

УДК 531.383, 534.08, 517.934

© *Г. А. Трутнев***МОДЕЛЬ КОНСТРУКЦИОННОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА**

В статье рассматривается твердотельный волновой гироскоп — прибор, измеряющий проекцию угловой скорости на ось прибора. Основным элементом прибора является резонатор, в котором реализуется эффект инертности стоячих волн. Из-за различных дефектов материалов и технологий изготовления появляется взаимодействие основных рабочих колебаний и побочных деформаций в месте крепления, из-за чего появляются конструкционное демпфирование и, как следствие, дрейф стоячей волны. Предлагается исследовать вопросы конструкционного демпфирования в твердотельном волновом гироскопе и появления дрейфа волны с помощью модели в виде механической системы. В механической системе центральная масса моделирует крепежную ножку резонатора. Выводится математическая модель с помощью подхода Лагранжа. Механическая система описывается в декартовых координатах в общем виде для $N + 1$ массы. Выбирается более удобная неинерциальная система координат, вращающаяся с некоторой угловой скоростью. Приводятся выкладки для получения математической модели в виде системы дифференциальных уравнений. Анализируется полученная математическая модель. Описываются дальнейшие пути исследования конструкционного демпфирования и дрейфа.

Ключевые слова: твердотельный волновой гироскоп, резонатор, конструкционное демпфирование, дебаланс резонатора, дрейф волны, модель резонатора, механические системы, уравнение Лагранжа.

DOI: [10.20537/vm190108](https://doi.org/10.20537/vm190108)

Твердотельный волновой гироскоп (ТВГ) — измерительная система [1–3], работа которой основана на физическом принципе — эффект Брайана [4]. ТВГ используется во многих современных системах наблюдения и управления подвижными объектами [5–7]. Одна из главных и актуальных задач разработки измерительных систем и приборов — повышение их точности. Большое количество работ посвящено исследованию погрешностей ТВГ [8–11], а также способам уменьшения различных дефектов или уменьшения их влияния на точностные характеристики прибора [12–14]. Большинство моделей резонаторов ТВГ рассматривают динамику резонатора по одной форме колебаний на рабочей резонансной частоте [15–18], не учитывая взаимодействие различных форм колебаний. При этом известна взаимосвязь основных колебаний резонатора с колебаниями, вызывающими деформации и рассеивание энергии в месте заделки резонатора в основание [19, 20]. В идеальном случае в месте крепления резонатора должны отсутствовать деформации и напряжения, которые появляются при наличии различных дефектов. Вследствие деформаций и напряжений в месте крепления появляется трение. Явление рассеивания энергии вследствие действия сил трение в соединениях конструкции называется конструкционным демпфированием [21]. Для исследования конструкционного демпфирования ТВГ и его влияния на точностные характеристики можно использовать подход моделирования [22] резонатора ТВГ с помощью механических систем [23]. При моделировании будем учитывать следующие аспекты:

- для изготовления резонатора используются материалы с высокой добротностью, основное рассеивание энергии происходит в месте крепления резонатора к основанию, трение в материале резонатора существенно меньше;
- основные деформации на рабочей частоте происходят на кромке резонатора, для целей моделирования резонатор представляется в виде плоской системы масс;
- при балансировке влияние упруго-массовых дефектов сводится к минимуму удалением небольших масс с поверхности резонатора; будем учитывать только дефекты масс.

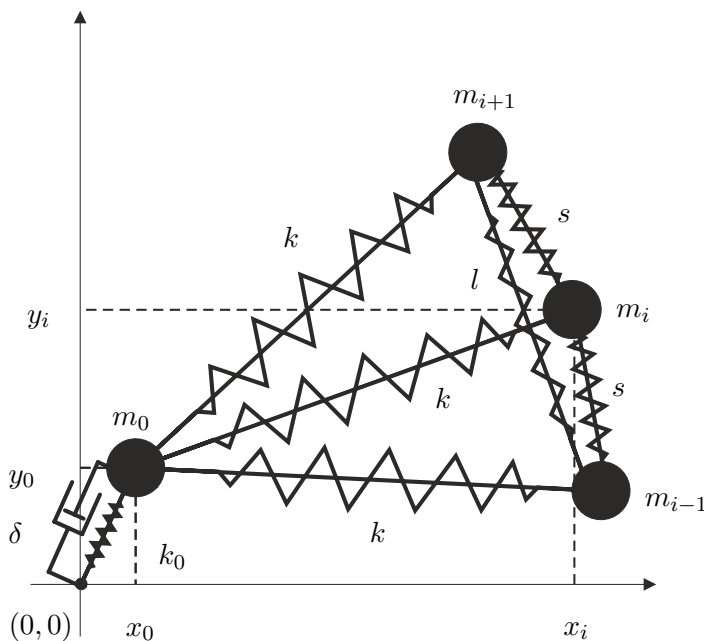


Рис. 1. Один сегмент механической системы

Будем рассматривать систему в общем виде, состоящую из $N + 1$ масс, одна из которых находится в центре, остальные равноудалены от центра и в положении равновесия симметрично расположены на окружности единичного радиуса; на рис. 1 приведен сектор, соответствующий углу $2\varphi = 4\pi/N$. Рассматриваем случай малых колебаний вблизи положения равновесия. Выводить математическую модель механической системы будем с помощью метода Лагранжа [24].

Сначала рассмотрим механическую систему в декартовой системе координат, далее выберем более удобные для описания координаты. В декартовой системе координат положение i -й массы определяется координатами (x_i, y_i) . В положении равновесия масса m_0 находится в центре системы координат, массы m_i равноудалены на расстояние, равное единице. Кинетическая энергия системы:

$$T = \sum_{i=0}^N T_i, \quad T_i = \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2).$$

Массы соединены пружинами. Соседние радиальные массы соединены пружинами с жесткостью s , радиальные массы через одну соединены пружинами с жесткостью l , центральная масса соединена с каждой из радиальных масс пружиной с жесткостью k . Центральная масса соединяется с центром координат пружиной с жесткостью k_0 . Запишем потенциальную энергию системы:

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^N U_{k_i} + U_{l_i} + U_{s_i}, \quad U_0 = \frac{k_0}{2} (x_0^2 + y_0^2),$$

$$U_{k_i} = \frac{k}{2} \left(\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - 1 \right)^2,$$

$$U_{l_i} = \frac{l}{2} \left(\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2} - l_0 \right)^2,$$

$$U_{s_i} = \frac{s}{2} \left(\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} - s_0 \right)^2,$$

$$l_0 = \sqrt{2 - 2 \cos(2\phi)}, \quad s_0 = \sqrt{2 - 2 \cos(\phi)}.$$

Считаем, что рассеивание энергии происходит только при движении центральной массы. Дис-

сипативная функция Релея запишется следующим образом:

$$R = \frac{\delta_0}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2),$$

где δ — коэффициент демпфирования. Далее перейдем к более удобной системе координат. Рассмотрим следующую неинерциальную систему, вращающуюся с угловой скоростью Ω :

$$\begin{cases} x_i = (1 + p_i) \cos((i-1)\varphi + q_i + \theta), \\ y_i = (1 + p_i) \sin((i-1)\varphi + q_i + \theta), \\ x_0 = p_0 \cos(\theta) - q_0 \sin(\theta), \\ y_0 = p_0 \sin(\theta) + q_0 \cos(\theta), \end{cases}$$

$$\theta(t) = \int_0^t \Omega(s) ds.$$

Будем считать, что Ω — медленно меняющаяся функция и при этом $\max_t |\Omega(t)| \ll 1$, то есть будем отбрасывать слагаемые Ω^2 и $\dot{\Omega}$. Система является невырожденной:

$$\max_t |p_i(t)| \ll 1, \quad \max_t |q_i(t)| \ll 1, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial p_i} & \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial y_i}{\partial p_i} & \frac{\partial y_i}{\partial q_i} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial p_0} & \frac{\partial x_0}{\partial q_0} \\ \frac{\partial y_0}{\partial p_0} & \frac{\partial y_0}{\partial q_0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выражение для кинетической энергии для обобщенных переменных переписывается следующим образом:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{p}_i^2 + (1 + p_i)^2 \cdot (\Omega + \dot{q}_i)^2) + \frac{m_0}{2} ((\dot{p}_0 - \Omega \cdot q_0)^2 + (\dot{q}_0 + \Omega \cdot p_0)^2).$$

В выражении для потенциальной энергии аналогично нужно сделать замену:

$$U_0 = \frac{k_0}{2} (p_0^2 + q_0^2),$$

$$U k_i = \frac{k}{2} \left(\sqrt{1 + p_i^2 + 2p_i + p_0^2 + q_0^2 - 2(p_i + 1)(p_0 \cos((i-1)\varphi) + q_0 \sin((i-1)\varphi))} - 1 \right)^2 =$$

$$= \frac{k}{2} (p_i - p_0 \cos((i-1)\varphi) - q_0 \sin((i-1)\varphi))^2 + o(p_i^2, q_i^2, p_0^2, q_0^2);$$

$$U l_i = \frac{l}{2} \left(\sqrt{(1 + p_{i+1})^2 + (1 + p_{i-1})^2 - 2(1 + p_{i+1})(1 + p_{i-1}) \cos(q_{i+1} - q_{i-1} + 2\varphi)} - l_0 \right)^2 =$$

$$= \frac{l}{2l_0^2} ((1 - \cos(2\varphi))(p_{i+1} + p_{i-1}) + \sin(2\varphi)(q_{i+1} - q_{i-1}))^2 + o(p_{i-1}^2, q_{i-1}^2, p_{i+1}^2, q_{i+1}^2);$$

$$U s_i = \frac{s}{2} \left(\sqrt{(1 + p_{i+1})^2 + (1 + p_i)^2 - 2(1 + p_{i+1})(1 + p_i) \cos(q_{i+1} - q_i + \varphi)} - s_0 \right)^2 =$$

$$= \frac{s}{2s_0^2} ((1 - \cos(\varphi))(p_{i+1} + p_i) + \sin(\varphi)(q_{i+1} - q_i))^2 + o(p_i^2, q_i^2, p_{i+1}^2, q_{i+1}^2).$$

Диссипативная функция Релея переписывается:

$$R = \frac{\delta_0}{2} ((\dot{p}_0 + q_0 \Omega)^2 + (\dot{q}_0 - p_0 \Omega)^2),$$

Уравнения движения можно получить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial T}{\partial p_i} + \frac{\partial U}{\partial p_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{p}_i} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

где T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, R — диссипативная функция Релея, индекс i меняется от 0 до N . Опуская промежуточные выкладки, запишем выражения частных производных кинетической энергии T по обобщенным переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p_i} &= m_i(1 + p_i)(\Omega + \dot{q}_i)^2 = 2m_i\dot{q}_i\Omega + o(p_i, q_i, \dot{p}_i, \dot{q}_i, \Omega^2), & \frac{\partial T}{\partial q_i} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} &= m_i\dot{p}_i, & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= m_i(\Omega + \dot{q}_i)(1 + p_i)^2 = m_i(\Omega + 2\Omega p_i + \dot{q}_i) + o(p_i, q_i, \dot{p}_i, \dot{q}_i, \Omega^2), \\ \frac{\partial T}{\partial p_0} &= m_0\Omega(\dot{q}_0 + \Omega p_0) = m_0\Omega\dot{q}_0 + o(\Omega^2), & \frac{\partial T}{\partial q_0} &= -m_0\Omega(\dot{p}_0 - \Omega q_0) = -m_0\Omega\dot{p}_0 + o(\Omega^2), \\ & & \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_0} &= m_0(\dot{p}_0 - \Omega q_0), & \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0} &= m_0(\dot{q}_0 + \Omega p_0), \end{aligned}$$

где $o(p, q, \Omega, \dot{\Omega})$ — выражение меньшего порядка малости относительно p_i и q_i , угловой скорости и углового ускорения, i меняется от 0 до N . Далее запишем выражения частных производных потенциальной энергии U по обобщенным переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p_i} &= k(p_i - p_0 \cos((i-1)\varphi) - q_0 \sin((i-1)\varphi)) + \\ &+ \frac{l}{2}((1 - \cos(2\varphi))(p_i + p_{i-2}) + \sin(2\varphi)(q_i - q_{i-2})) + \\ &+ \frac{l}{2}((1 - \cos(2\varphi))(p_{i+2} + p_i) + \sin(2\varphi)(q_{i+2} - q_i)) + \\ &+ \frac{s}{2}((1 - \cos(\varphi))(p_i + p_{i-1}) + \sin(\varphi)(q_i - q_{i-1})) + \\ &+ \frac{s}{2}((1 - \cos(\varphi))(p_{i+1} + p_i) + \sin(\varphi)(q_{i+1} - q_i)), \\ \frac{\partial U}{\partial q_i} &= \frac{l \sin(2\varphi)}{l_0^2}((1 - \cos(2\varphi))(p_i + p_{i-2}) + \sin(2\varphi)(q_i - q_{i-2})) - \\ &- \frac{l \sin(2\varphi)}{l_0^2}((1 - \cos(2\varphi))(p_{i+2} + p_i) + \sin(2\varphi)(q_{i+2} - q_i)) + \\ &+ \frac{s \sin(\varphi)}{s_0^2}((1 - \cos(\varphi))(p_i + p_{i-1}) + \sin(\varphi)(q_i - q_{i-1})) - \\ &- \frac{s \sin(\varphi)}{s_0^2}((1 - \cos(\varphi))(p_{i+1} + p_i) + \sin(\varphi)(q_{i+1} - q_i)). \\ \frac{\partial U}{\partial p_0} &= - \sum_i k(p_i - p_0 \cos((i-1)\varphi) - q_0 \sin((i-1)\varphi)) \cos((i-1)\varphi) = \\ &= -kN \sum_i p_i \cos((i-1)\varphi) + p_0 \frac{N}{2}, \\ \frac{\partial U}{\partial q_0} &= - \sum_i k(p_i - p_0 \cos((i-1)\varphi) - q_0 \sin((i-1)\varphi)) \sin((i-1)\varphi) = \\ &= -kN \sum_i p_i \sin((i-1)\varphi) + q_0 \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Частные производные диссипативной функции Релея:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{p}_0} = \delta(\dot{p}_0 + \Omega q_0), \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_0} = \delta(\dot{q}_0 - \Omega p_0).$$

Составим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 m_i \ddot{p}_i - 2m_i \Omega \dot{q}_i + \frac{l(1 - \cos(2\varphi))}{2} (p_{i-2} + 2p_i + p_{i+2}) + \frac{s(1 - \cos(\varphi))}{2} (p_{i-1} + 2p_i + p_{i+1}) + kp_i + \\
 + \frac{l \sin(2\varphi)}{2} (q_{i+2} - q_{i-2}) + \frac{s \sin(\varphi)}{2} (q_{i+1} - q_{i-1}) - k \cos((i-1)\varphi) p_0 - k \sin((i-1)\varphi) q_0 = 0, \\
 m_i \ddot{q}_i + 2m_i \Omega \dot{p}_i + \frac{l \sin(2\varphi)}{2} (p_{i+2} + p_{i-2}) + \frac{s \sin(\varphi)}{2} (p_{i+1} + p_{i-1}) + \\
 + \frac{l \sin(2\varphi)^2}{l_0^2} (q_{i+2} - q_{i-2}) + \frac{s \sin(\varphi)^2}{s_0^2} (q_{i+1} - q_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \\
 m_0 \ddot{p}_0 - 2m_0 \Omega \dot{q}_0 + \delta(\dot{p}_0 + \Omega q_0) - kN \sum_i p_i \cos((i-1)\varphi) + p_0 \frac{N}{2} = 0, \\
 m_0 \ddot{q}_0 + 2m_0 \Omega \dot{p}_0 + \delta(\dot{q}_0 - \Omega p_0) - kN \sum_i p_i \sin((i-1)\varphi) + q_0 \frac{N}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Для исследования моделей ТВГ можно использовать метод Галеркина [25], колебание i -й массы в радиальном направлении можно представить в виде ряда

$$p_i(t) = \sum_j \xi_j(t) \cdot \cos(j \cdot (i-1)\varphi) + \zeta_j(t) \cdot \sin(j \cdot (i-1)\varphi).$$

В работающем приборе обычно в качестве рабочих колебаний выбирают вторую форму колебаний $j = 2$. Если других форм колебаний не появляется, то

$$\sum_i p_i \cos((i-1)\varphi) = 0, \quad \sum_i p_i \sin((i-1)\varphi) = 0,$$

перемещение центральной массы не связано с перемещениями радиальных масс. Видно, что на перемещение центральной массы будут влиять только перемещения p_i по первой форме $j = 1$. Первая форма может появляться за счет внутренних сил из-за дебалансов, когда есть зависимость $m_i = m + \Delta((i-1)\varphi)$, $i = 1, \dots, N$. Если появляется перемещение центральной массы вследствие появления первой формы колебаний из-за массового дефекта, то и в системе появляется рассеивание энергии. Соответственно, на появление конструкционного демпфирования влияет появление первой формы колебаний радиальных масс из-за массового дефекта. Добротность и разнотонность системы являются величинами, зависящими от параметров массового дефекта. Для дальнейшего исследования следует воспользоваться методом осреднения Боголюбова по малому параметру, в качестве малого параметра следует взять максимум из параметров массового дефекта, коэффициента демпфирования и максимально возможной угловой скорости. Полученную систему дифференциальных уравнений в «медленных» переменных удобно будет использовать для дальнейшего исследования конструкционного демпфирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлёв В.Ф. Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. 2011. Т. 16. № 2 (33). С. 118–123. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26104278>
2. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 167 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29664505>
3. Трутнев Г.А., Назаров С.Б., Перевозчиков К.К., Щенятский А.В. Измерительно-вычислительный комплекс «Твердотельный волновой гироскоп» // Интеллектуальные системы в производстве. 2017. Т. 15. № 3. С. 62–72. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2017-3-62-72>
4. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1890. Vol. 7. Pt. 3. P. 101–111.

5. Qiu B., Wang J., Li P. Full digital control of hemispherical resonator gyro under force-to-rebalance mode // IEEE Sensors Journal. 2015. Vol. 15. Issue 1. P. 71–75.
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2014.2339229>
6. Негри С., Лабарр Э., Линьон К., Брунштейн Э., Салаён Э. Новое поколение инерциальных навигационных систем на основе ТВГ для аппаратов, обеспечивающих запуск спутников // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 1 (92). С. 49–59.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.2016.24.1.049-059>
7. Meyer D., Rozelle D. Milli-HRG inertial navigation system // Gyroscopy and navigation. 2012. Vol. 3. No. 4. С. 227–234. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24144813>
8. Лунин Б.С. Физико-химические основы разработки полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов. М.: Изд-во МАИ, 2005. 224 с.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19637401>
9. Басараб М.А., Матвеев В.А., Лунин Б.С., Фетисов С.В. Влияние неоднородности толщины оболочки волнового твердотельного гироскопа на параметры дебаланса // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 4 (95). С. 14–24. <https://doi.org/10.17285/0869-7035.2016.24.4.014-024>
10. Yi G., Xie Y., Qi Z., Xi B. Modeling of acceleration influence on hemispherical resonator gyro forcing system // Mathematical Problems in Engineering. 2015. Vol. 2015. Article ID 104041.
<https://doi.org/10.1155/2015/104041>
11. Серёгин С.В. Влияние несовершенств формы на колебания кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 3. С. 423–431.
<https://doi.org/10.20537/nd1703009>
12. Wang X., Wu W., Fang Z., Luo B., Li Y., Jiang Q. Temperature drift compensation for hemispherical resonator gyro based on natural frequency // Sensors. 2012. Vol. 12. Issue 5. P. 6434–6446.
<https://doi.org/10.3390/s120506434>
13. Жбанов Ю.К., Каленова Н.В. Поверхностный дебаланс волнового твердотельного гироскопа // Известия РАН. Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 11–18.
14. Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности // Наука и образование. 2013. Т. 13. № 6. С. 251–266.
15. Климов Д.М. Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Ким Л.А., 2017. 193 с.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=32360044>
16. Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А. Численное исследование резонаторов ТВГ различной формы при наличии дефектов различного рода // Наука и образование. 2016. Т. 16. № 10. С. 1–22.
17. Трутнев Г.А. Модель твердотельного волнового гироскопа в медленных переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 3. С. 421–429. <https://doi.org/10.20537/vm150312>
18. Арсланова М.Л., Трутнев Г.А. Основы моделирования резонатора твердотельного волнового гироскопа // Интеллектуальные системы в производстве. 2017. Т. 15. № 3. С. 4–17.
<https://doi.org/10.22213/2410-9304-2017-3-4-17>
19. Zhbanov Yu.K., Zhuravlev V.Ph. Effect of movability of the resonator center on the operation of a hemispherical resonator gyro // Mechanics of Solids. 2007. Vol. 42. No. 6. P. 851–859.
<https://doi.org/10.3103/S0025654407060039>
20. Kalenova N.V. Influence of the resonator angular displacements in a hemispherical resonator gyro on the coupling between the working and beam-type vibrations // Mechanics of Solids. 2009. Vol. 44. No. 5. P. 686–690. <https://doi.org/10.3103/S0025654409050057>
21. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
22. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005. 320 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15218223>
23. Трутнев Г.А. Шестнадцатиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 135–146.
<https://doi.org/10.20537/vm110210>
24. Дронг В., Дубинин В., Ильин М., Колесников К., Космодемьянский В., Назаренко Б., Панкратов А., Русанов П., Саратов Ю., Степанчук Ю., Тушева Г., Шкапов П. Курс теоретической механики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 584 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29831560>
25. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2009.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19457823>

Поступила в редакцию 14.01.2019

Трутнев Георгий Александрович, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: TrutnevGA@gmail.com

G. A. Trutnev**Model of the hemispherical resonator gyroscope construction damping**

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 84–91 (in Russian).

Keywords: hemispherical resonator gyroscope, resonator, constructional damping, unbalanced mass of the resonator, drift of a wave, resonator model, mechanical systems, Lagrange's equation.

MSC2010: 70H03

DOI: [10.20537/vm190108](https://doi.org/10.20537/vm190108)

This article is concerned with the hemispherical resonator gyroscope, a device for measurement of the projection of the angular speed to a device axis. The basic element of the device is a resonator in which the effect of inertness of standing waves is implemented. Various defects of materials and manufacturing techniques lead to an interaction between the main working fluctuations and collateral deformations in the location of fastening, resulting in construction damping and hence in the drift of a standing wave. Problems of constructional damping in the hemispherical resonator gyroscope and emergence of drift of a wave by means of modeling in the form of a mechanical system are investigated. A mathematical model is derived using Lagrange's approach. A mechanical system is described in Cartesian coordinates in general form for the $N + 1$ mass. In the mechanical system, the central weight models a fixing leg of the resonator. A more convenient coordinate system for the description of the mechanical system is chosen. Calculations for obtaining a mathematical model in the form of a system of differential equations are carried out. The resulting mathematical model is analyzed. Avenues of further research on a construction damping and drift are described.

REFERENCES

1. Zhuravlev V.F. Wave solid-state gyroscope: present state, some aspects, *Aktual'nye Problemy Aviatsionnykh i Aerokosmicheskikh Sistem: Protssy, Modeli, Eksperiment*, 2011, vol. 16, no. 2 (33), pp. 118–123 (in Russian). <https://elibrary.ru/item.asp?id=26104278>
2. Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V. *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* (Designing a wave solid-state gyroscope), Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 1998, 167 p. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29664505>
3. Trutnev G.A., Nazarov S.B., Perevozchikov K.K., Shchenyatskii A.V. Measurement calculation system "Solid-state resonator gyroscope", *Intellektual'nye Sistemy v Proizvodstve*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 62–72 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2017-3-62-72>
4. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1890, vol. 7, pt. 3, pp. 101–111.
5. Qiu B., Wang J., Li P. Full digital control of hemispherical resonator gyro under force-to-rebalance mode, *IEEE Sensors Journal*, 2015, vol. 15, issue 1, pp. 71–75. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2014.2339229>
6. Negri C., Labarre E., Lignon C., Brunstein E., Salaún E. A new generation of IRS with innovative architecture based on HRG for satellite launch vehicles, *Gyroskopiya i Navigatsiya*, 2016, vol. 24, no. 1 (92), pp. 49–59 (in Russian). <https://doi.org/10.17285/0869-7035.2016.24.1.049-059>
7. Meyer D., Rozelle D. Milli-HRG inertial navigation system, *Gyroskopiya i Navigatsiya*, 2012, vol. 3, no. 4, pp. 227–234. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24144813>
8. Lunin B.S. *Fiziko-khimicheskie osnovy razrabotki polusfericheskikh rezonatorov volnovykh tverdotel'nykh giroskopov* (Physical and chemical bases of the development of semispherical resonators of wave solid-state gyroscopes), Moscow: Moscow Aviation Institute, 2005, 224 p. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19637401>

9. Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Fetisov S.V. Influence of nonuniform thickness of the hemispherical resonator gyro shell on its unbalance parameters, *Giroskopiya i Navigatsiya*, 2016, vol. 24, no. 4 (95), pp. 14–24 (in Russian).
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.2016.24.4.014-024>
10. Yi G., Xie Y., Qi Z., Xi B. Modeling of acceleration influence on hemispherical resonator gyro forcing system, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, vol. 2015, Article ID 104041.
<https://doi.org/10.1155/2015/104041>
11. Seregin S.V. The influence of shape imperfections on the vibrations of a ring resonator of a wave solid-state gyroscope, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 423–431 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/nd1703009>
12. Wang X., Wu W., Fang Z., Luo B., Li Y., Jiang Q. Temperature drift compensation for hemispherical resonator gyro based on natural frequency, *Sensors*, 2012, vol. 12, issue 5, pp. 6434–6446.
<https://doi.org/10.3390/s120506434>
13. Zhbanov Yu.K., Kalenova N.V. Surface unbalance of a hemispherical resonator gyro, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tv. Tela*, 2001, no. 3, pp. 11–18 (in Russian).
14. Matveev V., Lunin B., Basarab M., Chumankin E. Balancing of metallic resonators of cylindrical vibratory gyroscopes for low and medium accuracy applications, *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2013, vol. 13, no. 6, pp. 251–266 (in Russian).
15. Klimov D.M., Zhuravlev V.F., Zhbanov Yu.K. *Kvartsevyi polusfericheskiy rezonator (Volnovoi tverdotel'nyi giroskop)* (Quartz hemispherical resonator (Wave solid-state gyroscope)), Moscow: Kim L. A., 2017. 193 p.
16. Vakhlyarskiy D., Guskov A., Basarab M., Matveev V. Numerical study of differently shaped HRG resonators with various defects, *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2016, vol. 16, no. 10, pp. 1–22 (in Russian).
17. Trutnev G.A. The model of hemispherical resonator gyroscope in terms of slow variables, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 3, pp. 421–429 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm150312>
18. Arslanova M.L., Trutnev G.A. Basics of simulation solid-state wave gyroscope resonator, *Intellekt. Sist. Proizv.*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 4–17 (in Russian).
<https://doi.org/10.22213/2410-9304-2017-3-4-17>
19. Zhbanov Yu.K., Zhuravlev V.Ph. Effect of movability of the resonator center on the operation of a hemispherical resonator gyro, *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 6, pp. 851–859.
<https://doi.org/10.3103/S0025654407060039>
20. Kalenova N.V. Influence of the resonator angular displacements in a hemispherical resonator gyro on the coupling between the working and beam-type vibrations, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 686–690. <https://doi.org/10.3103/S0025654409050057>
21. Panovko Ya.G. *Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh sistem* (Internal friction during vibrations of elastic systems), Moscow: Fizmatlit, 1960, 193 p.
22. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery* (Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples), Moscow: Fizmatlit, 2005, 320 p.
23. Trutnev G.A. Sixteen points' model of hemispherical wave gyroscope, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 2, pp. 135–146 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/vm110210>
24. Drong V., Dubinin V., Il'in M., Kolesnikov K., Kosmodem'yanskii V., Nazarenko B., Pankratov A., Rusanov P., Saratov Yu., Stepanchuk Yu., Tusheva G., Shkapov P. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* (The course of theoretical mechanics), Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2017, 584 p.
25. Verzhbitskii V.M. *Osnovy chislennykh metodov* (Fundamentals of numerical methods), Moscow: Vysshaya shkola, 2009.

Received 14.01.2019

Trutnev Georgii Aleksandrovich, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: TrutnevGA@gmail.com