УДК 519.816

© *В. И. Ухоботов, Е. С. Михайлова*

О СРАВНЕНИИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В задачах принятия решений, когда лицо, принимающее решение, получает информацию о возможном выигрыше в результате выбора стратегии в виде нечеткого числа, возникает проблема сравнения нечетких чисел. При выборе того или иного метода сравнения нечетких чисел нужно исходить из специфики задачи. Предлагаемый в статье подход сравнения нечетких чисел основан на сравнении множеств уровня. Эти множества уровня являются отрезками. При сравнении отрезков, в которых может находиться величина выигрыша лица, принимающего решение, берется один из критериев, применяемых в задачах принятия решения при наличии неопределенности (критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица и другие). Результаты сравнения по множествам уровня усредняются. Нечеткие числа сравниваются с помощью этих средних значений. Дана геометрическая интерпретация полученного результата, которая сводит сравнение нечетких чисел к сравнению величин площадей соответствующих фигур, образованных графиками функций принадлежности нечетких чисел. В качестве примера рассмотрены нечеткие числа с колоколообразными и трапецеидальными функциями принадлежности.

Ключевые слова: нечеткое число, функция принадлежности, множества уровня.

DOI: 10.20537/vm160108

Введение

Для целого класса экономических и социальных задач информация о переменных носит нечеткий, расплывчатый характер. Для исследования таких задач используются нечеткие числа. С момента опубликования Л. Заде своей работы по нечетким множествам [1] вышло большое количество работ, в которых рассматриваются действия с нечеткими числами [2, 3].

К настоящему времени предложено достаточное количество различных методов сравнения нечетких чисел [4]. Ни один из них не является универсальным. Возникает проблема с интерпретацией тех или иных методов, не все они понятны интуитивно.

В данной работе продолжаются исследования, начатые в работах [5–8].

§ 1. Постановка задачи

Пусть задана функция $\mu\colon R \to [0;1]$. Нечетким числом A называется [1] совокупность пар вида $\big(x \mid \mu_A(x)\big)$, $x \in R$. Функция $\mu_A(x)$ называется функцией принадлежности нечеткого числа A, а ее значение на конкретном числе $x \in R$ называется степенью (или мерой) принадлежности этого числа x нечеткому числу A.

Для каждого числа $\alpha \in [0;1]$ обычное множество $A(\alpha) = \Big\{x \in R\colon \mu_A(x) \geqslant \alpha\Big\}$ называется множеством уровня нечеткого числа A. Эти множества уровня удовлетворяют следующим свойствам:

$$A(0) = X; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \Rightarrow A(\beta) \subset A(\alpha); \quad 0 < \alpha \leqslant 1 \Rightarrow \bigcap_{0 \leqslant t < \alpha} A(t) = A(\alpha). \tag{1.1}$$

Пусть при каждом $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ определено множество $A(\alpha) \subset R$. Если совокупность этих множеств удовлетворяет свойствам (1.1), то оно является семейством множеств уровня нечеткого числа A, функция принадлежности которого равна

$$\mu_A(x) = \sup\Big\{\alpha \in [0;1] : x \in A(\alpha)\Big\}.$$

Поэтому нечеткое число A можно задать семейством множеств $A(\alpha) \subset R$ при каждом $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, которые удовлетворяют свойствам (1.1).

Будем рассматривать нечеткие числа, у которых при любом $0 < \alpha \leqslant 1$ множества уровня являются отрезками

$$A(\alpha) = [g_A(\alpha), G_A(\alpha)]\,. \tag{1.2}$$

Функции $g_A, G_A : (0,1] \to R$ удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{gathered} g_A(\alpha) \leqslant G_A(\alpha) \quad \text{при любом} \quad 0 < \alpha \leqslant 1; \\ g_A(\alpha_1) \leqslant g_A(\alpha_2),\ G_A(\alpha_2) \leqslant G_A(\alpha_1) \quad \text{при любых} \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 1; \\ \lim_{t\to\alpha-0} g_A(t) = g_A(\alpha),\ \lim_{t\to\alpha-0} G_A(t) = G_A(\alpha) \quad \text{при любом числе} \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

При выполнении условий (1.3) отрезки (1.2) удовлетворяют свойствам (1.1).

§ 2. Сравнение отрезков

Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР), может выбрать одну из двух стратегий. Цель ЛПР заключается в том, чтобы возможный выигрыш $x \in R$, который он получит при выборе i-ой стратегии, был как можно больше. Информацию о возможном результате он получает в виде нечеткого числа A_i.

Зафиксируем число $0 < \alpha \leqslant 1$ и будем считать, что ЛПР интересуют только те возможные выигрыши, значения которых $x \in A_i(\alpha)$, $i = 1, 2$. Приходим к задаче о сравнении отрезков $[g_1(\alpha), G_1(\alpha)]$ и $[g_2(\alpha), G_2(\alpha)]$. Здесь обозначено $g_i(\alpha) = g_{A_i}(\alpha)$, $G_i(\alpha) = G_{A_i}(\alpha)$.

Если ЛПР выбрал i-ый отрезок, то возможное значение его выигрыша равно

$$Q(i, y) = g_i(\alpha) + (G_i(\alpha) - g_i(\alpha))\, y, \quad y \in [0, 1]. \tag{2.1}$$

Предположим, что ЛПР при выборе отрезка исходит из наихудшего варианта, руководствуясь критерием Вальда [9]. Тогда отрезок выбирается из условия

$$\min_{0\leqslant y\leqslant 1} Q(i, y) = g_i(\alpha) \to \max, \quad i = 1, 2.$$

Если ЛПР при выборе отрезка исходит из наилучшего варианта, руководствуясь принципом «крайнего оптимизма», то отрезок выбирается из условия

$$\max_{0\leqslant y\leqslant 1} Q(i, y) = G_i(\alpha) \to \max, \quad i = 1, 2.$$

При использовании критерия Гурвица выбирается число $\gamma \in (0, 1)$, являющееся показателем оптимизма, и рассматривается задача

$$(1-\gamma) \min_{0\leqslant y\leqslant 1} Q(i, y) + \gamma \max_{0\leqslant y\leqslant 1} Q(i, y) = (1-\gamma) g_i(\alpha) + \gamma G_i(\alpha) \to \max, \quad i = 1, 2.$$

Если ЛПР применяет критерий Лапласа, то получим задачу

$$L_i(\alpha) = \int_0^1 \big(g_i(\alpha) + \big(G_i(\alpha) - g_i(\alpha)\big)\, y\big)\, dy = \frac{1}{2} g_i(\alpha) + \frac{1}{2} G_i(\alpha) \to \max, \quad i = 1, 2.$$

При применении критерия Ходжа–Лемана выбирается число $\lambda \in (0; 1)$ и рассматривается задача

$$(1-\lambda) \min_{0\leqslant y\leqslant 1} Q(i, y) + \lambda L_i(\alpha) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) g_i(\alpha) + \frac{\lambda}{2} G_i(\alpha) \to \max, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим случай, когда ЛПР при выборе отрезка руководствуется принципом минимального риска. В этом случае он применяет критерий Сэвиджа [9]. Разность

$$\psi(i,y)=\max_{k=1,2}Q(k,y)-Q(i,y)$$

выражает «сожаление» ЛПР о том, что он выбрал i-й отрезок. Максимальное сожаление (функция риска) равно

$$\omega(i)=\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\psi(i,y)=\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\left(\max_{k=1,2}Q(k,y)-Q(i,y)\right).$$

Переставляя местами операции взятия максимумов и учитывая формулу (2.1), получим, что

$$\omega(i)=\max_{k=1,2}\max\left(G_k(\alpha)-G_i(\alpha);g_k(\alpha)-g_i(\alpha)\right).$$

Стало быть,

$$\begin{aligned}\omega(1)&=\max\left(0;G_2(\alpha)-G_1(\alpha);g_2(\alpha)-g_1(\alpha)\right),\\ \omega(2)&=\max\left(0;G_1(\alpha)-G_2(\alpha);g_1(\alpha)-g_2(\alpha)\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Лемма 1. *Для любых чисел $\beta\in R$ и $\chi\in R$ неравенство*

$$\max\left(0;\beta;\chi\right)\geqslant\max\left(0;-\beta;-\chi\right)\tag{2.3}$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\beta+\chi\geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta+\chi\geqslant 0$. Если $\beta\geqslant 0$ и $\chi\geqslant 0$, то неравенство (2.3) является очевидным. Пусть, например, $\beta>0$ и $\chi\leqslant 0$. В этом случае левая часть неравенства (2.3) равна β, а правая равна $(-\chi)$. Из неравенства $\beta+\chi\geqslant 0$ получим неравенство (2.3).

Пусть выполнено неравенство (2.3). Очевидно, что нужно рассмотреть случай, когда числа β и χ имеют разные знаки. Пусть, например, $\beta\geqslant 0$ и $\chi\leqslant 0$. Тогда из неравенства (2.3) получим, что $\beta\geqslant-\chi$. □

Из доказанной леммы и из формул (2.2) получим, что

$$\omega(1)\geqslant\omega(2)\Leftrightarrow g_1(\alpha)+G_1(\alpha)\leqslant g_2(\alpha)+G_2(\alpha).$$

ЛПР минимизирует значение функции риска. Поэтому имеем задачу

$$\frac{1}{2}g_i(\alpha)+\frac{1}{2}G_i(\alpha)\to\max,\quad i=1,2.$$

Таким образом, если ЛПР при выборе отрезка руководствуется одним из рассмотренных критериев, то он решает задачу

$$(1-\nu)g_i(\alpha)+\nu G_i(\alpha)\to\max,\quad i=1,2$$

при заданном числе $\nu\in[0;1]$.

§ 3. Сравнение нечетких чисел

Пусть заданы два нечетких числа A и B. Возьмем разбиение $0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_s<\alpha_{s+1}<\cdots<\alpha_{n+1}=1$. Считаем, что для значения α_s отрезок $[g_A(\alpha_s),G_A(\alpha_s)]$ предпочтительнее отрезка $[g_B(\alpha_s),G_B(\alpha_s)]$ тогда и только тогда, когда

$$(1-\nu)g_A(\alpha_s)+\nu G_A(\alpha_s)\geqslant(1-\nu)g_B(\alpha_s)+\nu G_B(\alpha_s).$$

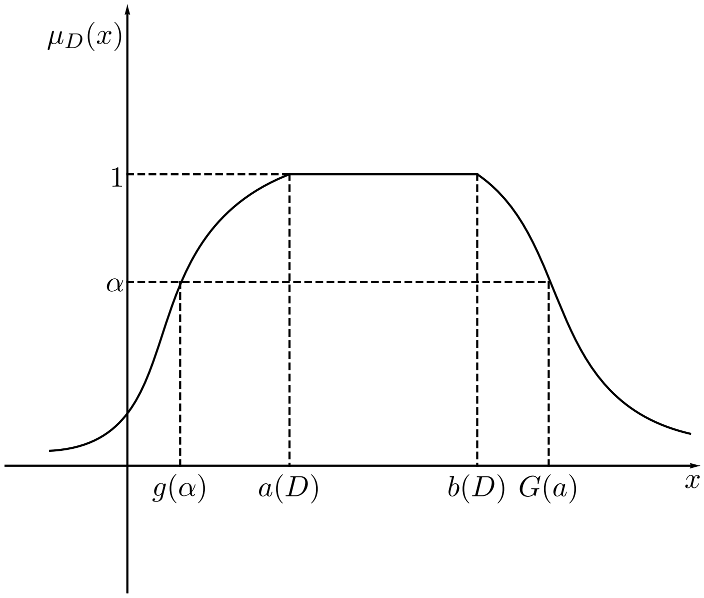

Рис. 1. График функции принадлежности колоколообразного нечеткого числа

Умножим каждое из этих неравенств на неотрицательное число $\alpha_{s+1} - \alpha_s$. Сложим полученные неравенства и перейдем к пределу при $\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant n} (\alpha_{s+1} - \alpha_s) \to 0$. Тогда, предполагая существование соответствующих интегралов, получим неравенство

$$c(A;\nu) \geqslant c(B;\nu). \tag{3.1}$$

Здесь обозначено

$$c(D;\nu) = \int_0^1 \big((1-\nu)g_D(\alpha) + \nu G_D(\alpha)\big)\,d\alpha, \quad D = A, B. \tag{3.2}$$

Определение 1. При заданном числе $\nu \in [0,1]$ нечеткое число A *предпочтительней* нечеткого числа B тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (3.1).

Будем рассматривать нечеткие числа $D = A, B$, у которых высота [6] $\operatorname{hgt} D = \sup\limits_{x \in R} \mu_D(x) = 1$. Тогда из условий (1.3) следует, что существуют числа $a(D) \leqslant b(D)$ такие, что ядро [6] core $\big\{x \in R : \mu_D(x) = 1\big\} = [a(D), b(D)]$.

Следовательно, $\mu_D(x) = 1$ при $x \in [a(D), b(D)]$ и $\mu_D(x) < 1$ при $x \notin [a(D), b(D)]$. График такой функции принадлежности приведен на рис. 1.

Обозначим

$$S^{(1)}(D) = \int_{-\infty}^{a(D)} \mu_D(x)\,dx, \qquad S^{(2)}(D) = \int_{b(D)}^{+\infty} \mu_D(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Из рис. 1 видно, что

$$S^{(1)}(D) = \int_0^1 \big(a(D) - g_D(\alpha)\big)\,d\alpha = a(D) - \int_0^1 g_D(\alpha)\,d\alpha,$$
$$S^{(2)}(D) = \int_0^1 \big(G_D(\alpha) - b(D)\big)\,d\alpha = \int_0^1 G_D(\alpha)\,d\alpha - b(D).$$

Отсюда и из формулы (3.2) получим, что

$$c(D;\nu) = a(D) - \int_{-\infty}^{a(D)} \mu_D(x)\,dx + \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_D(x)\,dx. \tag{3.4}$$

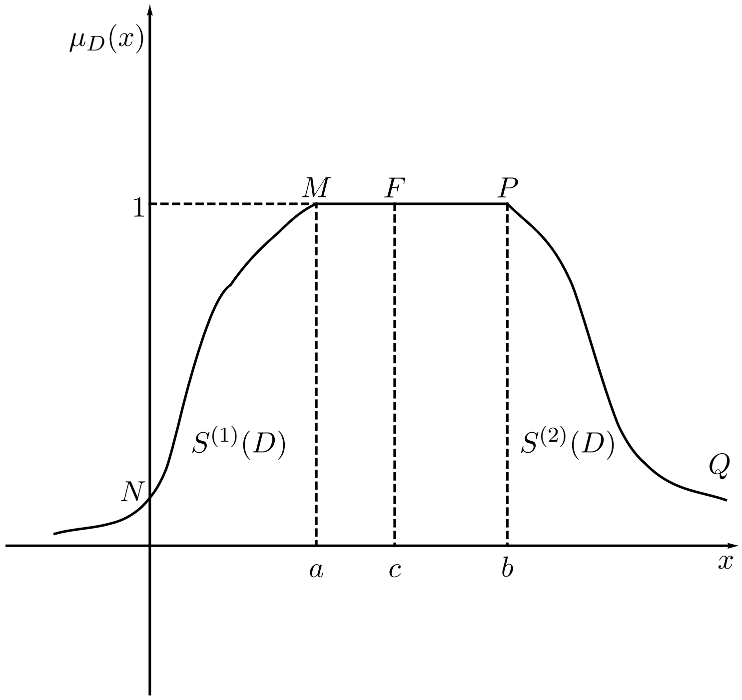

Рис. 2. Геометрическая интерпретация

Проведем анализ формулы (3.4). Пусть ЛПР руководствуется критерием Вальда. Тогда в формуле (3.4) нужно положить $\nu = 0$. Используя обозначения (3.3), получим

$$c(D;\nu) = a(D) - S^{(1)}(D).$$

Максимизируя эту величину, ЛПР максимизирует левый конец $\operatorname{core} D$ и минимизирует площадь фигуры, ограниченной осью x и кривой $NMa(D)$ (см. рис. 2).

Если ЛПР руководствуется критерием «крайнего оптимизма», то в формуле (3.4) нужно положить $\nu = 1$. Получим

$$c(D;\nu) = b(D) + S^{(2)}(D).$$

Максимизируя эту величину, ЛПР максимизирует правый конец $\operatorname{core} D$ и максимизирует площадь фигуры, ограниченной осью x и кривой $b(D)PQ$ (см. рис. 2).

При применении критерия Лапласа или критерия Сэвиджа в формуле (3.4) нужно положить $\nu = \frac{1}{2}$. Тогда из (3.3) и (3.4) получим

$$c(D;\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Big(a(D) - S^{(1)}(D)\Big) + \frac{1}{2}\Big(b(D) + S^{(2)}(D)\Big). \tag{3.5}$$

Предложим, что

$$S^{(1)}(D) - (b(D) - a(D)) \leqslant S^{(2)}(D) \leqslant S^{(1)}(D) + (b(D) - a(D)). \tag{3.6}$$

Как видно из рис. 2, левое неравенство означает, что площадь фигуры, образованной осью x и кривой $NMa(D)$, не превосходит площадь фигуры, образованной осью x и кривой $a(D)MPQ$. Правое неравенство в (3.5) означает, что площадь фигуры, образованной осью x и кривой $b(D)PQ$, не превосходит площади фигуры, образованной осью x и кривой $NMPb(D)$.

Из неравенств (3.6) следует, что число $c = c\left(D;\frac{1}{2}\right)$ принадлежит отрезку $[a(D), b(D)]$. Из формулы (3.5) следут, что прямая cF делит фигуру, образованную осью x и кривой $NMPQ$, на две равновеликие по площади части (см. рис. 2).

§ 4. Сравнение колоколообразных и трапецеидальных нечетких чисел

Рассмотрим колоколообразное нечеткое число D, у которого функция принадлежности имеет следующий вид:

$$\mu_D(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right)^2\right) \text{ при } x \leqslant a; \qquad \mu_D(x) = 1 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b;$$
$$\mu_D(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-b}{\delta}\right)^2\right) \text{ при } b \leqslant x.$$

Здесь числа $a \leqslant b$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ заданы. График этой функции представлен на рис. 1. Лингвистическое описание таких нечетких чисел имеет вид $D =$ «примерно на отрезке $[a, b]$». Используя формулу для значения интеграла Лапласа [10], получим

$$\int_{-\infty}^{a} \mu_D(x)\,dx = \epsilon \int_{-\infty}^{0} \exp(-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\epsilon; \quad \int_{b}^{+\infty} \mu_D(x)\,dx = \delta \int_{-\infty}^{0} \exp(-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_D(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\epsilon + \delta) + b - a.$$

Отсюда и из формулы (3.4), получим, что

$$c(D; \nu) = (1-\nu)a + \nu b - (1-\nu)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\epsilon + \nu\frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta.$$

Полагая в этой формуле $\nu = 0$, получим, что колоколообразное нечеткое число A предпочтительнее колоколообразного нечеткого числа B по критерию Вальда тогда и только тогда, когда

$$a(A) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\epsilon(A) \geqslant a(B) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\epsilon(B).$$

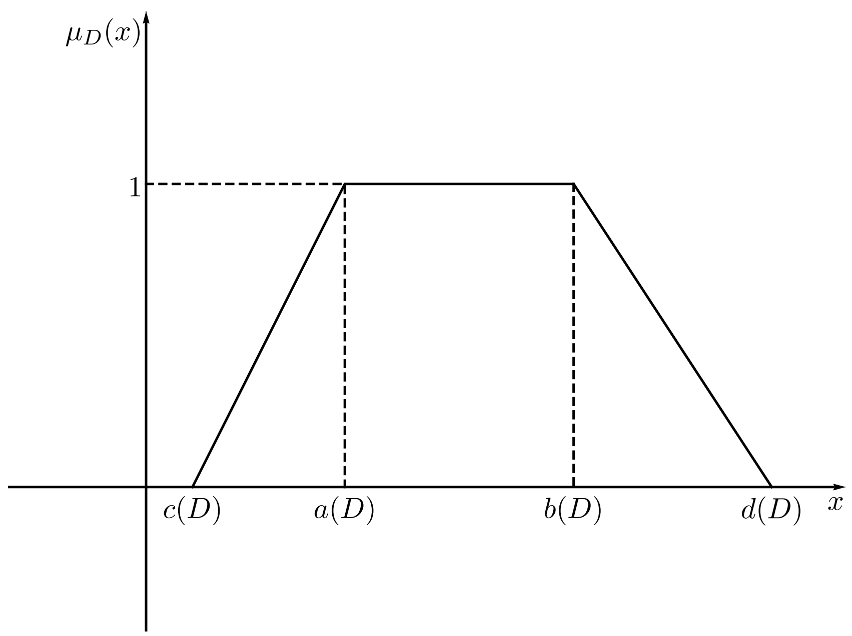

Рис. 3. График функции принадлежности трапецеидального нечеткого числа

При $\nu = 1$ получим условие предпочтительности по критерию «крайнего оптимизма»:

$$b(A) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(A) \geqslant b(B) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(B).$$

Полагая $\nu = 0{,}5$, получим условие предпочтительности по критериям Лапласа и Сэвиджа:

$$a(A) + b(A) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\epsilon(A) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(A) \geqslant a(B) + b(B) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\epsilon(B) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(B).$$

Рассмотрим теперь трапецеидальные нечеткие числа. График функции принадлежности такого нечеткого числа D приведен на рис. 3. Лингвистическое описание таких нечетких чисел имеет вид $D = \{$примерно на отрезке $[a, b]$, но не более d и не менее $c\}$.

Формула (3.4) принимает вид

$$c(D;\nu) = \frac{1}{2}\left(a(D) + c(D) + \nu\left(b(D) + d(D) - a(D) - c(D)\right)\right).$$

Следовательно,

$$c(D;0) = \frac{a(D) + c(D)}{2}, \qquad c(D;1) = \frac{b(D) + d(D)}{2},$$
$$c(D;\frac{1}{2}) = \frac{c(D) + a(D) + b(D) + d(D)}{4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. № 3. P. 338–353.
2. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using alpha-cut method: a comparative study // International Journal of Latest Trends in Computing. 2011. Vol. 2. № 1. P. 99–107.
3. Bansal A. Trapezoidal fuzzy numbers (a, b, c, d): arithmetic behavior // International Journal of Physical and Mathematical Sciences. 2011. Vol. 2. № 1. P. 39–44.
4. Chen S.-J.J., Hwang C.L. Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications. New York: Springer, 1992. 552 p.
5. Ухоботов В.И., Щичко П.В. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2011. Вып. 10. С. 54–62.
6. Ухоботов В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учебное пособие. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2011. 245 с.
7. Галлямов Е.Р., Ухоботов В.И. Компьютерная реализация операций с нечеткими числами // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2014. Т. 3. № 3. С. 97–108.
8. Ухоботов В.И., Михайлова Е.С. Об одном подходе к сравнению нечетких чисел в задачах принятия решений // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2015. Т. 7. № 1. С. 32–37.
9. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. М.: Ленанд, 2012. 304 с.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 266 с.

Поступила в редакцию 25.02.2016

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: ukh@csu.ru

Михайлова Екатерина Сергеевна, аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
E-mail: mihailova.katherine@gmail.com

V. I. Ukhobotov, E. S. Mikhailova

Comparison of fuzzy numbers in decision-making problems

Keywords: fuzzy number, membership function, level set.

MSC: 03B52, 68T37

The paper deals with decision-making problems, when a decision maker receives information about possible pay-off as a result of a strategy selection. This information can be given as a fuzzy number and the problem of its comparison appears. A specific character of the problem is a main factor to choose the method of the fuzzy numbers comparison. In this paper an approach of comparing fuzzy numbers has been proposed, it's based on the comparison of α-cuts. These α-cuts are segments. During the comparison of the segments, each segment can contain a merit value; one of the decision-making criteria is chosen (Wald's maximin model, Regret theory models, Routh–Hurwitz stability criterion etc.). The results of the comparison are averaged out. Fuzzy numbers are compared according to these mean values. According to geometrical interpretation which has been given, the comparison of fuzzy numbers is equivalent to the comparison of figures' areas. These areas are formed by graphics of membership functions of the fuzzy numbers. As an example trapezoidal and bell-shaped fuzzy numbers are examined.

REFERENCES

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets, *Information and Control*, 1965, vol. 8, no. 3, pp. 338–353.
2. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using alpha-cut method: a comparative study, *International Journal of Latest Trends in Computing*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 99–107.
3. Bansal A. Trapezoidal fuzzy numbers (a, b, c, d): arithmetic behavior, *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 39–44.
4. Chen S.-J.J., Hwang C.L. *Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications*, New York: Springer, 1992, 552 p.
5. Ukhobotov V.I., Shchichko P.V. An approach to ranking fuzzy numbers, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program.*, 2011, vol. 10, pp. 54–62 (in Russian).
6. Ukhobotov V.I. *Izbrannye glavy teorii nechetkikh mnozhestv: uchebnoe posobie* (The selected chapters of the theory of fuzzy sets: study guide), Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2011, 245 p.
7. Gallyamov E.R., Ukhobotov V.I. Computer implementation of operations with fuzzy numbers, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Vychisl. Mat. Inform.*, 2014, vol. 3, no. 3, pp. 97–108 (in Russian).
8. Ukhobotov V.I., Mihailova E.S. An approach to the comparison of fuzzy numbers in decision-making problems, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Fiz.*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 32–37 (in Russian).
9. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N. *Uravnoveshivanie konfliktov i prilozheniya* (Equilibrating conflicts and applications), Moscow: Lenand, 2012, 304 p.
10. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki. Tom 2* (The course of higher mathematics. Vol. 2), Moscow: Nauka, 1974, 226 p.

Received 25.02.2016

Ukhobotov Viktor Ivanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabink State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: ukh@csu.ru

Mikhailova Ekaterina Sergeevna, Post-Graduate Student, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabink State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
E-mail: mihailova.katherine@gmail.com