \tag{5.3}$$

где

$$v^k\doteq(1+\mathrm{y})\,\big[z^k+z^{k+1}\big],\qquad k=2,\ldots,N. \tag{5.4}$$

(Воспользовались определением (5.1) числа y и очевидным равенством $1+\mathrm{y}=-2\alpha/(1-\alpha)$.)

Если $\partial J/\partial y^{2k}=0,\ k=2,\ldots,n,$ то в силу (3.4) и (5.2) имеет место равенство

$$0=24\theta^2\big[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\big]-\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\,\delta\,\big[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\big]-8\theta^2\big[y^{2k-2}-y^{2k}\big]+$$
$$+\,24\theta^2\big[y^{2k}+y^{2k+2}-2\,w^{k+1}\big]-\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\,\delta\,\big[y^{2k}+y^{2k+2}-2\,w^{k+1}\big]+8\theta^2\big[y^{2k}-y^{2k+2}\big],$$

а в силу определения (5.1) для числа δ имеем

$$0=24\theta^2\big[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\big]-8\theta^2(3-\beta)\big[y^{2k-2}+y^{2k}-2\,w^k\big]-8\theta^2\big[y^{2k-2}-y^{2k}\big]+$$
$$+\,24\theta^2\big[y^{2k}+y^{2k+2}-2\,w^{k+1}\big]-8\theta^2(3-\beta)\big[y^{2k}+y^{2k+2}-2\,w^{k+1}\big]+8\theta^2\big[y^{2k}-y^{2k+2}\big]=$$
$$=-8\theta^2\big[(1-\beta)\,y^{2k-2}-2\,(1+\beta)\,y^{2k}+(1-\beta)\,y^{2k+2}+2\beta\,w^k+2\beta\,w^{k+1}\big].$$

Значит,

$$y^{2k-2}+2\mathrm{x}\,y^{2k}+y^{2k+2}=\vartheta^k,\qquad k=2,\ldots,n, \tag{5.5}$$

где

$$\vartheta^k\doteq(1+\mathrm{x})\,\big[w^k+w^{k+1}\big],\qquad k=2,\ldots,N. \tag{5.6}$$

(Воспользовались определением (5.1) числа x и очевидным равенством $1+\mathrm{x}=-2\beta/(1-\beta)$.)

Если $\partial J/\partial x^{2N}=0$, то в силу (3.5) и (5.2) имеет место цепочка равенств

$$0=8\theta^2\big[x^{2n}+x^{2N}-2\,z^N\big]-\tfrac{4}{3}\,\theta\,(9-4\theta)\,\gamma\,\big[x^{2n}+x^{2N}-2\,z^N\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2n}-x^{2N}\big]=$$
$$=8\theta^2\big[x^{2n}+x^{2N}-2\,z^N\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2(3-\alpha)\big[x^{2n}+x^{2N}-2\,z^N\big]-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[x^{2n}-x^{2N}\big]=$$
$$=-\tfrac{8}{3}\,\theta^2\big[(1-\alpha)\,x^{2n}-(1+\alpha)\,x^{2N}+2\alpha\,z^N\big].$$

Значит,

$$x^{2n}+\mathrm{y}\,x^{2N}=v^N. \tag{5.7}$$

Наконец, если $\partial J/\partial y^{2N}=0$, то в силу (3.6) и (5.2) справедливо

$$0=24\theta^2\big[y^{2n}+y^{2N}-2\,w^N\big]-\tfrac{4}{5}\,\theta\,(9-20\theta)\,\delta\,\big[y^{2n}+y^{2N}-2\,w^N\big]-8\theta^2\big[y^{2n}-y^{2N}\big]=$$
$$=24\theta^2\big[y^{2n}+y^{2N}-2\,w^N\big]-8\theta^2(3-\beta)\big[y^{2n}+y^{2N}-2\,w^N\big]-8\theta^2\big[y^{2n}-y^{2N}\big]=$$
$$=-8\theta^2\big[(1-\beta)\,y^{2n}-(1+\beta)\,y^{2N}+2\beta\,w^N\big].$$

Значит,

$$y^{2n}+\mathrm{x}y^{2N}=\vartheta^N. \tag{5.8}$$

(В формулах (5.7) и (5.8) мы используем величины v^N и ϑ^N, определенные в (5.4) и (5.6) и порожденные фиктивными элементами $z^{N+1}=0$ и $w^{N+1}=0$, определенными в (2.3).)

Итак, формулы (5.2), (5.3), (5.5), (5.7) и (5.8) порождают итоговую разностную схему

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{ll} x^{2k-2}+2\mathrm{y}\,x^{2k}+x^{2k+2}=v^k, & k=2,\ldots,n, \\ x^{2n}+\mathrm{y}\,x^{2N}=v^N, & \end{array}\right. \\
&\quad X^k=\gamma\left[\,2z^k-x^{2k-2}-x^{2k}\right], \qquad k=2,\ldots,N, \\
&\left\{\begin{array}{ll} y^{2k-2}+2\mathrm{x}y^{2k}+y^{2k+2}=\vartheta^k, & k=2,\ldots,n, \\ y^{2n}+\mathrm{x}y^{2N}=\vartheta^N, & \end{array}\right. \\
&\quad Y^k=\delta\left[\,2w^k-y^{2k-2}-y^{2k}\right], \qquad k=2,\ldots,N.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Первая совокупность уравнений (5.9) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида x^{2m}, причем величина x^2 постоянна. Матрица системы имеет трехдиагональный вид с доминирующей диагональю (так как $|\mathrm{y}|>3$, см. (5.1)), следовательно, система имеет единственное решение, которое легко найти методом прогонки. После этого из второй совокупности уравнений (5.9) явно вычисляются все значения X^k. Аналогично решаются третья (где $|\mathrm{x}|>19$) и четвертая системы (5.9). Полученные значения позволяют в конечном счете найти искомые величины $\overline{u}_1^i$, $\overline{u}_2^i$, $i=3,\ldots,2N$, см. (2.1), (2.2). Ниже мы установим, что для решений первой и третьей систем справедливы явные формулы (6.5), (6.6).

Метод прогонки имеет линейную сложность вычислений и, безусловно, наиболее эффективен в прикладной реализации. Однако явные формулы (6.5), (6.6) имеют важное теоретическое значение: они позволяет в явном виде получить минимальное значение J^* функционала (1.2) (см. формулу (7.6)) и показать, что в случае гладких граничных функций имеет место равенство $J^*=O(N^{-2})$. Тем самым разностная схема (5.9) приобретает «легитимный» статус: найдется аппроксимирующий сплайн, сколь угодно близкий к точному решению задачи (I). Эти исследования и составляют оставшуюся часть настоящей работы.

§ 6. Вспомогательные утверждения о многочленах Чебышёва

Совокупность $\{U_n(x),\, x\in\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, состоящую из многочленов Чебышёва 2-го рода, определяем рекурсивно: $U_{-1}(x)\doteq 0$, $U_0(x)\doteq 1$, $U_{n-1}(x)+U_{n+1}(x)=2x\,U_n(x)$.

Пусть числа $a,b,x\in\mathbb{R}$ таковы, что $a+b=2x$. Они порождают матрицы $\overline{A}(x)=\big(\overline{A}_{ki}(x)\big)$ и $\overline{B}(x)=\big(\overline{B}_{ki}(x)\big)$, $k,i=0,1,\ldots,n-1$, порядка n такие, что

$$
\overline{A}_{ki}(x)\doteq\left\{\begin{array}{ll} a, & \text{если } (k,i)=(0,0), \\ \delta_{k,i+1}+2x\,\delta_{ki}+\delta_{k,i-1}, & \text{если } (k,i)\neq(0,0), \end{array}\right.
$$

$$
\overline{B}_{ki}(x)\doteq(-1)^{k+i}\left\{\begin{array}{ll} \big[U_k(x)-b\,U_{k-1}(x)\big]\,U_{n-1-i}(x), & \text{если } k\leqslant i, \\ U_{n-1-k}(x)\,\big[U_i(x)-b\,U_{i-1}(x)\big], & \text{если } k\geqslant i. \end{array}\right.
$$

Теорема 1 (см. [3, теорема 2]). *Если E — единичная матрица порядка n с элементами $E_{ki}\doteq\delta_{ki}$, $k,i=0,1,\ldots,n-1$, то $\overline{A}(x)\,\overline{B}(x)=\big[U_n(x)-b\,U_{n-1}(x)\,\big]\,E=\overline{B}(x)\,\overline{A}(x)$.*

В частном случае $a=b=x$ справедливо $U_k(x)-x\,U_{k-1}(x)=T_k(x)$, где $T_k(x)$ — многочлен Чебышёва 1-го рода (равенство имеет место в силу тождества $2\,T_k(x)=U_k(x)-U_{k-2}(x)$, см., например, [9, с. 67]). (Известно также, что $T_{k-1}(x)+T_{k+1}(x)=2x\,T_k(x)$.) В этом случае представление для матрицы $\overline{A}(x)$ очевидно $\big(\overline{A}_{00}(x)=x\big)$, а для матрицы $\overline{B}(x)$ имеем

$$
\overline{B}_{ki}(x)\doteq(-1)^{k+i}\left\{\begin{array}{ll} T_k(x)\,U_{n-1-i}(x), & \text{если } k\leqslant i, \\ U_{n-1-k}(x)\,T_i(x), & \text{если } k\geqslant i. \end{array}\right.
$$

Если $\delta_{ki}^{\geqslant}$ — символ Кронекера такой, что $\delta_{ki}^{\geqslant}=0$ при $k<i$ и $\delta_{ki}^{\geqslant}=1$ при $k\geqslant i$, то, очевидно,

$$
\overline{B}_{ki}(x)=(-1)^{k+i}\left[\delta_{ik}^{\geqslant}\,T_k(x)\,U_{n-1-i}(x)+\delta_{k-1,i}^{\geqslant}\,U_{n-1-k}(x)\,T_i(x)\right], \tag{6.1}
$$

$$
\overline{B}_{ki}(x)=(-1)^{k+i}\left[\delta_{i-1,k}^{\geqslant}\,T_k(x)\,U_{n-1-i}(x)+\delta_{ki}^{\geqslant}\,U_{n-1-k}(x)\,T_i(x)\right]. \tag{6.2}
$$

В силу теоремы 1 имеют место равенства

$$\overline{A}(x)\,\overline{B}(x) = T_n(x)\,E = \overline{B}(x)\,\overline{A}(x). \tag{6.3}$$

Справедливы формулы

$$U_m(x)\,T_n(x) - U_{m-1}(x)\,T_{n-1}(x) = T_{m+n}(x), \qquad T_k(x) = x\,U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x), \tag{6.4}$$

$$T_k(x) + T_{k+1}(x) = (1{+}x)\,\big[U_k(x) - U_{k-1}(x)\big], \qquad T_k(x) - T_{k+1}(x) = (1{-}x)\,\big[U_k(x) + U_{k-1}(x)\big].$$

Действительно, первое тождество следует из формулы (1.1) [3], а остальные очевидны.

Для решения первой системы (5.9) введем в рассмотрение вспомогательные переменные $x_k \doteq x^{2N-2k}$, $v_k \doteq v^{N-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n{-}1$, тогда

$$\begin{cases} \mathrm{y}\,x_0 + x_1 = v_0, \\ x_{k-1} + 2\mathrm{y}\,x_k + x_{k+1} = v_k, \quad k = 1, \ldots, n{-}2, \\ x_{n-2} + 2\mathrm{y}\,x_{n-1} = v_{n-1} - x^2. \end{cases}$$

(Величина x^2 постоянна, см. (4.2).) Пусть $X \doteq \mathrm{col}\,(x_0, \ldots, x_{n-1})$, $V \doteq \mathrm{col}\,(V_0, \ldots, V_{n-1})$, где $V_k \doteq v_k - \delta_{k,n-1}\,x^2$, $k = 0, 1, \ldots, n{-}1$, тогда система принимает вид $\overline{A}(\mathrm{y})\,X = V$. В силу (6.3) имеет место равенство $T_n(\mathrm{y})\,X = \overline{B}(\mathrm{y})\,V$, а так как $\mathrm{y} < -3$ (см. (5.1)), то $T_n(\mathrm{y}) \neq 0$, следовательно,

$$x_k = \frac{1}{T_n(\mathrm{y})} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{B}_{ki}(\mathrm{y})\,V_i, \qquad k = 0, 1, \ldots, n{-}1.$$

Следовательно, для всех $k = 2, \ldots, N$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} x^{2k} = x_{N-k} &= \frac{1}{T_n(\mathrm{y})} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{B}_{N-k,\,i}(\mathrm{y})\,V_i = \frac{1}{T_n(\mathrm{y})} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{B}_{N-k,\,i}(\mathrm{y}) \left[v^{N-i} - \delta_{i,n-1}\,x^2\right] = \\ &= \frac{1}{T_n(\mathrm{y})} \sum_{i=2}^{N} \overline{B}_{N-k,N-i}(\mathrm{y}) \left[v^{i} - \delta_{N-i,n-1}\,x^2\right] = \\ &= \frac{1}{T_n(\mathrm{y})} \Big[\sum_{i=2}^{N} \overline{B}_{N-k,N-i}(\mathrm{y})\,v^i - (-1)^k\,T_{N-k}(\mathrm{y})\,x^2\Big] \end{aligned} \tag{6.5}$$

(сначала заменили индекс i на $N{-}i$, а затем учли, что $\delta_{N-i,n-1} \neq 0$ лишь при $i = 2$). Аналогично,

$$y^{2k} = \frac{1}{T_n(\mathrm{x})} \Big[\sum_{i=2}^{N} \overline{B}_{N-k,N-i}(\mathrm{x})\,\vartheta^i - (-1)^k\,T_{N-k}(\mathrm{x})\,y^2\Big], \qquad k = 2, \ldots, N. \tag{6.6}$$

§ 7. Точная формула для невязки оптимального аппроксимирующего сплайна

Пусть J^* — значение функционала J на решении системы (5.9). Другими словами, J^* — это минимальное значение функционала (1.2) в пространстве аппроксимирующих сплайнов $\sigma(\Pi)$. Зафиксируем это решение и подставим его в формулу (2.8). Сумму первых четырех слагаемых правой части (2.8) обозначим через σ_0^k, а сумму остальных слагаемых — через σ_1^k. Тогда для любого $k = 2, \ldots, N$ справедливо

$$\begin{aligned} \sigma_0^k &= 4\theta^2 \left[x^{2k-2} + x^{2k} - 2\,z^k\right]^2 - \tfrac{4}{3}\,\theta\,(9{-}4\theta)\,\gamma \left[x^{2k-2} + x^{2k} - 2\,z^k\right]^2 + \\ &+ \tfrac{2}{15} \Big\{(81{-}60\theta + 16\theta^2)\,\gamma\Big\}\,\gamma \left[x^{2k-2} + x^{2k} - 2\,z^k\right]^2 + \tfrac{4}{3}\theta^2 \left[x^{2k-2} - x^{2k}\right]^2 = \\ &= \left[4\theta^2 - \tfrac{2}{3}\,\theta\,(9{-}4\theta)\,\gamma\right] \left[x^{2k-2} + x^{2k} - 2\,z^k\right]^2 + \tfrac{4}{3}\theta^2 \left[x^{2k-2} - x^{2k}\right]^2 = \\ &= \left[4\theta^2 - \tfrac{4}{3}\,\theta^2 (3{-}\alpha)\right] \left[x^{2k-2} + x^{2k} - 2\,z^k\right]^2 + \tfrac{4}{3}\theta^2 \left[x^{2k-2} - x^{2k}\right]^2 = \tfrac{4}{3}\,\theta^2 \varsigma_0^k, \end{aligned}$$

где

$$\varsigma_0^k \doteq \alpha \left[x^{2k-2} + x^{2k} - 2\,z^k\right]^2 + \left[x^{2k-2} - x^{2k}\right]^2.$$

Сначала исключили величину X^k (см. (5.9)), а затем заменили выражение, стоящее в фигурных скобках, в соответствии с определением (5.1) числа γ.

Аналогично

$$\sigma_1^k = 12\theta^2\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2w^k\right]^2 - \tfrac{4}{5}\,\theta(9-20\theta)\,\delta\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2w^k\right]^2 +$$
$$+\tfrac{2}{35}\left\{(27-84\theta+112\theta^2)\,\delta\right\}\delta\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2w^k\right]^2 + 4\theta^2\left[y^{2k-2}-y^{2k}\right]^2 =$$
$$=\left[12\theta^2-\tfrac{2}{5}\,\theta(9-20\theta)\,\delta\right]\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2w^k\right]^2 + 4\theta^2\left[y^{2k-2}-y^{2k}\right]^2 =$$
$$=\left[12\theta^2-4\theta^2(3-\beta)\right]\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2w^k\right]^2 + 4\theta^2\left[y^{2k-2}-y^{2k}\right]^2 = 4\theta^2\varsigma_1^k,$$

где

$$\varsigma_1^k \doteq \beta\left[y^{2k-2}+y^{2k}-2w^k\right]^2 + \left[y^{2k-2}-y^{2k}\right]^2, \qquad k=2,\ldots,N.$$

Значит,

$$\sum_{k=2}^N J^k = \frac{\mathrm{a}^2}{32\tau^3}\cdot\frac{4}{3}\,\theta^2\Big(\sum_{k=2}^N\varsigma_0^k + 3\sum_{k=2}^N\varsigma_1^k\Big) = \frac{27\,\mathrm{b}^2}{16N}\Big(\sum_{k=2}^N\varsigma_0^k + 3\sum_{k=2}^N\varsigma_1^k\Big), \tag{7.1}$$

а в силу (4.3) и (2.3)

$$J^1 = \tfrac{\mathrm{a}^2}{2\tau^3}\,\theta^2\big(\left[x^0-z^1\right]^2 + 3\left[y^0-w^1\right]^2\big) = \tfrac{81\,\mathrm{b}^2}{4N}\big(\left[\xi^0\right]^2 + 3\left[\eta^0\right]^2\big). \tag{7.2}$$

Обозначим суммы в (7.1) через S_0 и S_1. Для S_0 справедливо равенство $S_0 = S_0^1 + S_0^2 + S_0^3$, где

$$S_0^1 \doteq \alpha\sum_{k=2}^N\left[x^{2k-2}+x^{2k}\right]^2 + \sum_{k=2}^N\left[x^{2k-2}-x^{2k}\right]^2,\quad S_0^2 \doteq -4\alpha\sum_{k=2}^N\left[x^{2k-2}+x^{2k}\right]z^k,\quad S_0^3 \doteq 4\alpha\sum_{k=2}^N\left[z^k\right]^2.$$

Тогда

$$S_0^1 = (1+\alpha)\sum_{k=2}^N\left[x^{2k-2}\right]^2 + (1+\alpha)\sum_{k=2}^N\left[x^{2k}\right]^2 - 2(1-\alpha)\sum_{k=2}^N x^{2k-2}x^{2k} =$$
$$=(1+\alpha)\Big(\left[x^2\right]^2+\left[x^{2N}\right]^2\Big) + 2(1+\alpha)\sum_{k=2}^n\left[x^{2k}\right]^2 - 2(1-\alpha)\sum_{k=2}^N x^{2k-2}x^{2k}.$$

(В первой сумме заменили индекс k на $k+1$.) Поскольку $(1+\alpha) = -(1-\alpha)\,\mathrm{y}$, то

$$S_0^1 = -(1-\alpha)\,\mathrm{y}\Big(\left[x^2\right]^2+\left[x^{2N}\right]^2\Big) - (1-\alpha)\sum_{k=2}^n x^{2k}\Big\{2\mathrm{y}\,x^{2k}\Big\} - 2(1-\alpha)\sum_{k=2}^N x^{2k-2}x^{2k} =$$
$$=-(1-\alpha)\,\mathrm{y}\Big(\left[x^2\right]^2+\left[x^{2N}\right]^2\Big) - (1-\alpha)\sum_{k=2}^n x^{2k}\Big\{v^k - x^{2k-2} - x^{2k+2}\Big\} - 2(1-\alpha)\sum_{k=2}^N x^{2k-2}x^{2k}.$$

Заменили выражение, стоящее в фигурных скобках, в соответствии с первым уравнением (5.9). В результате массовых сокращений получаем равенство

$$S_0^1 = -(1-\alpha)\,\mathrm{y}\Big(\left[x^2\right]^2+\left[x^{2N}\right]^2\Big) - (1-\alpha)\left[x^2x^4 + x^{2n}x^{2N}\right] - (1-\alpha)\sum_{k=2}^n x^{2k}v^k.$$

Имеют место равенства

$$S_0^2 = -4\alpha\Big(\sum_{k=2}^N x^{2k-2}z^k + \sum_{k=2}^N x^{2k}z^k\Big) = -4\alpha\Big(x^2z^2 + x^{2N}z^N + \sum_{k=2}^n x^{2k}\left[z^k+z^{k+1}\right]\Big).$$

(В первой сумме заменили индекс k на $k+1$.) Так как $2\alpha = -(1-\alpha)(1+\mathrm{y})$, то

$$S_0^2 = 2(1-\alpha)(1+\mathrm{y})\left[x^2z^2 + x^{2N}z^N\right] + 2(1-\alpha)\sum_{k=2}^n x^{2k}v^k.$$

Воспользовались равенством $(1+\mathrm{y})\left[z^k+z^{k+1}\right] = v^k$ (см. определение (5.4)). Наконец,

$$S_0^3 = -2(1-\alpha)(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^N\left[z^k\right]^2.$$

Следовательно, в соответствии с обозначениями для сумм в правой части (7.1) справедливо

$$\Theta \doteq \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=2}^{N}\varsigma_0^k = \frac{1}{1-\alpha}S_0 = \frac{1}{1-\alpha}\left(S_0^1+S_0^2+S_0^3\right) = \sigma + \sum_{k=2}^{n} x^{2k}v^k - 2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^{N}\left[z^k\right]^2, \qquad (7.3)$$

где $\sigma \doteq -\,\mathrm{y}\left(\left[x^2\right]^2+\left[x^{2N}\right]^2\right) - \left[x^2x^4+x^{2n}x^{2N}\right] + 2\,(1+\mathrm{y})\left[x^2z^2+x^{2N}z^N\right]$. Согласно второму уравнению (5.9) и определению (5.4) числа v^N получаем, что

$$\sigma = x^2\left[-\,\mathrm{y}x^2-x^4+2\,(1+\mathrm{y})\,z^2\right] + x^{2N}\left[-\,\mathrm{y}x^{2N}-x^{2n}+2\,(1+\mathrm{y})\,z^N\right] =$$
$$= x^2\left[-\,\mathrm{y}x^2-x^4+2\,(1+\mathrm{y})\,z^2\right] + x^{2N}v^N.$$

Таким образом, $\Theta = \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3$, где

$$\Theta_1 \doteq x^2\left[-\,\mathrm{y}x^2-x^4+2\,(1+\mathrm{y})\,z^2\right], \qquad \Theta_2 \doteq \sum_{k=2}^{N}x^{2k}v^k, \qquad \Theta_3 \doteq -\,2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^{N}\left[z^k\right]^2, \qquad (7.4)$$

а в силу (6.5) справедливо равенство $T_n\Theta_2 = -x^2\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,v^k + \sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}\overline{B}_{N-k,N-i}\,v^kv^i$. (Аргумент y в функциях U_m, T_m и $\overline{B}_{mj}$ здесь и далее не пишем.) Обозначим двойную сумму через Σ, тогда в соответствии с (5.4) имеем

$$\Sigma = (1+\mathrm{y})^2\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}\overline{B}_{N-k,N-i}\left[z^kz^i+z^kz^{i+1}+z^{k+1}z^i+z^{k+1}z^{i+1}\right] =$$
$$= (1+\mathrm{y})^2\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}\overline{B}_{N-k,N-i}\,z^kz^i + (1+\mathrm{y})^2\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=3}^{N+1}\overline{B}_{N-k,N+1-i}\,z^kz^i +$$
$$+ (1+\mathrm{y})^2\sum_{k=3}^{N+1}\sum_{i=2}^{N}\overline{B}_{N+1-k,N-i}\,z^kz^i + (1+\mathrm{y})^2\sum_{k=3}^{N+1}\sum_{i=3}^{N+1}\overline{B}_{N+1-k,N+1-i}\,z^kz^i.$$

В суммах заменили индексные выражения $k+1$ и $i+1$ на k и i соответственно. Следовательно,

$$\Sigma/(1+\mathrm{y})^2 = \sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\left[\delta^{\geqslant}_{n-i,N-k}\,T_{N-k}\,U_{i-2}+\delta^{\geqslant}_{N-k,N-i}\,U_{k-2}\,T_{N-i}\right]z^kz^i \;+$$
$$+\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=3}^{N+1}(-1)^{k+i-1}\left[\delta^{\geqslant}_{N-i,N-k}\,T_{N-k}\,U_{i-3}+\delta^{\geqslant}_{N-k,N+1-i}\,U_{k-2}\,T_{N+1-i}\right]z^kz^i \;+$$
$$+\sum_{k=3}^{N+1}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i-1}\left[\delta^{\geqslant}_{N-i,N+1-k}\,T_{N+1-k}\,U_{i-2}+\delta^{\geqslant}_{N-k,N-i}\,U_{k-3}\,T_{N-i}\right]z^kz^i \;+$$
$$+\sum_{k=3}^{N+1}\sum_{i=3}^{N+1}(-1)^{k+i}\left[\delta^{\geqslant}_{N-i,N+1-k}\,T_{N+1-k}\,U_{i-3}+\delta^{\geqslant}_{N+1-k,N+1-i}\,U_{k-3}\,T_{N+1-i}\right]z^kz^i.$$

В третьей сумме для величины $\overline{B}_{N+1-k,N-i}$ применили формулу (6.1), а в остальных случаях — формулу (6.2). В силу равенств $U_{-1}=0$ и $z^{N+1}=0$ и определения чисел $\delta^{\geqslant}_{mj}$ все суммирования можно вести от 2 до N, поэтому $\Sigma = (1+\mathrm{y})^2\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\,\Psi_{ki}\,z^kz^i$, где

$$\Psi_{ki} \doteq \left[\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,T_{N-k}\,U_{i-2}+\delta^{\geqslant}_{ik}\,U_{k-2}\,T_{N-i}\right] - \left[\delta^{\geqslant}_{ki}\,T_{N-k}\,U_{i-3}+\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\,U_{k-2}\,T_{N+1-i}\right] -$$
$$-\left[\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,T_{N+1-k}\,U_{i-2}+\delta^{\geqslant}_{ik}\,U_{k-3}\,T_{N-i}\right] + \left[\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,T_{N+1-k}\,U_{i-3}+\delta^{\geqslant}_{ik}\,U_{k-3}\,T_{N+1-i}\right].$$

Применили легко проверяемые равенства

$$\delta^{\geqslant}_{n-i,N-k}=\delta^{\geqslant}_{N-i,N+1-k}=\delta^{\geqslant}_{k-1,i},\quad \delta^{\geqslant}_{N-k,N-i}=\delta^{\geqslant}_{N+1-k,N+1-i}=\delta^{\geqslant}_{ik},\quad \delta^{\geqslant}_{N-i,N-k}=\delta^{\geqslant}_{ki},\quad \delta^{\geqslant}_{N-k,N+1-i}=\delta^{\geqslant}_{i-1,k}.$$

В случаях $k<i$, $i<k$, $i=k$ справедливы равенства

$$\Psi_{ki}=U_{k-2}\,T_{N-i}-U_{k-2}\,T_{N+1-i}-U_{k-3}\,T_{N-i}+U_{k-3}\,T_{N+1-i}=\big(U_{k-2}-U_{k-3}\big)\big(T_{N-i}-T_{N+1-i}\big),$$

$$\Psi_{ki}=T_{N-k}\,U_{i-2}-T_{N-k}\,U_{i-3}-T_{N+1-k}\,U_{i-2}+T_{N+1-k}\,U_{i-3}=\big(T_{N-k}-T_{N+1-k}\big)\big(U_{i-2}-U_{i-3}\big),$$

$$\Psi_{kk}=U_{k-2}\,T_{N-k}-T_{N-k}\,U_{k-3}-U_{k-3}\,T_{N-k}+U_{k-3}\,T_{N+1-k}=$$
$$=\big(U_{k-2}\,T_{N+1-k}-U_{k-3}\,T_{N-k}\big)+\big(U_{k-2}-U_{k-3}\big)\big(T_{N-k}-T_{N+1-k}\big)$$

соответственно. В силу первой формулы (6.4) справедливо $U_{k-2}\,T_{N+1-k}-U_{k-3}\,T_{N-k}=T_n$, а в силу третьей и четвертой формул (6.4) имеем

$$\Psi_{ki}=\delta_{ki}\,T_n+\frac{1-\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}}\left\{\begin{array}{ll}\big(T_{k-2}+T_{k-1}\big)\big(U_{n-i}+U_{N-i}\big), & \text{если } k\leqslant i,\\ \big(U_{n-k}+U_{N-k}\big)\big(T_{i-2}+T_{i-1}\big), & \text{если } k\geqslant i.\end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\Sigma=(1+\mathrm{y})^2\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\,\Psi_{ki}\,z^kz^i=(1+\mathrm{y})^2\,T_n\sum_{k=2}^{N}\big[z^k\big]^2+(1-\mathrm{y}^2)\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\,\Phi_{ki}\,z^kz^i,$$

где $\Phi_{ki}\doteq\delta^{\geqslant}_{ik}\big(T_{k-2}+T_{k-1}\big)\big(U_{n-i}+U_{N-i}\big)+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\big(U_{n-k}+U_{N-k}\big)\big(T_{i-2}+T_{i-1}\big)$ и, значит,

$$T_n\Theta_2=-x^2\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,v^k+(1+\mathrm{y})^2\,T_n\sum_{k=2}^{N}\big[z^k\big]^2+(1-\mathrm{y}^2)\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\,\Phi_{ki}\,z^kz^i. \qquad (7.5)$$

Обозначим двойную сумму в (7.5) через σ, тогда имеет место представление

$$\sigma=\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\big[\delta^{\geqslant}_{ik}\,T_{k-1}\,U_{n-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,U_{n-k}\,T_{i-1}\big]\,z^kz^i+$$
$$+\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\big[\delta^{\geqslant}_{ik}\,T_{k-2}\,U_{n-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,U_{N-k}\,T_{i-1}\big]\,z^kz^i+$$
$$+\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\big[\delta^{\geqslant}_{ik}\,T_{k-1}\,U_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,U_{n-k}\,T_{i-2}\big]\,z^kz^i+$$
$$+\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}(-1)^{k+i}\big[\delta^{\geqslant}_{ik}\,T_{k-2}\,U_{N-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i}\,U_{N-k}\,T_{i-2}\big]\,z^kz^i.$$

Обозначим слагаемые через σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4 соответственно. В сумме σ_4 заменим индексы k и i на $k+1$ и $i+1$ соответственно. В силу (6.1) справедливо

$$\sigma_4=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\big[\delta^{\geqslant}_{i+1,k+1}\,T_{k-1}\,U_{n-i}+\delta^{\geqslant}_{k,i+1}\,U_{n-k}\,T_{i-1}\big]\,z^{k+1}z^{i+1}=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\overline{B}_{k-1,i-1}\,z^{k+1}z^{i+1}-z^2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,z^{k+1}-z^2\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\,U_{n-i}\,z^{i+1}+U_{n-1}\big[z^2\big]^2.$$

В сумме σ_3 заменим индекс i на $i+1$. Так как $\delta^{\geqslant}_{i+1,k}=\delta^{\geqslant}_{ik}+\delta_{i,k-1}$, $\delta^{\geqslant}_{k-1,i+1}=\delta^{\geqslant}_{k-1,i}-\delta_{k-1,i}$, то

$$\sigma_3=\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i+1}\big[\delta^{\geqslant}_{i+1,k}\,T_{k-1}\,U_{n-i}+\delta^{\geqslant}_{k-1,i+1}\,U_{n-k}\,T_{i-1}\big]\,z^kz^{i+1}=$$

$$= \sum_{k=2}^{N} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i+1} \Big[\big(\delta_{ik}^{\geqslant} + \delta_{i,k-1}\big)\, T_{k-1}\, U_{n-i} + \big(\delta_{k-1,i}^{\geqslant} - \delta_{k-1,i}\big)\, U_{n-k}\, T_{i-1} \Big]\, z^k z^{i+1} = \sigma_3^1 + \sigma_3^2,$$

$$\sigma_3^1 \doteq -\sum_{k=2}^{N} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} \big[\delta_{ik}^{\geqslant}\, T_{k-1}\, U_{n-i} + \delta_{k-1,i}^{\geqslant}\, U_{n-k}\, T_{i-1} \big]\, z^k z^{i+1},$$

$$\sigma_3^2 \doteq -\sum_{k=2}^{N} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} \big[\delta_{i,k-1}\, T_{k-1}\, U_{n-i} - \delta_{k-1,i}\, U_{n-k}\, T_{i-1} \big]\, z^k z^{i+1}.$$

Так как $U_{-1} = 0$, то в первой сумме суммирование по переменной k можно вести от 2 до n:

$$\sigma_3^1 = -\sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \overline{B}_{k-1,i-1}\, z^k z^{i+1} + z^2 \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, U_{n-k}\, z^k,$$

$$\sigma_3^2 = \sum_{k=2}^{N} \big[T_{k-1}\, U_{{}_{N-k}} - U_{n-k}\, T_{k-2} \big] \big[z^k\big]^2 = T_n \sum_{k=2}^{N} \big[z^k\big]^2.$$

Во второй сумме воспользовались формулой (6.4). В сумме σ_2 заменим индекс k на $k+1$. Тогда

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{N} (-1)^{k+i+1} \big[\delta_{i,k+1}^{\geqslant}\, T_{k-1}\, U_{n-i} + \delta_{ki}^{\geqslant}\, U_{n-k}\, T_{i-1} \big]\, z^{k+1} z^i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{N} (-1)^{k+i+1} \Big[\big(\delta_{ik}^{\geqslant} - \delta_{ik}\big)\, T_{k-1}\, U_{n-i} + \big(\delta_{k-1,i}^{\geqslant} + \delta_{ki}\big)\, U_{n-k}\, T_{i-1} \Big]\, z^{k+1} z^i = \sigma_2^1 + \sigma_2^2,$$

$$\sigma_2^1 \doteq -\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{N} (-1)^{k+i} \big[\delta_{ik}^{\geqslant}\, T_{k-1}\, U_{n-i} + \delta_{k-1,i}^{\geqslant}\, U_{n-k}\, T_{i-1} \big]\, z^{k+1} z^i,$$

$$\sigma_2^2 \doteq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{N} (-1)^{k+i} \Big\{ \delta_{ik}\, T_{k-1}\, U_{n-i} - \delta_{ki}\, U_{n-k}\, T_{i-1} \Big\}\, z^{k+1} z^i = 0.$$

(Выражение, стоящее в фигурных скобках, равно нулю при всех k и i.) Так как $U_{-1} = 0$, то в первой сумме суммирование по переменной i можно вести от 2 до n:

$$\sigma_2^1 = -\sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \overline{B}_{k-1,i-1}\, z^{k+1} z^i + z^2 \sum_{i=2}^{n} (-1)^i\, U_{n-i}\, z^i.$$

Наконец, $\sigma_1 = \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \overline{B}_{k-1,i-1}\, z^k z^i$, следовательно, в силу определений (2.3) справедливо

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2^1 + \sigma_3^1 + \sigma_3^2 + \sigma_4 = T_n \sum_{k=2}^{N} \big[z^k\big]^2 + 2z^2 \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, U_{n-k} \big(z^k - z^{k+1}\big) + U_{n-1} \big[z^2\big]^2 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \overline{B}_{k-1,i-1} \big(z^k - z^{k+1}\big) \big(z^i - z^{i+1}\big) =$$

$$= T_n \sum_{k=2}^{N} \big[z^k\big]^2 + 2z^2 \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, U_{n-k}\, \xi^k + U_{n-1} \big[z^2\big]^2 + \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} \overline{B}_{k-1,i-1}\, \xi^k \xi^i.$$

Таким образом, формула (7.5) принимает вид

$$T_n \Theta_2 = -x^2 \sum_{k=2}^{N} (-1)^k\, T_{{}_{N-k}}\, v^k + 2\,(1+\mathrm{y})\, T_n \sum_{k=2}^{N} \big[z^k\big]^2 +$$

$$+2\,(1-\mathrm{y}^2)\,z^2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,\xi^k+(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}\left[z^2\right]^2+(1-\mathrm{y}^2)\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\overline{B}_{k-1,i-1}\,\xi^k\xi^i.$$

Возвращаясь к переменной Θ (см. формулы (7.4)), получаем равенство

$$T_n\Theta=T_n\Theta_1+T_n\Theta_2+T_n\Theta_3=x^2\Big\{-\mathrm{y}\,T_n\,x^2-T_n\,x^4+2\,(1+\mathrm{y})\,T_n\,z^2-\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,v^k\Big\}+$$

$$+\,2\,(1-\mathrm{y}^2)\,z^2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\,U_{n-k}\,\xi^k+(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}\left[z^2\right]^2+(1-\mathrm{y}^2)\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\overline{B}_{k-1,i-1}\,\xi^k\xi^i.$$

Обозначим выражение, стоящее в фигурных скобках, через Σ. Тогда, применив формулу (6.5) к величине x^4, получим равенство

$$\Sigma=-\mathrm{y}\,T_n\,x^2+T_{n-1}\,x^2-\sum_{i=2}^{N}\overline{B}_{N-2,N-i}\,v^k+2\,(1+\mathrm{y})\,T_n\,z^2-\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,v^k.$$

Так как $T_k=U_k-\mathrm{y}\,U_{k-1}$, то $T_{n-1}-\mathrm{y}\,T_n=(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}$ (что легко проверить непосредственной подстановкой), а так как $\overline{B}_{N-2,N-i}=(-1)^i\,T_{N-i}$, то

$$\Sigma=(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}\,x^2+2\,(1+\mathrm{y})\,T_n\,z^2-2\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,v^k=$$

$$=(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}\,x^2+2\,(1+\mathrm{y})\,T_n\,z^2-2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,z^k-2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,z^{k+1}=$$

$$=(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}\,x^2-2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\,T_{N-k}\,z^k-2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,T_{N-k}\,z^{k+1}.$$

Внесли слагаемое $2\,(1+\mathrm{y})\,T_n\,z^2$ во вторую сумму и учли равенство $z^{N+1}=0$. Заменив в последней сумме индексное выражение $k+1$ на k, получаем, что

$$\Sigma-(1-\mathrm{y}^2)\,U_{n-1}\,x^2=2\,(1+\mathrm{y})\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\big[T_{N+1-k}-T_{N-k}\big]\,z^k=-2\,(1-\mathrm{y}^2)\sum_{k=2}^{N}(-1)^k\big[U_{n-k}+U_{N-k}\big]\,z^k.$$

Воспользовались формулой (6.4). Таким образом, разбив сумму на две, получаем равенство

$$\Sigma\,/(1-\mathrm{y}^2)=U_{n-1}\,x^2-2\sum_{k=2}^{n}(-1)^kU_{n-k}\,z^k+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^kU_{n-k}\,z^{k+1}$$

(в первой сумме учли равенство $U_{-1}=0$, а во второй заменили индекс k на $k+1$). Значит,

$$\Sigma\,/(1-\mathrm{y}^2)=U_{n-1}\,x^2-2\,U_{n-1}\,z^2-2\sum_{k=2}^{n}(-1)^kU_{n-k}\,\xi^k,$$

$$T_n\Theta\,/(1-\mathrm{y}^2)=U_{n-1}\,(x^2-z^2)^2-2\,(x^2-z^2)\sum_{k=2}^{n}(-1)^kU_{n-k}\,\xi^k+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}\overline{B}_{k-1,i-1}\,\xi^k\xi^i,$$

а так как $\overline{B}_{00}=U_{n-1}$, $\overline{B}_{k-1,0}=-(-1)^kU_{n-k}$, $\overline{B}_{0,i-1}=-(-1)^iU_{n-i}$, $\xi^1=x^2-z^2$ (см. (2.3)), то

$$T_n(\mathrm{y})\,\Theta\,/(1-\mathrm{y}^2)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{B}_{k-1,i-1}\,\xi^k\xi^i=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{B}_{ki}\,\xi^{k+1}\xi^{i+1}=\big\langle\,\overline{B}(\mathrm{y})\,\xi,\,\xi\,\big\rangle,$$

$$\sum_{k=2}^{N}\varsigma_0^k=(1-\alpha)\,\Theta=(1-\alpha)\,\frac{1-\mathrm{y}^2}{T_n(\mathrm{y})}\,\big\langle\,\overline{B}(\mathrm{y})\,\xi,\,\xi\,\big\rangle=\frac{2\,(1+\mathrm{y})}{T_n(\mathrm{y})}\,\big\langle\,\overline{B}(\mathrm{y})\,\xi,\,\xi\,\big\rangle,$$

см. формулу (7.3). (Применили обозначение $\xi\doteq\mathrm{col}\,(\xi^1,\ldots,\xi^n)$ и запись квадратичной формы через скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.)

Аналогично,

$$\sum_{k=2}^{N} \varsigma_1^k = \frac{2\,(1+\mathrm{x})}{T_n(\mathrm{x})} \left\langle\, \overline{B}(\mathrm{x})\,\eta, \eta \,\right\rangle, \qquad \eta \doteq \mathrm{col}\,(\eta^1, \ldots, \eta^n)$$

(числа η^k определены в (2.3)), следовательно, формула (7.1) принимает окончательный вид:

$$\sum_{k=2}^{N} J^k = \frac{27\mathrm{b}^2}{8N} \Big(\frac{1+\mathrm{y}}{T_n(\mathrm{y})} \left\langle\, \overline{B}(\mathrm{y})\,\xi, \xi \,\right\rangle + \frac{3\,(1+\mathrm{x})}{T_n(\mathrm{x})} \left\langle\, \overline{B}(\mathrm{x})\,\eta, \eta \,\right\rangle \Big),$$

а в силу (7.2) и (6.3) имеем

$$J^* = \sum_{k=1}^{N} J^k = \frac{27\mathrm{b}^2}{8N} \Big(6\,[\xi^0]^2 + 18\,[\eta^0]^2 + \frac{1+\mathrm{y}}{T_n(\mathrm{y})} \left\langle\, \overline{B}(\mathrm{y})\,\xi, \xi \,\right\rangle + \frac{3\,(1+\mathrm{x})}{T_n(\mathrm{x})} \left\langle\, \overline{B}(\mathrm{x})\,\eta, \eta \,\right\rangle \Big) =$$

$$= \frac{27\mathrm{b}^2}{8N} \Big(6\,[\xi^0]^2 + 18\,[\eta^0]^2 + (1+\mathrm{y}) \left\langle\, \overline{A}^{-1}(\mathrm{y})\,\xi, \xi \,\right\rangle + 3\,(1+\mathrm{x}) \left\langle\, \overline{A}^{-1}(\mathrm{x})\,\eta, \eta \,\right\rangle \Big). \tag{7.6}$$

Таким образом, в терминах введенных обозначений справедлива

Теорема 2. *Минимум* J^* *функционала* (1.2) *достигается на решении системы уравнений* (5.9)*, и для него имеют место представления* (7.6) *через граничные элементы* (2.3).

§ 8. Поведение невязки J^* при $N \to \infty$ в случае гладких граничных условий

Пусть $\{J_{_N}\}$ — это последовательность, в которой $J_{_N} \doteq J^*$ — минимальное значение функционала (1.2), вычисленное при заданном N.

В силу следствия 2 [3] спектры матриц $\overline{A}(\mathrm{y})$ и $\overline{A}^{-1}(\mathrm{y})$ вещественные и справедливо

$$-2\,(1-\mathrm{y}) < \Lambda_1 < \ldots < \Lambda_n < \mathrm{y}-\mathrm{y}^{-1} < 0, \qquad -\frac{\mathrm{y}}{1-\mathrm{y}^2} < \Lambda_n^{-1} < \ldots < \Lambda_1^{-1} < -\frac{1}{2\,(1-\mathrm{y})} < 0$$

(здесь мы находимся в условиях, когда переменные c, x и β из следствия 2 [3] таковы, что $c > 0$, $x < 0$ и $\beta < -1$: в нашем случае $c = 1$, а x и β равны y, причем $\mathrm{y} < -3$). Значит,

$$-\frac{\mathrm{y}}{1-\mathrm{y}^2} \left\langle\, \xi, \xi \,\right\rangle \leqslant \Lambda_n^{-1} \left\langle\, \xi, \xi \,\right\rangle \leqslant \left\langle\, \overline{A}^{-1}(\mathrm{y})\,\xi, \xi \,\right\rangle, \qquad (1+\mathrm{y}) \left\langle\, \overline{A}^{-1}(\mathrm{y})\,\xi, \xi \,\right\rangle \leqslant -\frac{\mathrm{y}}{1-\mathrm{y}} \left\langle\, \xi, \xi \,\right\rangle \leqslant \left\langle\, \xi, \xi \,\right\rangle.$$

Аналогично, $(1+\mathrm{x}) \left\langle\, \overline{A}^{-1}(\mathrm{x})\,\eta, \eta \,\right\rangle \leqslant \left\langle\, \eta, \eta \,\right\rangle$. Следовательно, в соответствии с (7.6)

$$J_{_N} = J^* \leqslant \tfrac{27\mathrm{b}^2}{8N} \left(6\,[\xi^0]^2 + 18\,[\eta^0]^2 + \left\langle\, \xi, \xi \,\right\rangle + 3 \left\langle\, \eta, \eta \,\right\rangle \right).$$

Полагаем далее, что $\rho_0, \rho_1 \in \mathrm{C}^3[0,1]$, тогда $\widehat{\rho}_0, \widehat{\rho}_1 \in \mathrm{C}^3[0,1]$. В силу определений (2.3) и формулы Тейлора при $N \to \infty$ справедливо $z^k - z^{k+1} = O(N^{-1})$, $w^k - w^{k+1} = O(N^{-1})$, $k = 1, \ldots, n$, причем эти оценки равномерны по k:

$$|\, z^k - z^{k+1} \,| \leqslant \tfrac{5\mathrm{a}}{27\mathrm{b}N}\, M, \quad |\, w^k - w^{k+1} \,| \leqslant \tfrac{5\mathrm{a}}{81\mathrm{b}N}\, M, \quad \text{где} \quad M \doteq \big(\max |\, \rho_0^{(3)}(\cdot) \,| + \max |\, \rho_1^{(3)}(\cdot) \,| \big). \tag{8.1}$$

Следовательно, $\xi^k = O(N^{-1})$, $\eta^k = O(N^{-1})$ для всех $k = 2, \ldots, n$. Что касается оценок для величин ξ^1 и η^1, то справедливы равенства $\xi^1 = x^2 - z^2 = (x^0 - z^1) + (z^1 - z^2) = O(N^{-1})$ (воспользовались равенством $x^2 = x^0$, см. (4.2), оценкой $x^0 - z^1 = O(N^{-1})$, см. комментарии к (4.3), и оценкой $z^1 - z^2 = O(N^{-1})$, см. (8.1)) и $\eta^1 = y^2 - w^2 = (y^0 - w^1) + (w^1 - w^2) = O(N^{-1})$.

Таким образом, $\left\langle\, \xi, \xi \,\right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \big[\xi^k\big]^2 = O(N^{-1})$, $\left\langle\, \eta, \eta \,\right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \big[\eta^k\big]^2 = O(N^{-1})$, а поскольку $\xi^0 = x^0 - z^1 = O(N^{-1})$ и $\eta^0 = y^0 - w^1 = O(N^{-1})$, то окончательно $J_{_N} = O(N^{-2})$.

Полученная оценка означает, в частности, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся размерность N и сплайн $u \in \sigma_{_N}(\Pi)$ (порожденный решением системы (5.9)) такие, что

$$\big\|\, \mathrm{a} u_{tt} - \mathrm{b} u_{\xi\xi} \,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} < \varepsilon.$$

Заключение

В силу полученных оценок оптимальный аппроксимирующий сплайн $\overline{u} \in \sigma_N(\Pi)$ задачи (1.2) удовлетворяет равенствам

$$\|\,\mathrm{a}\,\overline{u}_{tt} - \mathrm{b}\,\overline{u}_{\xi\xi}\,\|_{\mathrm{L}_2(\Pi)} = O(N^{-1}), \quad \overline{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi), \quad \xi \in [0,1], \quad \|\,\overline{u}_t(0,\xi) - \widehat{\psi}(\xi)\,\|_{\mathrm{C}[0,1]} = O(N^{-2}),$$

$$\overline{u}(\tau_i, 0) = \widehat{\rho}_0(\tau_i), \quad \overline{u}(\tau_i, 1) = \widehat{\rho}_1(\tau_i), \quad i = 0, 1, \ldots, 2N.$$

Это означает, что при достаточно больших N у сплайна $\overline{u} : \Pi \to \mathbb{R}$ есть все основания претендовать на статус приближенного решения задачи (I). Кроме того, следует отметить следующее важное обстоятельство. Алгоритм численного решения задачи (I) имеет линейную вычислительную сложность, требуется лишь методом прогонки решить первую и третью системы (5.9) и осуществить явные вычисления во второй и четвертой системах. Более того, для коэффициентов сплайна $\overline{u}$ получено явное аналитическое представление, см. формулы (6.5), (6.6). (Заметим, что задача (II) исследована в [5, 6], где получен алгоритм ее численного решения, также имеющий линейную вычислительную сложность.)

Таким образом, предлагаемый алгоритм имеет линейную сложность вычислений и, безусловно, относится к категории экономичных. Очевидно, он устойчив (так как в силу формул (6.5), (6.6) имеет место непрерывная зависимость от входных данных). К тому же в силу оценок $|\mathrm{y}| > 3$, $|\mathrm{x}| > 19$ метод прогонки устойчив (так как первая и третья системы (5.9) имеют трехдиагональный вид с доминирующей главной диагональю).

В вычислительной математике сложилась традиция сравнивать новый метод с существующими. В рамках теории разностных схем сложность вычислений для решения исходной краевой задачи есть величина $O(mn)$, где m и n — это количество слоев по переменным t и ξ соответственно (на каждом временном слое методом прогонки решается линейная система уравнений с трехдиагональной матрицей). С другой стороны, решение исходной задачи есть сумма решений задач (I) и (II): в первом случае начальные функции имеют специальный вид, а во втором граничные функции постоянны. Хорошо известно, что точное решение задачи (II) допускает явное аналитическое представление в виде ряда Фурье (чего нельзя сказать о задаче (I)). С позиций численного анализа требуется лишь построить полином Фурье, аппроксимирующий этот ряд с заданной точностью, то есть вычислить достаточное количество коэффициентов Фурье. Сложность вычислений есть величина $O(mn)$, где n — количество слагаемых в полиноме, а m — количество узлов численного интегрирования коэффициентов Фурье. Как видим, предлагаемый нами метод имеет очевидные преимущества.

Здесь уместно отметить следующее обстоятельство. В работе мы применяем весьма примитивные (негладкие) сплайны $u \in \sigma_N(\Pi)$: они имеют 2-й порядок и дефект 2 по переменной t, то есть функция u_t разрывна на множестве $\big\{(t,\xi) \in \Pi\colon\ t = \tau_{2k}\big\}_{k=1}^{n}$. Более того, по переменной ξ сплайн имеет всего 4 узла на каждом сечении $t = \tau_i$, $i = 0, 1, \ldots, 2N$. Данный феномен еще подлежит осмыслению: почему-то заданные специальным образом начальные функции $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ порождают такую функцию $\overline{u} : \Pi \to \mathbb{R}$, что все сечения $\xi \to \overline{u}(\tau_i, \xi)$ суть кубические полиномы, и эта функция хорошо аппроксимирует точное решение задачи (I).

Тем не менее получено вполне приемлемое приближенное решение задачи (I). Полагаем, предложенные примитивные сплайны займут достойное место в ряду многочисленных аналогичных конструкций. Например, в 2006 году авторы [10] выложили в Интернет приложение к данной монографии со списком публикаций (в основном, зарубежных), посвященных многомерным сплайнам. В тот момент список содержал более тысячи работ, а авторы обратились к читателям с просьбой дополнить его, указав электронный адрес для переписки. Из многочисленной отечественной и переводной литературы отметим фундаментальные труды [11–16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146–153.

2. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 154–171.
3. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 141–156.
4. Родионов В.И. О решении одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2014. Вып. 1 (43). С. 49–67.
5. Родионова Н.В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего волнового уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 144–154.
6. Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим волновым уравнением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 141–152.
7. Родионов В.И. Об одном методе построения разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2656–2659.
8. Rodionov V.I. On exact solution of optimization problem generated by simplest transfer equation // Современные компьютерные и информационные технологии: сборник трудов международной научной российско-корейской конференции. УрФУ. Екатеринбург, 2011. С. 132–135.
9. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982. 256 с.
10. Lai M.J., Schumaker L.L. Spline functions on triangulations. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 608 p.
11. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 317 с.
12. Михлин С.Г. Вариационно-сеточная аппроксимация // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 48. С. 32–188.
13. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
14. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
15. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. 215 с.
16. Бурова И.Г., Демьянович Ю.К. Минимальные сплайны и их приложения. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 364 с.

Поступила в редакцию 20.09.2014

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

V. I. Rodionov

On the linear algorithm of numerical solution of a boundary value problem for a simple wave equation

Keywords: wave equation, interpolation, approximate spline, tridiagonal matrix, Chebyshev polynomials.

MSC: 41A15

The solution of a boundary value problem for a simple wave equation defined on a rectangle can be represented as a sum of two terms. They are solutions of two boundary value problems: in the first case, the boundary functions are constant, while in the second the initial functions have a special form. Such decomposition allows to apply two-dimensional splines for the numerical solution of both problems. The first problem was studied previously, and an economical algorithm of its numerical solution was developed.

To solve the second problem we define a finite-dimensional space of splines of Lagrangian type, and recommend an optimal spline giving the smallest residual as a solution. We obtain exact formulas for the coefficients of this spline and its residual. The formula for the coefficients of this spline is a linear form of initial finite differences defined on the boundary.

The formula for the residual is a sum of two simple terms and two positive definite quadratic forms of new finite differences defined on the boundary. Elements of matrices of forms are expressed through

Chebyshev polynomials, both matrices are invertible and have the property that their inverses matrices are of tridiagonal form. This feature allows us to obtain upper and lower bounds for the spectrum of matrices, and to show that the residual tends to zero when the numerical problem dimension increases. This fact ensures the correctness of the proposed algorithm of numerical solution of the second problem which has linear computational complexity.

REFERENCES

1. Rodionov V.I. On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 146–153 (in Russian).
2. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, no. 4, pp. 154–171 (in Russian).
3. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 141–156 (in Russian).
4. Rodionov V.I. On solution of one optimization problem generated by simplest heat conduction equation, *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2014, no. 1 (43), pp. 49–67 (in Russian).
5. Rodionova N.V. Exact formulas for coefficients and residual of optimal approximate spline of simplest wave equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 144–154 (in Russian).
6. Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest wave equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 141–152 (in Russian).
7. Rodionov V.I. A method for constructing difference schemes, *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 2656–2659 (in Russian).
8. Rodionov V.I. On exact solution of optimization problem generated by simplest transfer equation, *Sovremennye Komp'yuternye i Informatsionnye Tekhnologii: Tez. Dokl. Mezhdunarodnoi Konferentsii* (Advanced Computer and Information Technologies: Abstracts of Int. Conf.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 2011, pp. 132–135.
9. Riordan J. *Combinatorial identities*, New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, 1968, 270 p. Translated under the title *Kombinatornye tozhdestva*, Moscow: Nauka, 1982, 256 p.
10. Lai M.J., Schumaker L.L. *Spline functions on triangulations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 608 p.
11. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *The theory of splines and their applications*, New York–London: Academic Press, 1967, 297 p. Translated under the title *Teoriya splainov i ee prilozheniya*, Moscow: Mir, 1972, 317 p.
12. Mikhlin S.G. Variational-net approximation, *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova*, 1974, vol. 48, pp. 32–188 (in Russian).
13. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* (Splines in computing mathematics), Moscow: Nauka, 1976, 248 p.
14. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* (Methods of spline functions), Moscow: Nauka, 1980, 352 p.
15. Vasilenko V.A. *Splain-funktsii: teoriya, algoritmy, programmy* (Spline functions: theory, algorithms and programs), Novosibirsk: Nauka, 1983, 215 p.
16. Burova I.G., Dem'yanovich Yu.K. *Minimal'nye splainy i ikh prilozheniya* (Minimal splines and their applications), St. Petersburg: St. Petersburg State University, 2010, 364 p.

Received 20.09.2014

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Dean, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru