

УДК 514.177.2

© В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ХАУСДОРФОВА
РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ПОДВИЖНЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ¹**

Исследована задача о минимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многоугольниками. Считается, что один из них может совершать произвольные движения на плоскости, включая параллельный перенос и вращение с центром в любой точке. Другой многоугольник считается при этом неподвижным. Разработаны и программно реализованы итерационные алгоритмы поэтапного сдвига и вращения многоугольника, обеспечивающие уменьшение хаусдорфова расстояния между ним и неподвижным многоугольником. Доказаны теоремы о корректности алгоритмов для широкого класса случаев. При этом по существу используются геометрические свойства чебышёвского центра компактного множества и дифференциальные свойства функции евклидова расстояния до выпуклого множества. При реализации программного комплекса предусмотрена возможность многократного запуска с целью выявления наилучшего из найденных положений многоугольника. Проведено моделирование ряда примеров.

Ключевые слова: выпуклый многоугольник, хаусдорфово расстояние, минимизация, чебышёвский центр, производная по направлению.

DOI: [10.20537/vm170108](https://doi.org/10.20537/vm170108)**Введение**

В задачах теории управления [1] часто требуется найти расположение множеств, обеспечивающих наибольшую степень их близости. Наиболее часто рассматриваемые аппроксимации различных множеств на плоскости — это выпуклые [2] многоугольники. Естественно, возникает вопрос об отыскании таких движений на плоскости, которые переводят подвижный многоугольник в то положение, в котором он в наибольшей степени близок к другому многоугольнику. Критерием оценки положения многоугольников естественно выбрать хаусдорфово расстояние [3] между ними.

§ 1. Постановка задачи

Ограничимся рассмотрением множеств на плоскости. Пусть заданы два произвольных многоугольника $A, B \subset \mathbb{R}^2$. Требуется найти их взаимное расположение, обеспечивающее минимальность хаусдорфова расстояния между ними:

$$d(A, B) = \max\{h(A, B), h(B, A)\}.$$

Здесь

$$h(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\| \quad (1.1)$$

есть хаусдорфово отклонение множества A от B .

Полагаем, что многоугольник A неподвижен, ко второму многоугольнику B мы можем применять параллельный перенос и поворот с центром в произвольной точке (хотя любое движение может быть реализовано как последовательный сдвиг и поворот с центром в некоторой

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10018).

заданной точке, например начале координат). Задача сводится к тому, чтобы вычислить такие $x^0 \in \mathbb{R}^2$ и $\varphi^0 \in [0, 2\pi]$, для которых

$$d(A, \{x^0\} + \Pi(\varphi^0)B) = \min_{x^0 \in \mathbb{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi]} d(A, \{x\} + \Pi(\varphi)B), \quad (1.2)$$

где

$$\Pi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \Pi(\varphi)B = \{\Pi(\varphi)b : b \in B\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Данная задача является расширением рассматриваемых ранее авторами в работах [4, 5] вопросов об отыскании такого ориентированного множества $\{x^0\} + B$, что хаусдорфово расстояние между этим множеством и фиксированным множеством A было минимальным. Естественно, случай с вращением множества намного более интересен.

§ 2. Методы решения задачи

В общем случае решение задачи возможно только численными методами. Для описания этих методов авторам понадобилось ввести ряд вспомогательных понятий.

2.1. Методы параллельного сдвига

Приведем некоторые определения, необходимые для описания итерационного алгоритма решения задачи, сформулированной в § 1.

Определение 1. *Проекцией* $\pi(a, B)$ точки a на выпуклое компактное множество B называется ближайшая к a в евклидовой метрике точка из B .

Заметим, что если множество B не выпуклое, то ближайших к a точек может быть более одной [2], но в случае выпуклого множества она всегда единственна.

Определение 2. *Чебышёвским центром* [6] компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется такая точка $c(M)$, что

$$h(M, \{c(M)\}) = \inf\{h(M, \{x\}) : x \in \mathbb{R}^2\}. \quad (2.1)$$

Величина (2.1) называется *чебышёвским радиусом* $r(M)$ компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Для любого выпуклого множества $Y \subset \mathbb{R}^2$ функция расстояния до него от точки $x \in \mathbb{R}^2$, $\rho(x, Y) = \min_{y \in Y} \|x - y\|$, является выпуклой. Из выпуклого анализа известно (см., например, [7]), что максимальное значение выпуклой функции на выпуклом многоугольнике достигается в вершинах этого многоугольника. Таким образом, в формуле (1.1) можно в качестве точек максимума евклидового расстояния до другого многоугольника перебирать не все точки многоугольников, а только их вершины a_i и b_j , т. е.

$$a_i \in A, \quad i = 1, \dots, N_a; \quad b_j \in B, \quad j = 1, \dots, N_b; \\ d(A, B) = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, N_a} \rho(a_i, B), \max_{j=1, \dots, N_b} \rho(b_j, A) \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь N_a и N_b — количество вершин многоугольников A и B соответственно. Везде в дальнейшем a_i и b_j будут использоваться для обозначения вершин многоугольников A и B .

Основу итерационного алгоритма составляет схема, состоящая из поочередного применения параллельного переноса и поворота многоугольника B . Данные преобразования превращают его в конгруэнтную ему фигуру.

Как и в работе [8], сдвиг, переводящий B в новый многоугольник \overline{B} , осуществляется по формуле

$$\overline{B} = B + \{c(W(A, B))\}, \quad (2.3)$$

где

$$W(A, B) = \{(a_i - \pi(a_i, B)) : i = 1, \dots, N_a\} \cup \{-(b_j - \pi(b_j, A)) : j = 1, \dots, N_b\}.$$

Теорема 1. Для произвольных выпуклых многоугольников A и B и полученного по формуле (2.3) множества \overline{B} выполняется оценка

$$d(A, \overline{B}) \leq d(A, B). \quad (2.4)$$

Доказательство. Введем функцию $F(x) = d(A, B + \{x\})$ — хаусдорфово расстояние между многоугольниками A и $B + \{x\}$. Равенство (2.2) можно записать в виде

$$F(\mathbf{0}) = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, N_a} \rho(a_i, B), \max_{j=1, \dots, N_b} \rho(b_j, A) \right\}.$$

Рассмотрим множество $W(A, B)$. Оно состоит из всех векторов, соединяющих точки одного многоугольника с их проекциями на второй многоугольник. По его построению выполняется равенство

$$F(\mathbf{0}) = \max \{ \|w_i\| : w_i \in W(A, B) \}.$$

Перейдем теперь к оценке величины $F(x)$. По построению

$$\forall i = 1, \dots, N_a \quad (\pi(a_i, B) + x) \in (B + \{x\}), \quad \forall j = 1, \dots, N_b \quad (b_j + x) \in (B + \{x\}).$$

Значит, можно записать неравенство для хаусдорфового расстояния:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{0}) &= \max \left\{ \max_{i=1, \dots, N_a} \rho(a_i, B + \{x\}), \max_{j=1, \dots, N_b} \rho(b_j + x, A) \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \max_{i=1, \dots, N_a} \|a_i - (\pi(a_i, B) + x)\|, \max_{j=1, \dots, N_b} \|\pi(b_j, A) - (b_j + x)\| \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Правая часть неравенства (2.5) может быть записана как

$$\zeta(x) = \max \{ \|w_i - x\| : w_i \in W(A, B) \},$$

поскольку по построению она является максимумом из норм векторов, принадлежавших $W(A, B)$ и сдвинутых на $-x$. По своей структуре функция $\zeta(x)$ совпадает с хаусдорфовым отклонением $h(W(A, B), \{x\})$. Следовательно, функция достигает строго минимума в точке $c(W(A, B))$. Получаем

$$F(x) \leq \zeta(x) \leq \zeta(\mathbf{0}) = d(A, B),$$

что совпадает с (2.4). □

Замечание 1. Если $\overline{B} \neq B$, то неравенство (2.4) является строгим. Действительно, в этом случае точка x является чебышёвским центром множества $W(A, B)$ и не совпадает с $\mathbf{0}$. Для любой точки x^* , не совпадающей с $x = c(W(A, B))$, выполняется неравенство $h(W(A, B), \{x^*\}) > h(W(A, B), \{x\})$, поскольку чебышёвский центр множества в евклидовом пространстве единственный. А значит, можно записать оценку

$$F(x) \leq \zeta(x) < \zeta(\mathbf{0}) = d(A, B).$$

2.2. Методы поворота

Рассмотрим сначала поворот многоугольника B с центром в заданной точке p на угол φ против часовой стрелки. Будем обозначать получившийся многоугольник так:

$$\text{rot}(B, p, \varphi) \triangleq \{p\} + \Pi(\varphi)(B - \{p\}),$$

а хаусдорфово расстояние (при некотором заданном p) следующим образом:

$$\chi(\varphi) = d(A, \text{rot}(B, p, \varphi)).$$

Выделим то направление, в котором надо вращать многоугольник B для минимизации $\chi(\varphi)$.

Введем несколько вспомогательных функций (при некотором фиксированном центре поворота p):

$$f_i^a(\varphi) = \rho(a_i, \text{rot}(B, p, \varphi)), \quad i = \overline{1, N_A},$$

$$f_j^b(\varphi) = \rho(\text{rot}(b_j, p, \varphi), A), \quad j = \overline{1, N_B},$$

$$\sigma_i^a = \text{sign}((a_i - p) \wedge (\pi(a_i, B) - p)), \quad i = \overline{1, N_A}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_j^b = \text{sign}((\pi(b_j, A) - p) \wedge (b_j - p)), \quad j = \overline{1, N_B}. \quad (2.7)$$

Здесь $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ — кросс-произведение векторов,

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t < 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциальные свойства функций $f_j^b(\varphi)$, $j = \overline{1, N_B}$, для которых имеет место $f_j^b(0) > 0$, в точке $\varphi = 0$. По сути, они есть функции евклидова расстояния от точки, расположенной на окружности $\partial O(p, \|p - b_j\|)$ под углом φ к точке b_j , до множества A (здесь $O(p, r)$ означает круг радиуса r с центром в точке p , а $\partial O(p, r)$ — ограничивающую его окружность). Поскольку проекция $\pi(b_j, A)$ является единственной и не совпадает с b_j , то функция $u_a(x) = \rho(x, A)$ в b_j имеет дифференциал (подробнее см. [7])

$$\text{grad } u_a(b_j) = \frac{b_j - \pi(b_j, A)}{\|b_j - \pi(b_j, A)\|}.$$

При этом вектор v касательной к окружности $\partial O(p, r)$, где $r = \|p - b_j\|$, в точке b_j , сонаправленный с направлением увеличения угла φ , сонаправлен вектору $b_j - \pi(b_j, A)$, повернутому на $\pi/2$ против часовой стрелки (см. рис. 1). Значит, производная функции по направлению v имеет вид (см. [9])

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_a(x)}{dv} \right|_{x=b_j} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \frac{u_a(b_j + \lambda v) - u_a(b_j)}{\lambda} = \\ &= \langle \text{grad } u_a(b_j), v \rangle = \|\text{grad } u_a(b_j)\| \cdot \|v\| \cos \angle(v, \text{grad } u_a(b_j)) = \cos \angle(v, b_j - p). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Знак $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов, $\angle(\cdot, \cdot)$ — угол между ними. Величина (2.8) положительна в том случае, если вращение от вектора $b_j - p$ к $b_j - \pi(b_j, A)$ направлено против часовой стрелки, и отрицательна, если вращение идет по часовой стрелке. В случае, если $b_j - p$ и $b_j - \pi(b_j, A)$ параллельны, выражение (2.8) равно нулю.

Перейдем теперь от оценки производных по направлениям функции $u_a(x)$ к оценке производной функции $f_j^b(\varphi)$. Рассмотрим точку $b(\varphi) = \text{rot}(b_j, p, \varphi)$, в которую переходит b_j при повороте на угол φ . При достаточно малых $\varphi > 0$ ее проекция $\pi(b(\varphi), L)$ на луч $L = \{l \in \mathbb{R}^2: l = b_j + \lambda v, \lambda \geq 0\}$ лежит на перпендикуляре, опущенном из $b(\varphi)$ на прямую, содержащую луч L . По построению это означает выполнение равенств

$$\pi(b(\varphi), L) = b_j + r \sin(\varphi) v \quad (2.9)$$

и

$$\|b(\varphi) - \pi(b(\varphi), L)\| = r(1 - \cos(\varphi)). \quad (2.10)$$

Поскольку евклидова функция расстояния до множества липшицева, с константой липшицевости 1 (см. [9]), то можно записать равенство

$$u_a(b(\varphi)) = u_a(\pi(b(\varphi), L)) + \omega(\varphi) \|b(\varphi) - \pi(b(\varphi), L)\|,$$

где $|\omega(\varphi)| \leq 1$ при $\forall \varphi$. Подставив значение расстояния между точками из формулы (2.10), получим

$$u_a(b(\varphi)) = u_a(\pi(b(\varphi), L)) + \omega(\varphi)(1 - \cos(\varphi))r. \quad (2.11)$$

Если рассмотреть предел выражения (2.11) при стремлении φ к нулю, учитывая выражение (2.9), можно записать

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{u_a(b(\varphi)) - u_a(b_j)}{\varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{u_a(\pi(b(\varphi), L)) + \omega(\varphi)(1 - \cos(\varphi))r - u_a(b_j)}{\varphi} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \left(\frac{u_a(b_j + r \sin(\varphi)v) - u_a(b_j)}{\varphi} + \frac{\omega(\varphi)(1 - \cos(\varphi))r}{\varphi} \right) = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{u_a(b_j + r \sin(\varphi)v) - u_a(b_j)}{\varphi} + \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{\omega(\varphi)(1 - \cos(\varphi))r}{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Преобразуем по отдельности каждый из двух пределов в правой части равенства (2.12). Для первого введем вспомогательную переменную $\lambda = r \sin(\varphi)$, которая имеет смысл расстояния между точками b_j и $\pi(b(\varphi), L)$. Тогда, учитывая соотношение (2.8), выведем

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{u_a(b_j + \lambda v) - u_a(b_j)}{\varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \left(\frac{u_a(b_j + \lambda v) - u_a(b_j)}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\varphi} \right) = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \left(\frac{u_a(b_j + \lambda v) - u_a(b_j)}{\lambda} \cdot \frac{r \sin(\varphi)}{\varphi} \right) = \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{u_a(b_j + \lambda v) - u_a(b_j)}{\lambda} \cdot \\ &\cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{r \sin(\varphi)}{\varphi} = \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \frac{u_a(b_j + \lambda v) - u_a(b_j)}{\lambda} \cdot r = r \cos \angle(v, b_j - p). \end{aligned}$$

Для второго предела в правой части равенства (2.12), выполнив тригонометрические преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{\omega(\varphi)(1 - \cos(\varphi))r}{\varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{\omega(\varphi)(2 \sin^2(\varphi/2))r}{\varphi} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \omega(\varphi) \sin(\varphi/2) \cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{(\sin(\varphi/2))r}{\varphi/2} = 0 \cdot r = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, можно записать сумму пределов в правой части равенства (2.12) как одностороннюю производную (с учетом того, что по определению функций $f_j^b(0) = u_a(b(0)) = u_a(b_j)$):

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{f_j^b(\varphi) - f_j^b(0)}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{u_a(b(\varphi)) - u_a(b_j)}{\varphi} = r \cos \angle(v, b_j - p). \quad (2.13)$$

Аналогичные рассуждения относительно приращений функции $u_a(b(\varphi))$ при малых по модулю значениях $\varphi < 0$ дают равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi < 0} \frac{f_j^b(\varphi) - f_j^b(0)}{\varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi < 0} \frac{u_a(b(\varphi)) - u_a(b_j)}{\varphi} = \\ &= -r \cos \angle(-v, b_j - p) = r \cos \angle(v, b_j - p). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как видим, из равенства односторонних пределов (2.13) и (2.14) для производной слева и справа функции расстояния от точки $\text{got}(b_j, p, \varphi)$ до многоугольника A вытекает формула

$$\left. \frac{df_j^b(\varphi)}{\varphi} \right|_{\varphi=0} = r \cos \angle(v, b_j - p) = \|b_j - p\| \cos \angle(v, b_j - p),$$

знак которой совпадает со знаком (2.8). В то же время из свойств косого произведения известно, что его знак является положительным, если вращение от первого вектора направлено против часовой стрелки, и отрицательным, если вращение направлено по часовой стрелке, то есть

$$\text{sign} \left(\left. \frac{f_j^b(\varphi)}{\varphi} \right|_{\varphi=0} \right) = \sigma_j^b. \quad (2.15)$$

Рассмотрим отдельно ситуацию, когда центр вращения p совпадает с b_j . В этом случае точка b_j при повороте переходит в себя, а значит,

$$\frac{df_j^b(\varphi)}{\varphi} = 0.$$

В то же время если $\|b_j - p\| = 0$, то и косое произведение любого вектора на $b_j - p$ равно нулю, а значит, $\sigma_j^b = 0$. Как видим, формула (2.15) верна в любом случае.

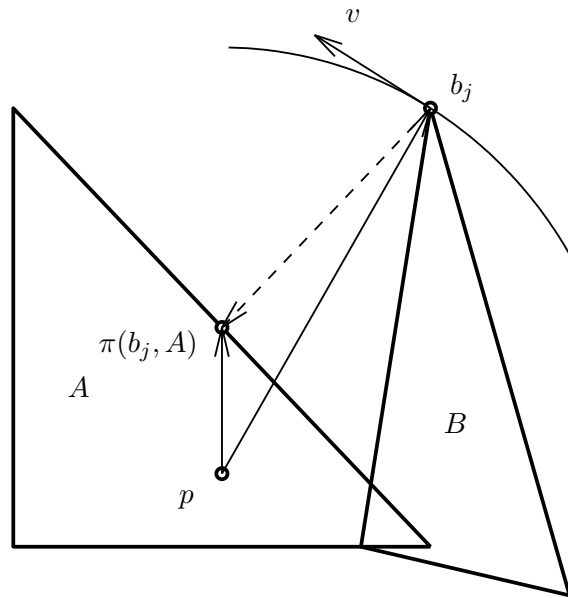


Рис. 1. Многоугольники A , B и точки b_j , $\pi(b_j, A)$ и p

Рассмотрим дифференциальные свойства функций $f_i^a(\varphi)$, $i = \overline{1, N_A}$, для которых $f_i^a(0) > 0$, в точке $\varphi = 0$. По сути, они есть функции евклидова расстояния от точки a_i до множества $\text{rot}(B, p, \varphi)$. Заметим, что фигура, состоящая из точки a_i и многоугольника $\text{rot}(B, p, \varphi)$, может быть поворотом на угол $-\varphi$ вокруг p переведена в фигуру, состоящую из точки $\text{rot}(a_i, p, -\varphi)$ и многоугольника B . Соответственно, можно записать функции в виде

$$f_i^a(\varphi) = \rho(\text{rot}(a_i, p, -\varphi), B), \quad i = \overline{1, N_A}.$$

Применяя к данной конструкции функции евклидова расстояния те же рассуждения, которые были выше проведены для $f_j^b(\varphi)$, мы получаем равенства

$$\text{sign} \left(\frac{f_i^a(\varphi)}{\varphi} \Big|_{\varphi=0} \right) = \sigma_i^a \quad (2.16)$$

при всех $i = \overline{1, N_A}$, для которых $f_i^a(0) > 0$.

Обозначим через

$$I_A = \{i: \rho(a_i, B) = d(A, B)\}, \quad I_B(x) = \{j: \rho(b_j, A) = d(A, B)\}$$

множества вершин многоугольников, для которых евклидовы расстояния до другого многоугольника равны хаусдорфову расстоянию между многоугольниками. Поскольку оператор поворота является непрерывным и липшицевым (по углу поворота), то это значит, что найдется такая константа $\varepsilon > 0$, что при всех $\varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ евклидово расстояние между A и $\text{rot}(B, p, \varphi)$ достигается на вершинах из наборов $\{a_i: i \in I_A\}$ и $\{\text{rot}(b_j, p, \varphi): j \in I_B\}$.

Введем в рассмотрение множество

$$U(p, A, B) = \{\sigma_i^a: i \in I_A\} \cup \{\sigma_j^b: j \in I_B\},$$

состоящее из чисел $-1, 0, 1$, характеризующих дифференциальные свойства функций $f_i^a(\varphi)$ и $f_j^b(\varphi)$. Поскольку как минимум на одной из вершин многоугольников достигается расстояние до другого, то $U(p, A, B) \neq \emptyset$.

Предложение 1. Пусть заданы выпуклые многоугольники A и B , такие, что $A \neq B$, и точка p . Тогда если

$$\forall u_i \in U(p, A, B) \quad u_i = 1, \quad (2.17)$$

то функция $\chi(\varphi)$ возрастает в окрестности точки $\varphi = 0$.

Доказательство. Обозначим множество функций

$$F_I = \{f_i^a(\varphi): i \in I_A\} \cup \{f_j^b(\varphi): j \in I_B\}.$$

Как выше показано, в некоторой окрестности $[-\varepsilon, \varepsilon]$ точки $\varphi = 0$ выполняется равенство

$$\chi(\varphi) = \max\{\bar{f}'_i(\varphi): \bar{f}'_i \in F_I\}.$$

По условию $d(A, B) > 0$, а значит, функции из набора F_I имеют производные в точке $\varphi = 0$. Следовательно, для односторонних производных функции $\chi(\varphi)$ в точке $\varphi = 0$, как для производных максимума из конечного числа дифференцируемых точек, значения которых совпадают $\varphi = 0$, верны формулы (см. [10])

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi > 0} \frac{d\chi(\varphi)}{d\varphi} = \max\{\bar{f}'_i(0): \bar{f}'_i \in F_I\}, \quad (2.18)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0, \varphi < 0} \frac{d\chi(\varphi)}{d\varphi} = \min\{\bar{f}'_i(0): \bar{f}'_i \in F_I\}. \quad (2.19)$$

Как следует из формул (2.15), (2.16) и условия (2.17), знак производных $\{\bar{f}'_i(0): \bar{f}'_i \in F_I\}$ положительный. Поэтому односторонние производные $\chi'(-0)$ и $\chi'(0+)$ функции $\chi(\varphi)$ в точке 0 тоже положительные. Это является достаточным условием ее возрастания в некоторой окрестности точки точки $\varphi = 0$, вложенной в $[-\varepsilon, \varepsilon]$. \square

Предложение 2. Пусть заданы выпуклые многоугольники A и B , такие, что $A \neq B$, и точка p . Тогда если

$$\forall u_i \in U(p, A, B) \quad u_i = -1, \quad (2.20)$$

то функция $\chi(\varphi)$ убывает в окрестности точки $\varphi = 0$.

Доказательство. Как следует из формул (2.15), (2.16) и условия (2.20), знак всех производных $\{\bar{f}'_i(0): \bar{f}'_i \in F_I\}$ отрицательный. Из формул (2.18), (2.19) вытекает, что односторонние производные $\chi'(-0)$ и $\chi'(0+)$ функции $\chi(\varphi)$ в точке 0 тоже отрицательные. Это является достаточным условием ее убывания в некоторой окрестности точки $\varphi = 0$, вложенной в $[-\varepsilon, \varepsilon]$. \square

Предложение 3. Пусть заданы выпуклые многоугольники A и B , такие, что $A \neq B$, и точка p . Тогда если

$$\exists u_i \in U(p, A, B): u_i = 1 \quad (2.21)$$

и

$$\exists u_j \in U(p, A, B): u_j = -1, \quad (2.22)$$

то функция $\chi(\varphi)$ достигает в точке $\varphi = 0$ локального минимума.

Доказательство. Как следует из формул (2.15), (2.16) и условий (2.21) и (2.22), среди всех производных $\{\bar{f}'_i(0): \bar{f}_i \in F_I\}$ найдется как минимум одна положительная и одна отрицательная. Из формул (2.18), (2.19) вытекает, что в этом случае $\chi'(-0) < 0$ и $\chi'(0) > 0$. Это является достаточным условием того, что функция $\chi(\varphi)$ имеет локальный минимум в точке $\varphi = 0$. \square

Замечание 2. Случаи, когда множество $U(p, A, B)$ содержит элементы 0 и 1, 0 и -1 либо только 0 нуждаются в дополнительном анализе. Это обусловлено тем, что функция, имеющая производную, равную нулю, может как убывать, так и возрастать или иметь точку экстремума.

В рамках реализуемых авторами алгоритмов поворот, переводящий B в новый многоугольник \tilde{B} , осуществляется по формуле

$$\tilde{B} = \text{rot}(B, p, \varphi^*), \quad (2.23)$$

где

$$\varphi^* = -k_\varphi(\max\{\Lambda(A, B)\} + \min\{\Lambda(A, B)\})/d(A, B), \quad (2.24)$$

$$\Lambda(A, B) = \{\|a_i - \pi(a_i, B)\|\sigma_i^a: i = 1, \dots, N_a\} \cup \{\|b_j - \pi(b_j, A)\|\sigma_j^b: j = 1, \dots, N_b\},$$

значения функций $\sigma_i^a, i = 1, \dots, N_a$, определены по формуле (2.6), $\sigma_j^b, j = 1, \dots, N_b$, — по формуле (2.7). В формуле (2.23) подразумевается, что $A \neq B$, иначе в (2.24) в правой части будет иметь место деление на 0. Но в случае $A = B$ задача о минимизации хаусдорфова расстояния является тривиальной.

Замечание 3. В случае если многоугольники A и B удовлетворяют условиям предложения 1, величина поворота φ^* отрицательная. Действительно, если все элементы множества $U(p, A, B)$ равны 1, то это значит, что все наибольшие по модулю элементы множества $\Lambda(A, B)$ положительные. Следовательно, значение формулы (2.24) строго отрицательное. Аналогично можно показать, что если многоугольники A и B удовлетворяют условиям предложения 2, то величина поворота $\varphi^* > 0$. В обоих случаях за счет подбора достаточно маленького положительного коэффициента k_φ можно добиться уменьшения величины $d(A, \tilde{B})$ по сравнению с $d(A, B)$.

Если же многоугольники A и B удовлетворяют условиям предложения 3, то имеет место равенство $\varphi^* = 0$. В этом случае среди множества $\Lambda(A, B)$ найдутся как минимум два наибольших по модулю числа противоположного знака. Значение (2.24) будет равно их сумме, умноженной на некоторое число, то есть нулю.

§ 3. Реализация программного комплекса

В рамках работы по созданию программной реализации разработанных алгоритмов авторы использовали пакет прикладных программ MATLAB. Ранее авторы уже применяли его для решения геометрических задач, связанных с минимизацией хаусдорфова расстояния между множествами, в частности задач о построении оптимальных покрытий плоских и трехмерных множеств [11]. Благодаря этому многие процедуры уже реализованы (в частности, отыскание проекции точки на многоугольник и определение принадлежности точки многоугольнику [12]).

Схема алгоритма итерационной минимизации хаусдорфова расстояния при заданных выпуклых многоугольниках A и B и коэффициенте k_φ представлена ниже

Алгоритм 1.

1. Выполняется вычисление величины $d_0 = d(A, B)$.
2. Строится многоугольник $B_1 = \bar{B}$ по формуле (2.3).
3. Выполняется вычисление величины $d_1 = d(A, B_1)$.
4. Вычисляется чебышёвский центр $c(B_1)$ многоугольника B_1 .
5. Строится многоугольник $B_2 = \tilde{B}_1$ по формуле (2.23), центр вращения p берется $p = c(B_1)$.

6. Выполняется вычисление величины $d_2 = d(A, B_2)$.

7. Если $d_2 < d_1$, то в качестве выходного многоугольника берется $B^* = B_2$, а в противном случае — $B^* = B_1$.

Замечание 4. В пункте 5 центром вращения многоугольника выбрана не некоторая фиксированная точка, а его чебышёвский центр. Это обеспечивает минимально возможное изменение координат вершин \tilde{B}_1 по сравнению с B_1 при одинаковом изменении угла между векторами, сонаправленными со сторонами многоугольников.

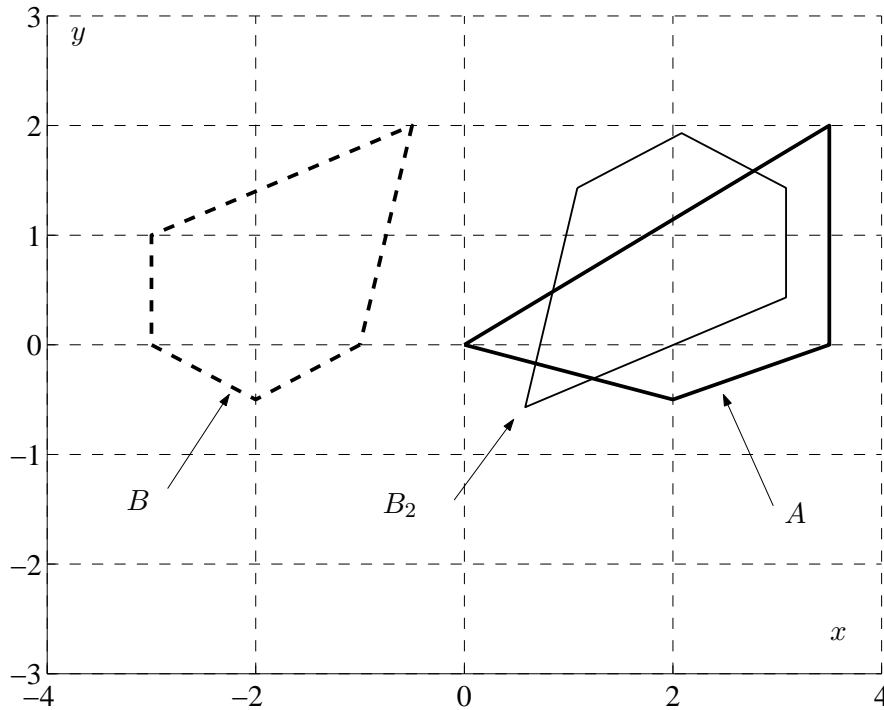


Рис. 2. Многоугольники A , B и $B^* = B_2$ в примере 1

При запуске программного комплекса алгоритм 1 выполняется в цикле многократно. Условием выхода является достижение хаусдорфовым расстоянием $d(B, B^*)$ между исходным многоугольником B и полученным в итоге B^* значения, не превышающего задаваемый пользователем параметр δh . Предусмотрена возможность уменьшения коэффициента k_φ , в случае если в пункте 7 не выполняется условие $d_2 < d_1$, то есть поворот многоугольника не уменьшает хаусдорфово расстояние.

В рамках программного комплекса для выявления неоптимальных положений многоугольника B^* , являющихся локально устойчивыми относительно алгоритма 1, предусмотрена возможность построения многоугольника $\hat{B} = \{\hat{x}\} + \Pi(\hat{\varphi})B^*$, где \hat{x} и $\hat{\varphi}$ — случайные величины. Затем цикл запускается с начальным значением подвижного многоугольника \hat{B} , вместо B . Результаты циклов сравниваются на предмет выявления оптимального.

Пример 1. Пусть заданы выпуклые четырехугольник A с набором вершин

$$\{a_i\}_{i=1}^4 = \{(0, 0), (3.5, 2), (3.5, 0), (2, 0.5)\}$$

и шестиугольник B с набором вершин

$$\{b_i\}_{i=1}^5 = \{-1, 0), (-2, -0.5), (-3, 0), (-3, 1), (-1, 4), (-0.5, 2)\}.$$

Требуется найти такие $x^0 \in \mathbb{R}^2$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$, для которых значение величины (1.2) минимально.

Результат, полученный за 8 итераций работы алгоритма: $\varphi^0 = \pi$, $x^0 = (-2, 0)$. Хаусдорфово расстояние между многоугольниками A и $B^* = \{x^0\} + \Pi(\varphi^0)B$ равно $d(A, B^*) \approx 0.7047$. Многоугольники A , B и B^* представлены на рис. 2.

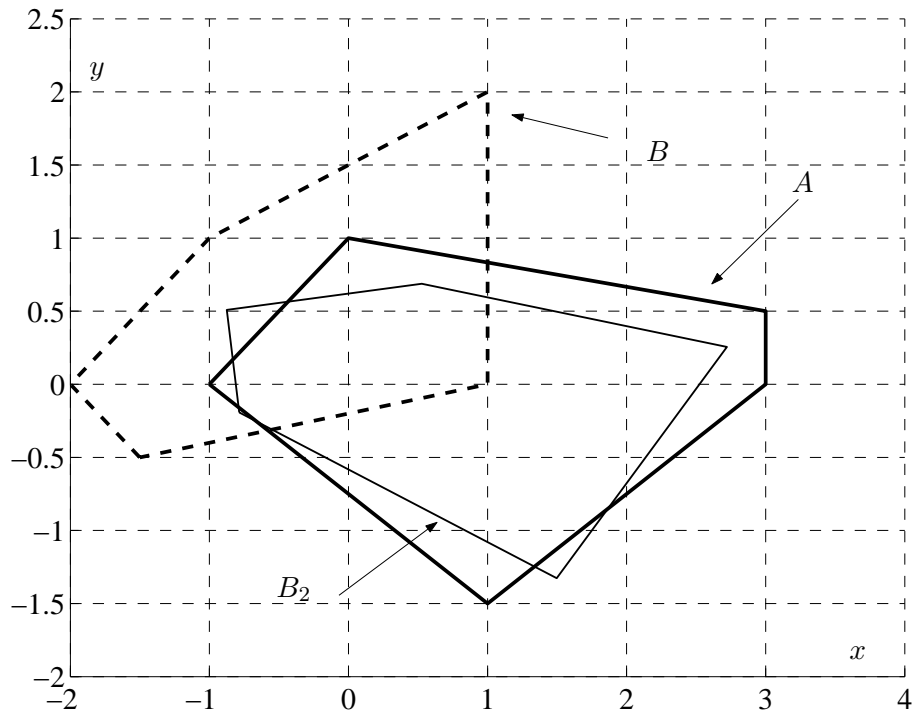


Рис. 3. Многоугольники A , B и $B^* = B_2$ в примере 2

Пример 2. Пусть заданы выпуклые пятиугольник A с набором вершин

$$\{a_i\}_{i=1}^5 = \{(-1, 0), (0, 1), (3, 0.5), (3, 0), (1, -1.5)\}$$

и пятиугольник B с набором вершин

$$\{b_i\}_{i=1}^5 = \{(-1.5, -0.5), (-2, 0), (-1, 1), (1, 2), (1, 0)\}.$$

Требуется найти такие $x^0 \in \mathbb{R}^2$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$, для которых значение величины (1.2) минимально.

Результат, полученный за 13 итераций работы алгоритма: $\varphi^0 \approx 5.6248$, $x^0 \approx (-0.0076, -1.0223)$. Хаусдорфово расстояние между многоугольниками A и $B^* = \{x^0\} + \Pi(\varphi^0)B$ равно $d(A, B^*) \approx 0.3765$. Многоугольники A , B и B^* представлены на рис 3.

Решение задач выполнено с помощью разработанного итерационного алгоритма. Оценки точности, по достижению которой осуществляется остановка алгоритма, $\delta h = 0.001$.

§ 4. Заключение

Разработанные авторами алгоритмы минимизации хаусдорфова расстояния между выпуклыми многоугольниками показали свою эффективность. Реализованный на их основе программный комплекс за приемлемое время находит величины сдвига и поворота одного из многоугольников, обеспечивающих аппроксимация их наилучшего наложения с высокой точностью. Полученные результаты могут использоваться в будущем для решения более сложных задач, в частности отыскания оптимального расположения выпуклых тел в трехмерном пространстве [8] и минимизации некоторого обобщения хаусдорфова расстояния между неограниченными множествами [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи динамики. I // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
3. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: Комкнига, 2006. 304 с.
4. Лахтин А.С., Ушаков В.Н. Задача оптимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многогранниками // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 9. С. 60–67.
5. Ушаков В.Н., Лахтин А.С., Лебедев П.Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 291–308.
6. Гаркави А.Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 6 (120). С. 139–145.
7. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
8. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Tarasyev A.M., Ushakov A.V. Optimization of the Hausdorff distance between convex polyhedrons in \mathbf{R}^3 // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. Issue 25. P. 197–201. DOI: [10.1016/j.ifacol.2015.11.084](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.11.084)
9. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
11. Лебедев П.Д., Ушаков В.Н. Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости \mathbb{R}^2 // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 258–270. DOI: [10.20537/vm160212](https://doi.org/10.20537/vm160212)
12. Лебедев П.Д. Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Свидетельство о государственной регистрации № 2015661543 от 29.10.2015.
13. Ушаков В.Н., Лебедев П.Д. Об одном варианте метрики для неограниченных выпуклых множеств // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2013. Т. 5. № 1. С. 40–49.

Поступила в редакцию 26.10.2016

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, профессор, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: ushak@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: pleb@yandex.ru

V. N. Ushakov, P. D. Lebedev

Iterative methods for minimization of the Hausdorff distance between movable polygons

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 86–97 (in Russian).

Keywords: convex polygon, Hausdorff distance, minimization, Chebyshev center, directional derivative.

MSC2010: 11K55, 28A78

DOI: [10.20537/vm170108](https://doi.org/10.20537/vm170108)

The problem of minimizing the Hausdorff distance between two convex polygons is studied. The first polygon is supposed to be able to make any flat motions including parallel transportation and rotation with the center at any point. The second polygon is supposed to be fixed. Iterative algorithms of step-by-step displacements and rotations of the polygon which provide a decrease in the Hausdorff distance between the moving polygon and the fixed polygon are developed and realized in software programs. Some theorems of correctness of the algorithms are proved for a wide range of cases. Geometrical properties of the Chebyshev center of a compact set and differential properties of the function of Euclidean distance to a convex set are used. The

possibility of a multiple launch is provided for in the implementation of the software complex for the purpose of identifying the best found position of the polygon. Modeling for several examples is performed.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. Game problems of dynamics. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1969, no. 5, pp. 3–12 (in Russian).
2. Rockafellar R. *Vypuklyi analiz* (Convex analysis), Moscow: Mir, 1973, 472 p.
3. Hausdorff F. *Set theory*, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1957. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Komkniga, 2006.
4. Lakhtin A.S., Ushakov V.N. Minimization of the Hausdorff distance between convex polyhedrons, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 126, issue 6, pp. 1553–1560. DOI: [10.1007/s10958-005-0043-0](https://doi.org/10.1007/s10958-005-0043-0)
5. Ushakov V.N., Lakhtin A.S., Lebedev P.D. Optimization of the Hausdorff distance between sets in Euclidean space, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. S222–S238. DOI: [10.1134/S0081543815090151](https://doi.org/10.1134/S0081543815090151)
6. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, issue 6 (120), pp. 139–145 (in Russian).
7. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* (Convex analysis and extremal problems), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.
8. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Tarasyev A.M., Ushakov A.V. Optimization of the Hausdorff distance between convex polyhedrons in \mathbf{R}^3 , *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, issue 25, pp. 197–201. DOI: [10.1016/j.ifacol.2015.11.084](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.11.084)
9. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* (Nondifferentiable optimization), Moscow: Nauka, 1981, 384 p.
10. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* (Theory of functions of a real variable), Moscow: Nauka, 1974, 480 p.
11. Ushakov V.N., Lebedev P.D. Algorithms of optimal set covering on the planar \mathbb{R}^2 , *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 2, pp. 258–270. DOI: [10.20537/vm160212](https://doi.org/10.20537/vm160212)
12. Lebedev P.D. *The program for calculating the optimal coverage of a hemisphere by a set of spherical segments*, The certificate of state registration, no. 2015661543, 29.10.2015.
13. Lebedev P.D., Ushakov V.N. A variant of a metric for unbounded convex sets, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Fiz.*, 2013, vol. 5, issue 1, pp. 40–49 (in Russian).

Received 26.10.2016

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Science, Professor, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.

E-mail: ushak@imm.uran.ru

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.

E-mail: pleb@yandex.ru