МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 66–89.

УДК 517.518.126, 517.911

© *В. Я. Дерр*

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ *-ИНТЕГРАЛА

Продолжаются исследования автора по теории правильных функций и *-интеграла. Изучается возможность представления правильной функции в виде суммы непрерывной справа и непрерывной слева функций (rl-представимости). Доказывается предельная теорема для *-интеграла, позволяющая приближать разрывные интегрируемую и интегрирующую функции последовательностями абсолютно непрерывных функций. Доказана новая теорема о δ-корректности решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах, определяемого с помощью квазидифференциального уравнения. Получена формула для вычисления полной вариации неопределенного *-интеграла от σ-непрерывной функции по функции ограниченной вариации, обобщающая известную формулу для полной вариации абсолютно непрерывной функции. Формула интересна и в случае неопределенного RS-интеграла.

Ключевые слова: правильные функции, σ-непрерывные функции, rl-представление, *-интеграл, квазидифференциальное уравнение, обобщенные функции, δ-корректность.

DOI: 10.35634/vm230105

В статье автора [1] изучаются свойства правильных и σ-непрерывных функций, введено понятие *-интеграла типа Стилтьеса, позволяющего интегрировать разрывные σ-непрерывные функции по разрывным функциям ограниченной вариации, установлены основные свойства *-интеграла. Здесь продолжаются эти исследования. Изучается возможность представления правильной функции в виде суммы непрерывной справа и непрерывной слева функций (rl-представимости). Это свойство используется затем для доказательства специфической предельной теоремы для *-интеграла, которая позволяет приближать разрывные интегрируемую и интегрирующую функции последовательностями абсолютно непрерывных функций. Указанная предельная теорема позволила доказать новую теорему о δ-корректности решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах, определяемого с помощью квазидифференциального уравнения.

В статье также получена формула для вычисления полной вариации неопределенного *-интеграла от σ-непрерывной функции по функции ограниченной вариации, которую можно рассматривать как обобщение известной формулы для полной вариации абсолютно непрерывной функции.

§ 1. Функциональные пространства

1°. Всюду ниже рассматриваются функции $x\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, определенные на фиксированном отрезке $[a,b]$ вещественной оси. Иногда требуется продолжить эти функции влево от $t=a$ и вправо от $t=b$ по следующему правилу:

$$x(t)=x(a) \text{ для } t<a, \quad x(t)=x(b) \text{ для } t>b. \tag{1.1}$$

Будем делать это без дополнительных оговорок.

Множество непрерывных функций (ограниченных функций) с нормой $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ $\big(\|x\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|\big)$ как обычно, обозначаем $\mathbf{C}=\mathbf{C}[a,b]$ $\big(\mathbf{M}=\mathbf{M}[a,b]\big)$. Через $\mathbf{BV}=$ $=\mathbf{BV}[a,b]$ обозначим банахово пространство функций ограниченной вариации с нормой

$\|x\| \doteq |x(a)| + \bigvee\limits_a^b(x)$. Иногда удобнее использовать норму $\|x\|^* \doteq \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \bigvee\limits_a^b(x)$. Нетрудно убедиться, что $\frac{1}{2}\|x\|^* \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|^*$, поэтому обе нормы эквивалентны.

Обозначим $\sigma_s(x) = x(s+)-x(s-)$ $\big(\sigma_s^+(x) = x(s+)-x(s), \sigma_s^-(x) = x(s)-x(s-)\big)$ — скачок (соответственно, правый скачок, левый скачок) функции $x(\cdot)$ в точке $s \in [a, b]$. Как известно (см., например, [2, с. 9, 22]), функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы

$$x(t) = x_{\mathfrak{c}}(t) + x_{\mathfrak{d}}(t) \quad (x_{\mathfrak{c}},\ x_{\mathfrak{d}} \in \mathbf{BV}), \quad \text{где} \tag{1.2}$$

$$x_{\mathfrak{d}}(a) = 0, \quad x_{\mathfrak{d}}(t) = \sum_{s\in T(x)} \sigma_s(x)\mathfrak{h}_s(t) + \sigma_t^-(x) \quad (t > a) \quad - \tag{1.3}$$

функция скачков (дискретная часть), а $x_{\mathfrak{c}}(t) = x(t) - x_{\mathfrak{d}}(t)$ — непрерывная часть функции $x(\cdot)$; выше $T(x)$ означает множество точек разрыва функции $x(\cdot)$, а $\mathfrak{h}_c(\cdot)$ — единичная функция, $\mathfrak{h}_c(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ для } \ t \leqslant c \ \ (a \leqslant c < b), \\ 1 \ \text{ для } \ t > c \ \ (a < c < b), \\ 1 \ \text{ для } \ t = b \ \ (c = b). \end{cases}$ Ввиду соглашения $x_{\mathfrak{d}}(a) = 0$ выполняется равенство $x_{\mathfrak{c}}(a) = x(a)$. В силу этого представление функции ограниченной вариации в виде (1.2) единственно. При этом (см., например, [2, с. 26])

$$\bigvee_a^b(x) = \bigvee_a^b(x_{\mathfrak{c}}) + \bigvee_a^b(x_{\mathfrak{d}}), \qquad \bigvee_a^b(x_{\mathfrak{d}}) = \sum_{s\in T(x)} \big(|\sigma_s^-(x)| + |\sigma_s^+(x)|\big).$$

Если $T(x)$ — счетное множество, $T(x) = \{c_1, c_2, \ldots\}$, то предполагаем нумерацию его элементов фиксированной; говорим также: *определенно занумерованное множество;* изменив нумерацию, получаем *другое* определенно занумерованное множество.

Пусть $x \in \mathbf{BV}$, $x_\pi(0) \doteq 0$, $x_\pi(t) \doteq \bigvee\limits_a^t(x)$ $(t > a)$, $x_\nu(t) \doteq x_\pi(t) - x(t)$; тогда $x_\pi(\cdot)$, $x_\nu(\cdot)$ — возрастающие функции (см. теорему 2.6 в [2, с. 20]). Таким образом, функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности возрастающих функций, а как показано в статье [3], ее также можно представить в виде суммы $x(t) = x_+(t) + x_-(t)$, где $x_+(\cdot)$ $\big(x_-(\cdot)\big)$ непрерывна справа (слева), причем $\bigvee\limits_a^b(x) = \bigvee\limits_a^b(x_+) + \bigvee\limits_a^b(x_-)$. Кроме того, в дальнейшем понадобится следующее утверждение, также доказанное в [3].

Утверждение 1. *Пусть* $x_n(t) \to x(t)$ $(n \to \infty,\ t \in [a, b])$ *и* $\bigvee\limits_a^b(x_n) \leqslant \bigvee\limits_a^b(x)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда* $\bigvee\limits_a^b(x_n) \to \bigvee\limits_a^b(x)$ $(n \to \infty)$.

Рассмотрим векторное пространство $\mathbf{H} = \mathbf{H}[a, b]$ функций $x \in \mathbf{BV}$, имеющих представление (1.3); в $\mathbf{H}$ определим норму: $\|x\| = \sum\limits_{s\in T(x)} \big(|\sigma_s^-(x)| + |\sigma_s^+(x)|\big) \left(= \bigvee\limits_a^b(x)\right)$. Соответствие

$$\Big(x \in \mathbf{H}\Big) \quad \rightleftarrows \quad a(x) = \sigma(x) \doteq \big(\sigma_{c_1}^-(x),\ \sigma_{c_1}^+(x),\ \sigma_{c_2}^-(x),\ \sigma_{c_2}^+(x), \ldots\big) \in \mathbf{l}$$

между $\mathbf{H}$ и пространством последовательностей $\mathbf{l}$, очевидно, является изометрическим изоморфизмом, так что $\mathbf{H}$ — банахово пространство, подпространство $\mathbf{BV}$.

Обозначим $\mathbf{CBV} \doteq \mathbf{C} \bigcap \mathbf{BV}$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{CBV}} \doteq \|x\|^*$; $\mathbf{CBV}$ — *банахово пространство и, следовательно, подпространство банахова пространства* $\mathbf{BV}$. В силу единственности представления (1.2) $\mathbf{BV} = \mathbf{CBV} \dotplus \mathbf{H}$.

Положим $\mathbf{CH} \doteq \mathbf{CH}[a,b] \doteq \mathbf{C}[a,b] \dot{+} \mathbf{H}[a,b]$; элементы $x \in \mathbf{CH}$, таким образом, однозначно представимы в виде (1.2), где $x_{\mathfrak{d}} \in \mathbf{H}$, а непрерывная функция $x_{\mathfrak{c}}(\cdot)$ теперь может иметь *бесконечную полную вариацию*; положим также $\|x\|_{\mathbf{CH}} \doteq \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sum\limits_{t\in T(x)} |\sigma_t(x)|$; $\mathbf{CH}$ — банахово пространство относительно этой нормы. Очевидно, имеет место теоретико-множественное включение $\mathbf{BV} \subset \mathbf{CH}$.

Как обычно, обозначим через $\mathbf{AC} = \mathbf{AC}[a,b]$ $\big(\subset \mathbf{BV}\big)$ банахово пространство *абсолютно непрерывных* функций с нормой $\|x\| = |x(a)| + \displaystyle\int_a^b |x'(t)|\,dt$ $\Big(= |x(a)| + \bigvee\limits_a^b(x)\Big)$; $\mathbf{AC}$ — подпространство $\mathbf{BV}$.

2°. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{R}[a,b]$ — банахово пространство *правильных* функций — функций, имеющих конечные односторонние пределы $x(a+)$, $x(b-)$, $x(t+)$, $x(t)$ $(t \in (a,b))$. По поводу таких функций см. [1, 2, 4–9]. Ясно, что функции из $\mathbf{C}$, $\mathbf{BV}$, $\mathbf{CH}$, — правильные.

Пример 1. Пусть α — вещественный параметр, числовая последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $t_1 < 1$, $t_{n+1} < t_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $t_n \to +0$. Полагаем $x_\alpha(0) = 0$, $x_\alpha(t) = \dfrac{t - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}} t_n$ для $t_{n+1} < t < t_n$, $x_\alpha(t_n) = \alpha t_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n$ сходится, то $x_\alpha \in \mathbf{BV}[0,1]$ $\Big(\bigvee\limits_0^1(x_\alpha) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n$ при $\alpha \in [0,1]\Big)$; пусть этот ряд расходится. Тогда согласно [2, с. 58] $x_\alpha \in \mathbf{R}[0,1] \setminus \mathbf{BV}[0,1]$; здесь даже $x_\alpha \in \mathbf{R}[0,1] \setminus \mathbf{CH}[0,1]$.

При $\alpha = 1$ получаем непрерывную слева функцию, при $\alpha = 0$ она становится непрерывной справа, при $0 < \alpha < 1$ ее значение в точке разрыва находится строго между пределами слева и справа, при $\alpha < 0$ и $\alpha > 1$ значения функции в точке разрыва выходят за пределы отрезка $[x_\alpha(t-), x_\alpha(t+)]$. Важно, что при любых α $x_\alpha(t_n) \to 0$ $(n \to \infty)$; если это условие нарушить, функция перестанет быть правильной. Отметим также, что функция останется правильной, если изменить ее значения в конечном числе точек.

Обозначим $\mathbf{N} = \mathbf{N}[a,b]$ — множество ограниченных функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющих не более чем счетное множество $T(x)$ точек разрыва. Очевидно, $\mathbf{N}$ — векторное пространство; снабдив его нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$, получим банахово пространство [1, 8]. Функции $x \in \mathbf{N}[a,b]$ будем называть σ-непрерывными. В [1] показано, что σ-непрерывные функции RS-интегрируемы по непрерывным функциям ограниченной вариации. Более того, пара $\big(\mathbf{N}, \mathbf{CBV}\big)$ — *точная RS-пара* [8].

Отметим, что имеют место строгие (*теоретико-множественные*) включения:

$$\underline{\mathbf{AC} \subset \mathbf{CBV} \subset \mathbf{BV}}, \qquad \underline{\mathbf{H} \subset \mathbf{BV}} \subset \mathbf{CH} \subset \underline{\mathbf{R} \subset \mathbf{N} \subset \mathcal{R} \subset \mathbf{M}},$$

причем *подчеркнутые включения* являются также *вложениями банаховых пространств.*

§ 2. Об rl-представимости правильных функций

1°. По аналогии с $\mathbf{CH}$ определим более широкое векторное пространство $\big(\subset \mathbf{R}\big)$. Пусть $T = \{c_1, c_2, \ldots\}$ — не более чем счетное, определенно занумерованное множество; тройка (y, T, a) такова, что $y(\cdot)$ пробегает пространство $\mathbf{C}$; $a = (a_1, a_2, \ldots)$ пробегает банахово пространство $\mathbf{cs} \doteq \Big\{x = (x_1, x_2, \ldots)\colon$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, $\|x\| \doteq \sup\limits_n \Big|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big|\Big\}$ [10, с. 260].

Векторное пространство функций вида $x(t) \doteq y(t) + z(t)$, где

$$z(a) = 0, \quad z(t) \doteq \sum_{c_j < t} s_j + p_t, \quad p_j \doteq a_{2j-1}, \quad q_j \doteq a_{2j}, \quad s_j \doteq p_j + q_j,$$
$$j = 1, 2, \ldots, \ (\text{при } t \notin T \ p_t = q_t = s_t = 0), \tag{2.1}$$

обозначим $\mathcal{C}s = \mathcal{C}s[a, b]$. Тогда $x_\mathfrak{c}(t) = y(t)$, $T(x) = T$, $\sigma^-_{c_j}(x) = a_{2j-1}$, $\sigma^+_{c_j}(x) = a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\sigma(x) = a$. Заметим, что ряд в (2.1) может сходиться и неабсолютно.

По построению имеет место (теоретико-множественное) включение $\mathcal{C}s \subset \mathbf{R}$.

2°. Назовем функцию $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ rl-представимой (имеющей rl-представление), если $x(t) = x_+(t) + x_-(t)$, где $x_+(\cdot)$ $\big(x_-(\cdot)\big)$ непрерывна справа (слева). Само по себе rl-представление функции еще не гарантирует ее правильности.

Пример 2. Пусть $T(x) \doteq \{0, \ldots, t_{n+1}, t_n, \ldots, t_2, t_1 = 1\}$, $t_{n+1} < t_n$, $t_n \to 0$ $(n \to \infty)$,

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - t^2} & \text{для } \ -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ (-1)^n & \text{для } \ t_{n+1} < t \leqslant t_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Очевидно, $x(\cdot)$ — непрерывна слева, значит, rl-представима (второе слагаемое — нулевое), однако $x \notin \mathbf{R}$ (так как не существует $x(0+)$).

Обозначим $\mathcal{RL} = \mathcal{RL}[a, b]$ — векторное пространство *правильных rl-представимых функций*. Как отмечалось выше, $\mathbf{BV} \subset \mathcal{RL}$, а так как $\mathbf{H} \subset \mathbf{BV}$, то и $\mathbf{CH} \subset \mathcal{RL}$. Легко также убедиться, что выкладки работы [3] (кроме относящихся к доказательству равенства вариаций) остаются справедливыми и для функций из $\mathcal{C}s$, так что и $\mathcal{C}s \subset \mathcal{RL}$.

Перечисленными подмножествами $\mathcal{RL}$ не исчерпывается. Так, функция $x_0(\cdot)$ $\big(x_1(\cdot)\big)$ из примера 1, при расходимости указанного там ряда, принадлежит множеству $\mathcal{RL} \setminus \mathcal{C}s$ (она сама непрерывна справа (слева)). Укажем более широкий класс функций, лежащий в $\mathcal{RL} \setminus \mathcal{C}s$.

Пусть $x \in \mathbf{R}$. Функция $y(t) = x(t+)$ $\big(y(t) = x(t-)\big)$, очевидно, непрерывна справа (слева). Положим $(\mathcal{W}x)(t) \doteq x(t) - \dfrac{1}{2}\big(x(t+) + x(t-)\big)$. Легко видеть, что в точках непрерывности $x(\cdot)$ $(\mathcal{W}x)(t) = 0$, а при $s \in T(x)$ $(\mathcal{W}x)(s) = x(s) - \dfrac{1}{2}\big(x(s+) + x(s-)\big) = \sigma^-_s(x) - \sigma^+_s(x) \doteq$ $\doteq \delta_s(x)$.

Обозначим векторное пространство функций, отличных от тождественного нуля разве лишь на не более чем счетном множестве, $\widetilde{H} = \widetilde{H}[a, b]$. Тогда

$$\mathcal{W}\colon \mathbf{R} \to \widetilde{H}, \qquad (\mathcal{W}x)(t) = \begin{cases} \delta_t(x) & \text{для } \ t \in T(x), \\ 0 & \text{для } \ t \in [a, b] \setminus T(x). \end{cases}$$

Так как $x(t) = \dfrac{1}{2}x(t+) + \dfrac{1}{2}x(t-) + (\mathcal{W}x)(t)$, то для доказательства принадлежности $x \in \mathcal{RL}$ достаточно доказать. что $\mathcal{W}x \in \mathcal{RL}$.

Пусть $x \in \mathbf{R}$. Если $T(x)$ — конечное множество, то можно считать, что $x \in \mathbf{CH}$ и, следовательно, допускает rl-представление. Поэтому в дальнейшем считаем $T(x)$ счетным множеством. Пусть множество $T(x) = \{t_1, t_2, \ldots\}$ имеет *только одну* предельную точку t^*. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая и $t_n \to t^*+$ (как это имеет место в примере 1); если это не так, то расуждения очевидным образом видоизменяются. Пусть далее $t_n^{'} > t_n$, $(t_n, t_n^{'}) \bigcap T(x) = \varnothing$; (так как t_n — изолированная точка, то такая $t_n^{'}$ найдется); полагаем

$$r_n(t) = \begin{cases} 0 \ \text{для} \ t < t_n \ \text{ и } \ t \geqslant t_n^{'}, \\ \delta_{t_n}(x) \dfrac{t - t_n^{'}}{t_n - t_n^{'}} \ \text{ для } \ t_n \leqslant t < t_n^{'}, \end{cases} \qquad l_n(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ для } \ t \leqslant t_n \ \text{ и } \ t \geqslant t_n^{'}, \\ -\delta_{t_n}(x) \dfrac{t - t_n^{'}}{t_n - t_n^{'}} \ \text{ для } \ t_n < t < t_n^{'}; \end{cases}$$

по построению функции $r_n(\cdot)$ $\big(l_n(\cdot)\big)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны справа (слева). Так как $(\mathcal{W}x)(\cdot)$ — правильная функция, то

$$\delta_{t_n}(x) \to 0, \ \text{а значит,} \ r_n(t), \ l_n(t) \rightrightarrows 0 \ \ (n \to \infty). \tag{2.2}$$

Кроме того, в окрестности t_n

$$r_n(t) + l_n(t) = \begin{cases} \delta_{t_n}(x) \ \text{ для } \ t = t_n, \\ 0 \ \text{ для } \ t \neq t_n. \end{cases}$$

Полагаем далее $y_+(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t)$, $y_-(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n(t)$. Заметим, что в каждой из сумм при каждом $t \in [a, b]$ имеется только одно, отличное от тождественного нуля, слагаемое; $y_+(\cdot)$ $\big(y_-(\cdot)\big)$ непрерывна справа (слева); в силу (2.2) в точке t^* обе функции непрерывны. Очевидно также, что $y_+(t) + y_-(t) = (\mathcal{W}x)(t)$, поэтому $x(t) = \big(\frac{1}{2}x(t+) + y_+(t)\big) + \big(y_-(t) + \frac{1}{2}x(t-)\big)$, то есть $x \in \mathcal{RL}$.

Случай, когда множество $T(x)$ точек разрыва правильной функции $x(\cdot)$ имеет только *конечное число* m предельных точек сводится к рассмотренному случаю разбиением $T(x)$ на m последовательностей, сходящихся каждая к своей предельной точке, так что в итоге оказывается, что $x \in \mathcal{RL}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{Q} \doteq \{x \in \mathbf{R}\colon T(x)$ *имеет только конечное число предельных точек*$\}$. *Тогда* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{RL}$.

3°. Совпадают ли $\mathcal{RL}$ и $\mathbf{R}$, или $\mathbf{R} \setminus \mathcal{RL} \neq \varnothing$? Вопрос пока остается открытым.

Приведем в заключение пример правильной функции $x(\cdot)$, разрывной во всех рациональных точках, $T(x) = \mathbb{Q} \bigcap (0, 1)$, но имеющей rl-представление, несмотря на расходимость ряда скачков (заметим, что здесь $T(x)$ даже всюду плотно на $[0, 1]$).

В нижеследующей таблице размещены *все* рациональные числа интервала $(0, 1)$ *по одному разу*. В строке с номером m находятся правильные дроби с числителем m, при этом числа, которые уже размещены в предыдущих строках (или в данной строке ранее) пропущены (например, во второй строке пропущены все дроби с четным знаменателем, в третьей — со знаменателем, кратным трем и т. д.)

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots \\[4pt] \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{2}{11} & \ldots \\[4pt] \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} & \frac{3}{10} & \ldots \\[4pt] \frac{4}{5} & \frac{4}{7} & \frac{4}{9} & \frac{4}{11} & \frac{4}{13} & \ldots \\[4pt] \frac{5}{6} & \frac{5}{7} & \frac{5}{8} & \frac{5}{9} & \frac{5}{11} & \ldots \\[4pt] \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Обозначим элемент этой таблицы, стоящий в строке с номером m и в столбце с номером n через t_{mn}. Заметим, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_{mn}$, $m=1,2,\ldots$, *расходятся*. Построим функции $x_m(\alpha_m,\cdot)$ $(\alpha_m\in\mathbb{R},\ m=1,2,\ldots)$ по типу примера 1. По построению функция $x_m(\alpha_m,\cdot)$ разрывна в точках t_{mn} $(n=1,2,\ldots)$ и непрерывна в остальных точках отрезка $[0,1]$ $(m=1,2,\ldots)$. Отметим, что в каждой рациональной точке интервала $(0,1)$ разрывна одна и только одна из функций $x_m(\alpha_m,\cdot)$. При этом $x_m(\alpha_m,\cdot)\in\mathcal{RL}$ $(m=1,2,\ldots)$.

Пример 3. Полагаем $x(\alpha,t)\doteq\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{x_m(\alpha_m,t)}{2^m}$ $\big(\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\big)$. Ряд равномерно сходится, поэтому $x(\alpha,\cdot)$ непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках (из $(0,1)$). При этом $x(\alpha,\cdot)\in\mathcal{RL}$.

Как уже было отмечено, $x_m(\alpha_m,t)=\big(x_m\big)_+(\alpha_m,\,t)+\big(x_m\big)_-(\alpha_m,\,t)$. Поэтому достаточно положить $x_\pm(\alpha,t)\doteq\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\big(x_m\big)_\pm(\alpha_m,\,t)}{2^m}$. Так как ряды равномерно сходятся, то отсюда получаем нужное представление.

§ 3. *-интеграл

1°. Пусть $x\in\mathbf{N}[a,b]$, $g\in\mathbf{BV}[a,b]$, $a<b$. Положим

$$(*)\int_a^b x(t)\,dg(t)\doteq\int_a^b x(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t)+\Big(x(a)\sigma_a^+(g)+\sum_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}x(t)\sigma_t(g)+x(b)\sigma_b^-(g)\Big).\qquad(3.1)$$

Первое слагаемое в правой части (3.1) представляет собой интеграл Римана–Стилтьеса по отрезку $[a,b]$. Как было отмечено выше, σ-непрерывные функции RS-интегрируемы по непрерывным функциям ограниченной вариации. В силу конечности полной вариации функции g абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}\sigma_t(g)$, а из ограниченности функции x $\big($и, следовательно, ограниченности последовательности $\{x(t)\}_{t\in T(g)\bigcap(a,b)}\big)$ следует и абсолютная сходимость ряда в (3.1).

*-интеграл $(*)\int_a^b x(t)\,dg(t)$ введен и изучен в [1]. Для удобства ссылок приведем здесь (без доказательства) некоторые утверждения из [1].

Теорема 2. *Пусть* $x_n\in\mathbf{N}[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$, $x_n(t)\rightrightarrows x(t)$ $(n\to\infty)$, $g\in\mathbf{BV}[a,b]$; *тогда*

$$\lim_{n\to\infty}(*)\int_a^b x_n(t)\,dg(t)=(*)\int_a^b x(t)\,dg(t).\qquad(3.2)$$

Теорема 3. *Пусть* $x_n,\ x\in\mathbf{N}[a,b]$, $\|x_n\|\leqslant M$, $n\in\mathbb{N}$, $x_n(t)\to x(t)$, $t\in[a,b]$ $(n\to\infty)$, $g\in\mathbf{BV}[a,b]$. *Тогда имеет место предельное соотношение* (3.2).

Непосредственно из доказательства теоремы 11 из [1] легко усматривается следующая модификация теоремы Хелли.

Теорема 4. *Пусть* $x\in\mathbf{N}[a,b]$, *существует константа* $V>0$ *такая, что* $\bigvee\limits_a^b(g_n)\leqslant V$, $n=1,2,\ldots$, *имеет место сходимость*

$$\big(g_n\big)_{\mathfrak{d}}(t)\to g_{\mathfrak{d}}(t),\quad \big(g_n\big)_{\mathfrak{c}}(t)\to g_{\mathfrak{c}}(t)\ (n\to\infty),\qquad(3.3)$$

и ряд

$$\sum_{t\in T}\big|\sigma_t(g_n)\big| \qquad \Big(T \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T(g_n)\Big) \tag{3.4}$$

сходится равномерно относительно $n\in\mathbb{N}$*. Тогда справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}(*)\int_a^b x(t)\,dg_n(t) = (*)\int_a^b x(t)\,dg(t).$$

2°. Ввиду обнаруженной неточности в формулировке теоремы 7 из [1] и ее доказательстве приводим исправленный вариант с полным доказательством. Пусть $x\in\mathbf{CH}[a,b]$, $g\in\mathbf{BV}[a,b]$; тогда имеет смысл выражение в правой части равенства

$$(*)\int_a^b g(t)\,dx(t) \doteq \int_a^b g(t)\,dx_{\mathfrak{c}}(t) + \Big(g(a)\sigma_a^+(x) + \sum_{t\in T(x)\bigcap(a,b)} g(t)\sigma_t(x) + g(b)\sigma_b^-(x)\Big), \tag{3.5}$$

что и оправдывает его обозначение в виде *-интеграла.

Теорема 5. *Пусть* $x\in\mathbf{CH}[a,b]$*,* $g\in\mathbf{BV}[a,b]$*; тогда имеет место равенство* (*формула интегрирования по частям*)

$$(*)\int_a^b x(t)\,dg(t)+(*)\int_a^b g(t)\,dx(t) = x(t)g(t)\Big|_a^b - \sum_{t\in T(x)\bigcap T(g)}\Big(\sigma_t^+(x)\sigma_t^+(g)-\sigma_t^-(x)\sigma_t^-(g)\Big). \tag{3.6}$$

Доказательство. Ввиду соглашения (1.1), $\sigma_a^+(x)=\sigma_a(x)$, $\sigma_b^-(x)=\sigma_b(x)$; с учетом этого внеинтегральные слагаемые в (3.1) и (3.5) могут быть записаны соответственно в виде $\sum\limits_{t\in T} x(t)\sigma_t(g)$, $\sum\limits_{t\in T} g(t)\sigma_t(x)$ (причиной, по которой эти упрощения в записи не были сделаны сразу при определениях (3.1), (3.5), является необходимость рассматривать интегралы с переменными пределами, см., например, ниже § 4).

Из определений (3.1), (3.5) (с учетом упрощений) и представлений (1.2) и (1.3) имеем

$$(*)\int_a^b x(t)\,dg(t) + (*)\int_a^b g(t)\,dx(t) = F+G+H, \tag{3.7}$$

где обозначено

$$F \doteq \int_a^b x_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) + \int_a^b g_{\mathfrak{c}}(t)\,dx_{\mathfrak{c}}(t) \quad \Big(= g_{\mathfrak{c}}(t)x_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b\Big),$$

$$G \doteq \int_a^b x_{\mathfrak{d}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) + \int_a^b g_{\mathfrak{d}}(t)\,dx_{\mathfrak{c}}(t), \qquad H \doteq \sum_{t\in T} x(t)\sigma_t(g) + \sum_{t\in T} g(t)\sigma_t(x).$$

В силу формулы интегрирования по частям для интеграла Стилтьеса [2, с. 34] и формулы для вычисления этого интеграла [2, с. 53]

$$\int_a^b x_{\mathfrak{d}}(t)\,dg_{\mathfrak{c}}(t) = x_{\mathfrak{d}}(t)g_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b - \int_a^b g_{\mathfrak{c}}(t)\,dx_{\mathfrak{d}}(t) = x_{\mathfrak{d}}(b)g_{\mathfrak{c}}(b) - \sum_{t\in T} g_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_t(x);$$

аналогично

$$\int_a^b g_{\mathfrak{d}}(t)\,dx_{\mathfrak{c}}(t) = g_{\mathfrak{d}}(t)x_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b - \int_a^b x_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{d}}(t) = g_{\mathfrak{d}}(b)x_{\mathfrak{c}}(b) - \sum_{t\in T} x_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_t(g).$$

Складывая два последних равенства, получаем

$$F+G=g_{\mathfrak{c}}(t)x_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b+x_{\mathfrak{d}}(t)g_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b+g_{\mathfrak{d}}(t)x_{\mathfrak{c}}(t)\Big|_a^b-\int_a^b g_{\mathfrak{c}}(t)\,dx_{\mathfrak{d}}(t)-$$
$$-\int_a^b x_{\mathfrak{c}}(t)\,dg_{\mathfrak{d}}(t)=g(t)x(t)\Big|_a^b-g_{\mathfrak{d}}(b)x_{\mathfrak{d}}(b)-\sum_{t\in T}g_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_(x)-\sum_{t\in T}x_{\mathfrak{c}}(t)\sigma_t(g)=$$
$$=g(t)x(t)\Big|_a^b-H+S,\ \text{где}\ S\doteq\sum_{t\in T}\big(g_{\mathfrak{d}}(t)\sigma_t(x)+x_{\mathfrak{d}}(t)\sigma_t(g)\big)-g_{\mathfrak{d}}(b)x_{\mathfrak{d}}(b).$$

Согласно формуле (1.2), с учетом наших соглашений, $x_{\mathfrak{d}}(b)=\sum\limits_{t\in T}\sigma_t(x)$, $g_{\mathfrak{d}}(b)=\sum\limits_{t\in T}\sigma_t(g)$; $x_{\mathfrak{d}}(t)=\sum\limits_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(x)+\sigma_t^-(x)$, $g_{\mathfrak{d}}(t)=\sum\limits_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(g)+\sigma_t^-(g)$. Подставив эти выражения в S, получим

$$S=\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\left(\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(g)+\sigma_t^-(g)\right)+\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\left(\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(x)+\sigma_t^-(x)\right)-$$
$$-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\left(\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(x)+\sigma_t(x)+\sum_{s\in T,\,s>t}\sigma_s(x)\right)=\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(g)+$$
$$+\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(x)+\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sigma_t^-(g)+\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t^-(x)-$$
$$-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(x)-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t(x)-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sum_{s\in T,\,s>t}\sigma_s(x).$$

Второе и пятое слагаемые в правой части последнего равенства исчезают; остается

$$S=\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(g)+\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sigma_t^-(g)+\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t^-(x)-$$
$$-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t(x)-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sum_{s\in T,\,s>t}\sigma_s(x). \tag{3.8}$$

Так как двойной ряд $\sum\limits_{t,s\in T}\sigma_t(x)\sigma_s(g)$ сходится абсолютно (частичные суммы двойного ряда из модулей ограничены числом $\|x\|\cdot\|g\|$, где одна из норм в пространстве $\mathbf{BV}[a,b]$, а другая — в пространстве $\mathbf{CH}[a,b]$), то в последнем слагаемом в (3.8) можно переменить порядок суммирования. Выполнив это и переобозначив индексы суммирования, в итоге придем к равенству

$$\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sum_{s\in T,\,s>t}\sigma_s(x)=\sum_{s\in T}\sigma_s(x)\sum_{t\in T,\,t<s}\sigma_t(g)=\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sum_{s\in T,\,s<t}\sigma_s(g).$$

Таким образом, в (3.8) первое слагаемое и последнее взаимно уничтожаются. Остается:

$$S=\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sigma_t^-(g)+\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t^-(x)-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t(x)=\sum_{t\in T}\sigma_t(x)\sigma_t^-(g)-\sum_{t\in T}\sigma_t(g)\sigma_t^+(x).$$

Преобразуем полученное выражение:

$$S=\sum_{t\in T}\big(\sigma_t^+(x)+\sigma_t^-(x)\big)\sigma_t^-(g)-\sum_{t\in T}\big(\sigma_t^+(g)+\sigma_t^-(g)\big)\sigma_t^+(x)=$$
$$=\sum_{t\in T}\Big(\sigma_t^+(x)\sigma_t^-(g)+\sigma_t^-(x)\sigma_t^-(g)-\sigma_t^+(g)\sigma_t^+(x)-\sigma_t^-(g)\sigma_t^+(x)\Big).$$

Первое и четвертое слагаемые взаимно уничтожаются. В итоге

$$S = \sum_{t\in T}\Big(\sigma_t^-(x)\sigma_t^-(g) - \sigma_t^+(x)\sigma_t^+(g)\Big) = -\sum_{t\in T}\Big(\sigma_t^+(x)\sigma_t^+(g) - \sigma_t^-(x)\sigma_t^-(g)\Big).$$

Таким образом, окончательно (см. также (3.7))

$$F + G + H = x(t)g(t)\Big|_a^b - \sum_{t\in T}\Big(\sigma_t^+(x)\sigma_t^+(g) - \sigma_t^-(x)\sigma_t^-(g). \qquad \square$$

Замечание 1. Формуле интегрирования по частям (3.6) можно придать точно такой же вид как в [11, с. 48] для интеграла Перрона–Стилтьеса. Пусть $x \in \mathbf{CH}[a,b]$, $g \in \mathbf{BV}[a,b]$; $[c,d] \subset [a,b]$; тогда имеет место равенство

$$(*)\int_c^d x(t)\,dg(t) + (*)\int_c^d g(t)\,dx(t) =$$
$$= x(t)g(t)\Big|_c^d - \sum_{t\in T,\, t\in[c,d)} \big(\sigma_t^+(x)\sigma_t^+(g)\big) + \sum_{t\in T,\, t\in(c,d]} \big(\sigma_t^-(x)\sigma_t^-(g)\big).$$

§ 4. Обобщение классической формулы

Известно (см., например, [12, с. 279]): если $x \in \mathbf{AC}$, то $\bigvee\limits_a^b(x) = \int_a^b |x^{'}(t)|\,dt$. Приведем здесь обобщение этой формулы.

Теорема 6. *Пусть* $x \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{BV}$, $\Phi(t) = (*)\int_a^t x(s)\,dg(s)$, $\Phi^{(\pi)})(t) = (*)\int_a^t x(s)\,dg_\pi(s)$. *Тогда*

$$\bigvee_a^b(\Phi) = \bigvee_a^b(\Phi^{(\pi)}) = (*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t). \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau = \{s_j\}_{j=1}^p$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Оценим суммы $v_\tau\big(\Phi\big)$, $v_\tau\big(\Phi^{(\pi)}\big)$:

$$v_\tau\big(\Phi\big) = \sum_{j=1}^p \Big|\Phi(s_j) - \Phi(s_{j-1})\Big| = \sum_{j=1}^p \left|(*)\int_a^{s_j} x(t)\,dg(t) - (*)\int_a^{s_{j-1}} x(t)\,dg(t)\right| =$$
$$= \sum_{j=1}^p \left|(*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} x(t)\,dg(t)\right| \leqslant \sum_{j=1}^p (*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} |x(t)|\,dg_\pi(t) = (*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t).$$

Точно так же

$$v_\tau\big(\Phi^{(\pi)}\big) = \sum_{j=1}^p \Big|\Phi^{(\pi)}(s_j) - \Phi^{(\pi)}(s_{j-1})\Big| =$$
$$= \sum_{j=1}^p \left|(*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} x(t)\,dg_\pi(t)\right| \leqslant \sum_{j=1}^p (*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} |x(t)|\,dg_\pi(t) = (*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t).$$

Следовательно, верны оценки

$$\bigvee_a^b\big(\Phi\big) \leqslant (*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t), \quad \bigvee_a^b\big(\Phi^{(\pi)}\big) \leqslant (*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t), \quad \bigvee_a^b\big(\Phi\big) \leqslant \bigvee_a^b\big(\Phi^{(\pi)}\big). \tag{4.2}$$

Представим $x(\cdot)$ в виде равномерного предела последовательности ступенчатых функций. Для этого рассмотрим равномерное разбиение

$$\tau_m = \{t_k\}_{k=0}^m, \quad t_k = a + \frac{k}{m}(b-a). \tag{4.3}$$

Положим $x_m(a) = x(a)$, $x_m(t) = x\big(t_k\big)$ для $t_{k-1} < t \leqslant t_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$; тогда $x_m(t) \rightrightarrows x(t)$ на $[a,b]$ и по теореме 2 (по поводу пояснения (A) см. ниже)

$$(*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t) \overset{(A)}{=} \lim_{m\to\infty}(*)\int_a^b |x_m(t)|\,dg_\pi(t). \tag{4.4}$$

Введем также интегралы

$$X_m(t) \doteq (*)\int_a^t x_m(s)\,dg(s)\ \big(\rightrightarrows \Phi(t)\big), \quad X_m^{(\pi)}(t) \doteq (*)\int_a^t x_m(s)\,dg_\pi(s)\ \big(\rightrightarrows \Phi^{(\pi)}(t)\big). \tag{4.5}$$

Равномерная на $[a,b]$ сходимость также следует из процитированной выше теоремы.

Имеет место цепочка утверждений (см. ниже пояснения)

$$\begin{aligned}(*)\int_a^b |x_m(t)|\,dg_\pi(t) &\overset{(B)}{=} \sum_{k=1}^m (*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} |x_m(t)|\,dg_\pi(t) \overset{(C)}{=} \sum_{k=1}^m (*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} |x(t_k)|\,dg_\pi(t) \overset{(D)}{=}\\ &= \sum_{k=1}^m |x(t_k)|(*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} dg_\pi(t) \overset{(E)}{=} \sum_{k=1}^m \left|x(t_k)(*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} dg_\pi(t)\right| \overset{(F)}{=} \sum_{k=1}^m \left|(*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} x(t_k)\,dg_\pi(t)\right| \overset{(G)}{=}\\ &= \sum_{k=1}^m \left|(*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} x_m(t)\,dg_\pi(t)\right| \overset{(H)}{=} v_{\tau_m}\big(X_m^{(\pi)}\big).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Пояснения: (A) — теорема 2; (B) — разбиение промежутка интегрирования на m частей и интеграла на m слагаемых; (C) — подстановка определения x_m; (D) — так как множитель от t не зависит, выносим его за знак интеграла; (E) — так как интеграл положителен, вносим его под знак модуля; (F) — так как $x(t_k)$ от t не зависит, вносим его под знак интеграла; (G) — в пределах интегрирования вместо $x(t_k)$ пишем $x_m(t)$; (H) — под знаком модуля разность $X_m(t_k) - X_m(t_{k-1})$ есть слагаемое стандартной суммы v_τ из определения полной вариации функции X_m.

Покажем, что

$$\lim_{m\to\infty}\Big(v_{\tau_m}\big(X_m^{(\pi)}\big) - v_{\tau_m}\big(\Phi^{(\pi)}\big)\Big) = 0. \tag{4.7}$$

Для этого воспользуемся неравенством $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$:

$$\begin{aligned}\Big|v_{\tau_m}(X_m^{(\pi)}) - v_{\tau_m}(\Phi^{(\pi)})\Big| &= \left|\sum_{k=1}^m \left(\left|(*)\int_a^t x_m(s)\,dg_\pi(s)\right| - \left|(*)\int_a^t x(s)\,dg_\pi(s)\right|\right)\right| \leqslant\\ &\leqslant \sum_{k=1}^m \left|(*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(x_m(t) - x(t)\big)\big)\,dg_\pi(t)\right| \leqslant \sum_{k=1}^m (*)\int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|x_m(t) - x(t)\big|\,dg_\pi(t) =\\ &= (*)\int_a^b \big|x_m(t) - x(t)\big|\,dg_\pi(t) \to 0 \quad (m\to\infty);\end{aligned} \tag{4.8}$$

предельный переход — снова по теореме 2.

Из (4.4)–(4.7) получаем $(*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t) \leqslant \bigvee_a^b\big(\Phi^{(\pi)}\big)$. Вместе с второй из оценок (4.2) это означает справедливость второго равенства в (4.1).

Будем доказывать первое. Пусть сначала $x(t) \equiv C$.

$$\Phi(t) = C(*)\int_a^t dg(t) = C\Big(\int_a^t dg_{\mathfrak{c}}(t) + \sigma_a^+(g) + \sum_{s\in T(g)\bigcap(a,b)} \sigma_s(g) + \sigma_t^-(g)\Big) =$$

$$= C\Big(g_{\mathfrak{c}}(t) - g_{\mathfrak{c}}(a) + g_{\mathfrak{d}}(t)\Big) = C\big(g(t) - g(a)\big), \quad \bigvee_a^b(\Phi) = |C|\bigvee_a^b(g);$$

$$\Phi^{(\pi)}(t) = C(*)\int_a^t dg_{(\pi)}(t) = C\big(g_\pi(t) - g_\pi(a)\big) = Cg_\pi(t), \quad \bigvee_a^b\big(\Phi^{(\pi)}\big) = |C|g_\pi(b) = |C|\bigvee_a^b(g),$$

то есть в этом случае первое равенство в (4.1) верно. Рассмотрим разбиение (4.3) и последовательности $\{x_m\}_{m=1}^\infty$, $\{X_m\}_{m=1}^\infty$, $\{X_m^{(\pi)}\}_{m=1}^\infty$ (см. выше). Согласно только что доказанному

$$\bigvee_a^b\big(X_m^{(\pi)}\big) = \sum_{k=1}^m \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k}\big(X_m^{(\pi)}\big) = \sum_{k=1}^m |x(t_k)| \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k}(g) = \sum_{k=1}^m \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k}(X_m) = \bigvee_a^b(X_m). \tag{4.9}$$

В силу второго равенства в (4.1) и теоремы 2

$$\bigvee_a^b\big(X_m^{(\pi)}\big) = (*)\int_a^b |x_m(t)|\,dg_\pi(t) \to (*)\int_a^b |x(t)|\,dg_\pi(t) = \bigvee_a^b\big(\Phi^{(\pi)}\big) \ \ (m\to\infty). \tag{4.10}$$

Для завершения доказательства первого равенства в (4.1) надо показать, что $V \doteq \doteq \lim\limits_{m\to\infty} \bigvee_a^b\big(X_m\big) = \bigvee_a^b(\Phi) \doteq F$. (Существование предела V следует из (4.9) и (4.10).)

Если $V \leqslant F$, то начиная с некоторого m $\bigvee_a^b\big(X_m\big) \leqslant F$ и согласно утверждению 1 $V = F$.

Предположим, что $V > F$. Тогда $\alpha \doteq \dfrac{V-F}{2} > 0$ и $F < F + \alpha < V$.

Пусть $\tau = \{s_j\}_{j=1}^p$ — произвольное разбиение. Точно так же, как в (4.8), показывается, что

$$\big|v_\tau(X_m) - v_\tau(\Phi)\big| = \left|\sum_{j=1}^p \left(\left|(*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} x_m(t)\,dg(t)\right| - \left|(*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} x(t)\,dg(t)\right|\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^p (*)\int_{s_{j-1}}^{s_j} \big|x_m(t) - x(t)\big|\,dg_\pi(t) = (*)\int_a^b \big|x_m(t) - x(t)\big|\,dg_\pi(t) \to 0 \quad (m\to\infty).$$

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m_0, *не зависящий от разбиения* τ, что

$$\big|v_\tau(X_m) - v_\tau(\Phi)\big| < \varepsilon \ \text{ для } \ m \geqslant m_0. \tag{4.11}$$

Возьмем $\varepsilon < \alpha$ и найдем для него m_0 согласно (4.11); найдем также такой номер m_1 ($\geqslant m_0$), что $\big|\bigvee_a^b\big(X_{m_1}\big) - V\big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; найдем, наконец, такое разбиение τ_1', что $v_{\tau_1'}\big(X_{m_1}\big) > \bigvee_a^b\big(X_{m_1}\big) - \dfrac{\varepsilon}{2}$; тогда $v_{\tau_1'}\big(X_{m_1}\big) > V - \varepsilon$. Учитывая, что $v_{\tau_1'}(\Phi) \leqslant F$, получаем противоречие с выбором ε:

$$\varepsilon > v_{\tau_1'}\big(X_{m_1}\big) - v_{\tau_1'}(\Phi) > F + \alpha - F = \alpha > \varepsilon.$$

Значит, $V = F$. □

Замечание 2. Если $x \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{CBV}$ $\big(x \in \mathbf{C},\ g \in \mathbf{BV}\big)$, то все *-интегралы в теореме станут RS-интегралами.

Таким образом, формула для полной вариации будет интересна даже в случае RS-интеграла.

§ 5. Приближение разрывных функций абсолютно непрерывными

Часто в интегралах типа Стилтьеса требуется приблизить разрывные интегрируемую и интегрирующую функции непрерывными (см., например, [3, 13, 14]) так, чтобы интеграл оставался близок к исходному. Предельные теоремы из [1] к решению этого вопроса для *-интеграла непосредственно не могут быть применены, ввиду требующейся там равномерной сходимости. Здесь приводится предельная теорема нужного типа.

Будет удобнее перейти от дискретного параметра $(n \to \infty)$ к непрерывному $(\varepsilon \to 0+)$. Так как такой переход никак не влияет на существо дела, то теоремы из § 3 будут использоваться без дополнительных пояснений.

Пусть $y \in \mathbf{R}$ и, кроме того, $y(\cdot)$ непрерывна справа (слева). Полагаем

$$y_\varepsilon(t) \doteq \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} y(s)\,ds \quad \left(y_\varepsilon(t) \doteq \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} y(s)\,ds\right) \quad (\varepsilon > 0).$$

В общем случае, если $y \in \mathcal{RL}$ $\Big(y \in \mathbf{BV},\, y \in \mathbf{CH}\Big)$, то полагаем

$$y(t) = y_+(t) + y_-(t), \quad y_\varepsilon(t) \doteq \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} y_+(s)\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} y_-(s)\,ds \quad (\varepsilon > 0). \tag{5.1}$$

Очевидно,

$$y_\varepsilon \in \mathbf{AC}, \ \text{ причем } \ y_\varepsilon' \in \mathcal{RL} \quad \Big(y_\varepsilon' \in \mathbf{BV},\ y_\varepsilon' \in \mathbf{CH}\Big), \quad y_\varepsilon(t) \to y(t) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0. \tag{5.2}$$

Кроме того, *если* $y \in \mathbf{BV}$ $\Big(y \in \mathbf{CH}\Big)$, *то*

$$\bigvee_a^b (y_\varepsilon) \to \bigvee_a^b (y) \quad \Big(\bigvee_a^b (y_{\mathfrak{d}})_\varepsilon \to \bigvee_a^b (y_{\mathfrak{d}})\Big) \quad (\varepsilon \to 0). \tag{5.3}$$

Достаточно убедиться в справедливости первого утверждения.

Пусть сначала $y(\cdot)$ непрерывна справа. Так как $y_\varepsilon \in \mathbf{AC}$, то

$$\begin{aligned}
\bigvee_a^b (y_\varepsilon) &= \int_a^b |y_\varepsilon'(t)|\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b |y(t+\varepsilon) - y(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \bigvee_t^{t+\varepsilon}(y)\,dt = \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \bigvee_a^{t+\varepsilon}(y)\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \bigvee_a^{t}(y)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} \bigvee_a^{t}(y)\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \bigvee_a^{t}(y)\,dt = \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_b^{b+\varepsilon} \bigvee_a^{t}(y)\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} \bigvee_a^{t}(y)\,dt = \bigvee_a^b(y) - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} \bigvee_a^{t}(y)\,dt \leqslant \bigvee_a^b(y).
\end{aligned}$$

Согласно утверждению 1 верно предельное соотношение (5.3). Такой же вывод получим и для непрерывной слева функции $y(\cdot)$. В общем случае предельное соотношение (5.3) следует из определения (5.1). □

Теорема 7. *Пусть* $x \in \mathcal{RL}$, $g \in \mathbf{BV}$. *Определим* $x_\varepsilon(\cdot)$ *и* $g_\varepsilon(\cdot)$ *согласно* (5.1) *так, что в силу* (5.2) $x_\varepsilon(t) \to x(t)$, $g_\varepsilon(t) \to g(t)$ $(\varepsilon \to 0)$. *Тогда справедливы предельные соотношения*

$$(*)\int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg_\varepsilon(t) \to (*)\int_a^b x(t)\,dg(t) \quad (\varepsilon \to 0), \tag{5.4}$$

$$\bigvee_a^b(\Phi_\varepsilon) \to \bigvee_a^b(\Phi) \quad (\varepsilon \to 0), \tag{5.5}$$

где $\Phi_\varepsilon(t) = (*)\int_a^t x_\varepsilon(s)\,dg_\varepsilon(s)$, $\Phi(t) = (*)\int_a^t x(s)\,dg(s)$.

Доказательство теоремы опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $J_\varepsilon(x,g) = (*)\int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg_\varepsilon(t)$, $I_\varepsilon(x,g) = (*)\int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg(t)$. *При условиях теоремы* 7

$$J_\varepsilon(x,g) = I_\varepsilon(x,g) + o(1) \ \ \textit{при}\ \varepsilon \to 0. \tag{5.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $x(\cdot)$, $g(\cdot)$ непрерывны справа.

$$J_\varepsilon(x,g) = (*)\int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg_\varepsilon(t) = \int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg_\varepsilon(t) =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} x(s)\,ds\right) d\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} g(s)\,ds\right) = \int_a^b \frac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon}\,dt\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} x(s)\,ds\right) =$$
$$= \int_a^b \frac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} x(p+t-a)\,dp\right) dt =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}\left(\int_a^b x(p+t-a)\frac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon}\,dt\right) dp$$

(перемена порядка интегрирования в повторном интеграле Римана допустима согласно [15, с. 139]).

$$I_\varepsilon(x,g) = (*)\int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg(t) = (*)\int_a^b \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} x(s)\,ds\right) dg(t) =$$
$$= (*)\int_a^b \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} x(p+t-a)\,dp\right) dg(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}\left((*)\int_a^b x(p+t-a)\,dg(t)\right) dp$$

(перемена порядка интегрирования произведена согласно теореме 8 из [1]).

Рассмотрим разность $I_\varepsilon(x,g) - J_\varepsilon(x,g) = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_a^{a+\varepsilon} \eta(p,\varepsilon)\,dp$, где

$$\eta(p,\varepsilon) \doteq (*)\int_a^b x(p+t-a)\,dg(t) - \int_a^b x(p+t-a)\frac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon}\,dt.$$

Так как $\dfrac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon}\,dt = d\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_t^{t+\varepsilon} g(s)\,ds$, то, обозначив $G(t,\varepsilon) \doteq g(t) - g_\varepsilon(t)$, приходим к равенству

$$\eta(p,\varepsilon) = (*)\int_a^b x(p+t-a)\,d\left(g(t) - \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} g(s)\,ds\right) =$$
$$= (*)\int_a^b x(p+t-a)\,d\big(g(t) - g_\varepsilon(t)\big) = (*)\int_a^b x(p+t-a)\,dG(t,\varepsilon).$$

Согласно (5.2)
$$G(t,\varepsilon)\to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0, \quad t\in[a,b], \tag{5.7}$$
при этом функция скачков $G(\cdot,\varepsilon)$ совпадает с функцией скачков $g(\cdot)$, то есть от ε не зависит, так что для $G(\cdot,\varepsilon)$ выполняются соотношения (3.3) (при соответствующем изменении параметризации), ряд скачков функции $G(\cdot,\varepsilon)$ (см. (3.4)) сходится равномерно относительно ε (он вовсе не зависит от этого параметра). Далее (см. определение нормы $\|\cdot\|^*$):
$$\bigvee_a^b(g_\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}|g(s)|\,ds\leqslant\sup_{t\in[a,b]}|g(t)|, \qquad \bigvee_a^b(G)\leqslant\bigvee_a^b(g)+\bigvee_a^b(g_\varepsilon)=\|g\|^*_{\mathbf{BV}}. \tag{5.8}$$
Следовательно, можно применить теорему 4, согласно которой $\eta(p,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ и любом $p\geqslant a$. Представление (5.6) для непрерывных справа функций, таким образом, доказано. Точно также, рассуждая «двойственным» образом, докажем представление (5.6) для непрерывных слева функций. В общем случае согласно определению $\mathcal{RL}$
$$(*)\int_a^b x(t)\,dg(t)=(*)\int_a^b\big(x_+(t)+x_-(t)\big)\,d\big(g_+(t)+g_-(t)\big).$$

Для интегралов $(*)\int_a^b x_+(t)\,dg_+(t)$, $(*)\int_a^b x_-(t)\,dg_-(t)$ представление (5.6) установлено выше.

Рассмотрим пару $\big(x_+(\cdot),\,g_-(\cdot)\big)$. Рассуждения для пары $\big(x_-(\cdot),\,g_+(\cdot)\big)$ аналогичны. Как и выше, положим $J_\varepsilon(x_+,g_-)\doteq(*)\int_a^b\big(x_+\big)_\varepsilon(t)\,d\big(g_-\big)_\varepsilon(t)$, $I_\varepsilon(x_+,g_-)\doteq(*)\int_a^b\big(x_+\big)_\varepsilon(t)\,dg_-(t)$. Разность $\doteq I_\varepsilon(x_+,g_-)-J_\varepsilon(x_+,g_-)=(*)\int_a^b\big(x_+\big)_\varepsilon(t)\,dg_-(t)-(*)\int_a^b\big(x_+\big)_\varepsilon(t)\,d\big(g_-\big)_\varepsilon(t)$ представляет собой разность RS-интегралов, которая преобразуется к виду
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}dp\left((*)\int_a^b x_+(p+t-a)\,dg_-(t)\right)-\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}dp\int_a^b x_+(p+t-a)\,\frac{g_-(t)-g_-(t-\varepsilon)}{\varepsilon}\,dt=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}dp\left((*)\int_a^b x_+(p+t-a)\,d\big(G_-\big)_\varepsilon(t)\right),$$
где $\big(G_-\big)_\varepsilon(t)=g_-(t)-\big(g_-\big)_\varepsilon(t)$.

Обозначим внутренний интеграл через $\Phi(p,\varepsilon)\doteq(*)\int_a^b x_+(p+t-a)\,d\big(G_-\big)_\varepsilon(t)$. Точно так же как (5.7), (5.8) устанавливаем, что $\big(G_-\big)_\varepsilon(t)\to 0$ $(\varepsilon\to 0,\ t\in[a,b])$, $\bigvee_a^b\big(G_-\big)_\varepsilon\leqslant\|g\|^*_{\mathbf{BV}}$, а также независимость функции скачков и ряда скачков $\big(G_-\big)_\varepsilon(\cdot)$ от ε. Поэтому по теореме 4
$$\Phi(p,\varepsilon)\to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0 \ \text{ и любом } \ p\geqslant a. \tag{5.9}$$

Пусть $p\to a+$; при фиксированном $\varepsilon>0$ по теореме 3
$$\Phi(p,\varepsilon)\to(*)\int_a^b x_+(t)\,d\big(G_-\big)_\varepsilon(t)=\Phi(a,\varepsilon). \tag{5.10}$$
Так что функция $\Phi(\cdot,\varepsilon)$ непрерывна справа в точке a.

Равенство (5.6) эквивалентно предельному соотношению
$$I_\varepsilon(x_+,g_-)-J_\varepsilon(x_+,g_-)=\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}\Phi(p,\varepsilon)\,dp\to 0 \quad (\varepsilon\to 0). \tag{5.11}$$

Докажем его. Для этого докажем, что

$$\Psi(\varepsilon,\delta)=\frac{1}{\delta}\int_a^{a+\delta}\bigl|\Phi(p,\varepsilon)\bigr|\,dp\to 0\ \text{ при }\ \varepsilon\to 0,\ \delta\to 0 \tag{5.12}$$

(имеется ввиду двойной предел).

Предположим противное. Это значит, что найдутся такие $\gamma_0>0$ и последовательности $\varepsilon_n\to 0$, δ_n $(n\to\infty)$, что

$$\frac{1}{\delta_n}\int_a^{a+\delta_n}|\Phi(p,\,\varepsilon_n)|\,dp\geqslant\gamma_0.$$

В силу (5.9) найдется такое натуральное N_1, что $|\Phi(a,\varepsilon_n)|<\dfrac{\gamma_0}{3}$ для всех $n>N_1$; в силу (5.10) найдется такое натуральное N_2 $(\geqslant N_1)$, что $|\Phi(p,\varepsilon_n)-\Phi(a,\varepsilon_n)|<\dfrac{\gamma_0}{3}$ при $a\leqslant p\leqslant$ $\leqslant a+\delta_n$ для всех $n>N_2$; тогда для всех $n>N_2$ $|\Phi(p,\varepsilon_n)|\leqslant|\Phi(p,\varepsilon_n)-\Phi(a,\varepsilon_n)|+$ $+|\Phi(a,\varepsilon_n)|<\dfrac{2\gamma_0}{3}$ и

$$\gamma_0\leqslant\frac{1}{\delta_n}\int_a^{a+\delta_n}|\Phi(p,\,\varepsilon_n)|\,dp\leqslant\frac{2\gamma_0}{3}.$$

Полученное противоречие означает справедливость предельных соотношений (5.12) и (5.11), а с ними и равенства (5.6). □

Доказательство теоремы 7. По лемме 1 имеет место представление (5.6), а по теореме 3

$$I_\varepsilon(x,g)=(*)\int_a^b x_\varepsilon(t)\,dg(t)\to(*)\int_a^b x(t)\,dg(t)\quad(\varepsilon\to 0),$$

то есть справедливо предельное соотношение (5.4).

Так как (см. (5.3)) $\bigl(g_\varepsilon\bigr)_\pi(t)\to g_\pi(t)$ $(\varepsilon\to 0)$, то предельное соотношение (5.5) следует из представления (4.1) и теоремы 3. □

§ 6. О дифференциальных уравнениях с обобщенными функциями в коэффициентах

1°. Постановка задачи

1. Приведем здесь пример использования теоремы 7 для улучшения результата из [14] (см. также [16–18]). Как и в процитированных работах, рассмотрим задачу Коши

$$\bigl(Lx\bigr)(t)\doteq x^{(n)}+p_1'(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_n'(t)x=p_{n+1}'(t),\quad x^{(k-1)}(a)=\gamma_k,\quad k=1,\ldots,n, \tag{6.1}$$

где коэффициенты $p_k'(\cdot)$ представляют собой производные в смысле теории обобщенных функций от, вообще говоря, разрывных функций. Проблема в следующем: слагаемое $p_1'(\cdot)x^{(n-1)}$ (а с ним и все выражение Lx) лишено обычного смысла, так как представляет собой произведение обобщенной функции $\bigl(p_1'(\cdot)\bigr)$ на разрывную $\bigl(x^{(n-1)}(\cdot)\bigr)$. Такое умножение невозможно в классической теории обобщенных функций. Каждый подход к определению решения задачи (6.1) есть в то же время и способ определения такого умножения (подробнее см. [3, 13, 14]). В работе [14] автор свел задачу (6.1) к задаче Коши для квазидифференциального (см. ниже) уравнения с коэффициентами — обычными функциями. Такое сведéние основано на использовании LS-интегралов

$$\int_a^t p_1(s)\,dp_k(s)\quad(k=2,\ldots,n+1). \tag{6.2}$$

Показано, что если первообразные коэффициентов $p_k(\cdot)$ абсолютно непрерывны (в этом случае это классическая задача), то решение задачи (6.1) совпадает с решением квазидифференциальной задачи. Если же выполнены некоторые условия (см., например, ниже условия $\mathfrak{B}$), то квазидифференциальная задача не теряет смысла, и под решением задачи (6.1) понимается решение упомянутой квазидифференциальной задачи. В данной работе интегралы (6.2) заменены интегралами $(*)\displaystyle\int_a^t p_1(s)\,dp_k(s)$ $(k = 2,\ldots,n+1)$.

2. Задача (6.1) рассматривается при следующих (вообще говоря, различных) предположениях: скажем, что выполнены условия

$\mathfrak{A}_k$ $(k = n, n+1)$, если $p_i \in \mathbf{AC}$ $(i = 1,\ldots,k)$;

$\mathfrak{V}$, если $p_i \in \mathbf{BV}$ $(i = 1,\ldots,n+1)$; если при этом $p_i(\cdot)$ $(i = 2,\ldots,n+1)$ не имеют с $p_1(\cdot)$ общих *односторонних* разрывов, то скажем, что выполнены условия $\mathfrak{V}_\delta$;

$\mathfrak{B}$, если p_1 B-измерима и ограничена, а $p_k \in \mathbf{BV}$ $(k = 2,\ldots,n+1)$;

$\mathfrak{C}$, если $p_1 \in \mathbf{N}$, $p_k \in \mathbf{BV}$ $(k = 2,\ldots,n+1)$; отметим как очевидное: выполнение условий $\mathfrak{C}$ уже означает, что выполнены условия $\mathfrak{B}$;

$\mathfrak{C}_\delta$, если $p_1 \in \mathcal{RL}$, $p_k \in \mathbf{BV}$, $(k = 2,\ldots,n+1)$;

$\mathfrak{D}$, если $p_1 \in \mathbf{BV}$, $p_k \in \mathbf{CH}$ $(k = 2,\ldots,n+1)$.

Если выполнены условия $\mathfrak{A}_{n+1}$, то задача (6.1) — классическая (коэффициенты уравнения — суммируемые функции). Условия $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_\delta$ основательно изучены в работе [3]. Здесь установлено, что выполнение условий $\mathfrak{V}_\delta$ (в терминологии работы [3] — наличие δ-корректности), необходимо и достаточно для того, чтобы решение задачи (6.1) можно было получить из решений последовательности классических задач с помощью *одного* предельного перехода (необходимость обусловлена применением интеграла Дарбу–Стилтьеса). Условия $\mathfrak{B}$ рассмотрены в работах автора [14, 16–18]; здесь при отсутствии δ-корректности для упомянутого приближения предполагалось *два* предельных перехода. Условия $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_\delta$, $\mathfrak{D}$ рассматриваются ниже. Использование *-интеграла позволяет получить решение из последовательности классических задач с помощью *одного* предельного перехода.

2°. Квазидифференциальное уравнение

1. Пусть $\mathcal{P} = \big(p_{ik}\big)_{i,k=0}^n$ — нижняя треугольная матрица, $p_{ik}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p_{ii}(t) > 0$ $(i = 0,\ldots,n)$ п. в. на $[a,b]$. Считаем, что выполнены условия $\mathbb{P}$: функции

$$1/p_{ii}(\cdot) \quad (i = 1,\ldots,n-1), \qquad p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot) \quad (i = 1,\ldots,n,\ k = 0,\ldots,i-1)$$

суммируемы на $[a,b]$. Определим квазипроизводные функции $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ равенствами ${}^{0}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x$, ${}^{k}_{\mathcal{P}}x \doteq p_{kk}\dfrac{d}{dt}\big({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\big) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_{ik}\big({}^{i}_{\mathcal{P}}x\big)$ $(k = 1,\ldots,n)$ (ср. [19]). Линейным квазидифференциальным называется уравнение

$$\big({}^{n}_{\mathcal{P}}x\big)(t) = f(t), \quad t \in [a,b] \quad (f\colon [a,b] \to \mathbb{R}). \tag{6.3}$$

Решением уравнения (6.3) называется функция $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющая абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$, $k = 1,\ldots,n-1$, и п. в. в $[a,b]$ удовлетворяющая уравнению (6.3).

Если функция $f(\cdot)/p_{nn(\cdot)}$ суммируема на $[a,b]$ (при выполнении условий $\mathbb{P}$), то существует единственное решение уравнения (6.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left(\overset{k}{_{\mathcal{P}}}x\right)(a)=\xi_k \quad (\xi_k\in\mathcal{R},\ k=0,\dots,n-1) \tag{6.4}$$

(см. [14, 18]). С помощью столбцов $\xi=(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})^\top$, ${}_{\mathcal{P}}x \doteq \left(\overset{0}{_{\mathcal{P}}}x,\dots,\overset{n-1}{_{\mathcal{P}}}x\right)^\top$ (столбец квазипроизводных) начальные условия (6.4) запишутся так: ${}_{\mathcal{P}}x(a)=\xi$. Заметим, что последняя строка матрицы $\mathcal{P}$ не участвует в построении столбца ${}_{\mathcal{P}}x$; будем также говорить о столбце обычных производных ${}_{\mathcal{E}}x=\left(x,x',\dots,x^{(n-1)}\right)^\top={}_{\mathcal{P}}x$, при $\mathcal{P}=\mathcal{E}_{n+1}$, $\mathcal{E}_{n+1}$ — единичная матрица порядка $n+1$. Сформулированное выше утверждение из [14] следует из того, что задача (6.3), (6.4) эквивалентна задаче Коши относительно $z(t)\doteq\left({}_{\mathcal{P}}x\right)(t)$

$$z'=A(t)z+F(t)\quad (t\in[a,b]),\qquad z(a)=\xi, \tag{6.5}$$

где

$$F(t)=\left(0,\dots,0,\frac{f(t)}{p_{nn}(t)}\right)^\top,\quad A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{n},\quad a_{ij}(t)=0$$
$$(i=1,\dots,n-2,\quad j=i+2,\dots,n),$$
$$a_{i,i+1}(t)=\frac{1}{p_{ii}(t)}\quad (i=1,\dots,n-1),\qquad a_{ij}(t)=-\frac{p_{i,j-1}(t)}{p_{ii}(t)}\quad (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,i).$$

2. Пусть выполнены условия $\mathfrak{C}$. Следующим образом построим по первообразным коэффициентов уравнения (6.1) нижние треугольные матрицы $H=\left(h_{ik}\right)_{i,k=1}^{n}$ и $\mathcal{P}$.

$$h_{11}(t)\doteq 1,\quad h_{nn}(t)\doteq\exp\bigl(p_1(t)-p_1(a)\bigr)=h_{n+1,n+1}(t), \tag{6.6}$$

$$h_{n,n-k+1}(t)\doteq(*)\int_a^t h_{nn}(s)\,dp_k(s)\quad (k=2,\dots,n,\ t\in I), \tag{6.7}$$

$$h_{kk}(t)\doteq\exp\int_a^t\frac{h_{k+1,k}(s)}{h_{k+1,k+1}(s)}\,ds,\qquad h_{k,k-i+1}(t)\doteq\int_a^t\frac{h_{kk}(s)h_{k+1,k-i+1}}{h_{k+1,k+1}(s)}\,ds, \tag{6.8}$$
$$k=n-1,\dots,2;\quad i=2,\dots,k;\quad t\in I$$

(при $n=2$ равенства (6.8) отсутствуют).

Далее полагаем (в обозначениях функций опущен аргумент t):

$$p_{00}=1,\quad p_{kk}=h_{k+1,k+1}/h_{kk}\quad (k=1,\dots,n), \tag{6.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &b_{ki}^0=-h_{k,k-i}\quad (i=1,\dots,k-1);\quad b_{kk}^0=0,\\ &b_{kj}^j=\frac{b_{kj}^{j-1}}{h_{k-j+1,k-j+1}},\quad b_{ki}^j=b_{ki}^{j-1}-\frac{b_{kj}^{j-1}\cdot h_{k-j+1,k-i+1}}{h_{k-j+1,k-j+1}}\\ &(i=j+1,\dots,k,\quad j=1,\dots,k)\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

при $j=k$ последнее равенство отпадает; $k=2,\dots,n$);

$$p_{10}=h_{21},\ p_{k,k-j}=p_{kk}\cdot b_{kj}^j\ (j=1,\dots,k,\ k=2,\dots,n,\ t\in[a,b]),\ \mathcal{P}=\left(p_{ik}\right)_{i,k=0}^{n}. \tag{6.11}$$

Приведенные определения (6.6)–(6.11) только строкой (6.7) отличаются от определений статьи [17] (в этой строке LS-интегралы (6.2) заменены *-интегралами).

3. Непосредственно из определений вытекают свойства (в скобках указаны свойства, имеющие место при выполнении условий $\mathfrak{A}_n$):

1) $h_{kk}(t) > 0$, $p_{kk}(t) > 0$, $\det H(t) = \prod_{i=1}^{n} h_{ii}(t) > 0$, $H(a) = \mathcal{E}_n$ $(t \in [a,b],\ k = 1,\dots,n)$;

2) $h_{nn} \in \mathbf{N}$ $\big(h_{nn} \in \mathbf{AC}\big)$, $h_{nk} \in \mathbf{BV}$ $\big(h_{nk} \in \mathbf{AC}\big)$, $h_{nk}(\cdot)$ непрерывны в точках непрерывности p_{n-k+1} $(k = 1,\dots,n-1)$;

3) $h_{kk}^{(n-k)} \in \mathbf{N}$ $\big(h_{kk}^{(n-k)} \in \mathbf{AC}\big)$, $h_{ki}^{(n-k)} \in \mathbf{BV}$ $\big(h_{ki}^{(n-k)} \in \mathbf{AC}\big)$ $(k = 1,\dots,n-1,$ $i = 1,\dots,k-1)$;

4) элементы матриц H_k^{-1} $\big(H_k = (h_{ij})_1^k\big)$ имеют производные порядка $n-k$ $(k = 1,\dots,n)$, принадлежащие $\mathbf{N}$ $\big(\mathbf{AC}\big)$;

5) $1/p_{kk}(\cdot)$, $p_{k,k-j}(\cdot)/p_{kk}(\cdot)$ имеют производные порядка $n-k-1$ $(j = 1,\dots,k,\ k = 1,\dots,n-1)$, $(k = 1,\dots,n)$ принадлежащие $\mathbf{AC}$;

6) $p_{nn}(t) = 1$, $p_{n,n-i} \in \mathbf{N}$ $\big(\mathbf{AC}\big)$ $(i = 1,\dots,n)$;

7) свойства элементов матрицы A из (6.5), построенной по элементам матрицы $\mathcal{P}$, определяются свойствами 5) и 6); таким образом, «худшими» свойствами обладают элементы последней строки матрицы A: они принадлежат пространству $\mathbf{N}$ $\big(\mathbf{AC}\big)$.

Эти свойства означают, что для матрицы $\mathcal{P}$ выполнены условия $\mathbb{P}$. Поэтому задача Коши (6.3), (6.4) однозначно разрешима при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ и любой $f \in \mathbf{N}$. Из равенств (6.8), (6.9) следует $p_{kk} \cdot h'_{k,k-i+1} = h_{k+1,k-i+1}$ $(i = 1,\dots,k,\ k = 2,\dots,n-1,\ n > 2)$.

Доказательства нижеследующих утверждений этого подпункта буквально повторяют доказательства соответствующих утверждений работы [17] и поэтому опускаются.

Лемма 2. *Если $p_k(\cdot)$ $(k = 1,\dots,n)$ абсолютно непрерывны (то есть выполнено условие $\mathfrak{A}_n$), то п. в. на $[a,b]$ $h'_{n,n-k+1} = h_n n \cdot p'_k$ $(k = 1,\dots,n)$.*

Лемма 3. *Если функция $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет производную $x^{(n-1)}(\cdot)$, то она имеет и квазипроизводные $\big({}^{k}_{\mathcal{P}}x\big)(\cdot)$ $(k = 0,\dots,n-1)$ и ${}^{k}_{\mathcal{P}}x = \sum_{i=0}^{k} h_{k+1,k-i+1} \cdot x^{(k-1)}$ $(k = 0,\dots,n-1)$, или, в векторно-матричной форме, ${}_{\mathcal{P}}x = H_{\mathcal{E}}x$.*

Лемма 4. *Если существуют абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{0}_{\mathcal{P}}x,\dots,{}^{(n-1)}_{\mathcal{P}}x$, то существуют и обычные производные до порядка $n-1$, $x^{(n-1)} \in \mathbf{N}$, причем ${}_{\mathcal{E}_n}x = H^{-1}{}_{\mathcal{P}}x$.*

Лемма 5. *Если выполнены условия $\mathfrak{A}_n$, то $\big({}^{n}_{\mathcal{P}}x\big)(t) = h_{nn}(t)\big(Lx\big)(t)$.*

Теорема 8. *Если выполнены условия $\mathfrak{A}_{n+1}$, то задача (6.1) эквивалентна задаче (6.3), (6.4) с построенной в п. **2** матрицей $\mathcal{P}$ и $f(t) = h_{nn}(t) \times p'_{n+1}(t)$, $\xi = H(a)\gamma$ $\big(\gamma = (\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1})\big)^{\top}$.*

3°. Определение решения задачи

1. Рассмотрим полуоднородную задачу вида (6.1):

$$\big(Lx\big)(t) = 0 \quad (t \in [a,b]), \quad {}_{\mathcal{E}_n}x(a) = \gamma. \tag{6.12}$$

Как уже отмечалось, при выполнении условий $\mathfrak{C}$ матрица $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию $\mathbb{P}$.

Поэтому полуоднородная задача

$$\left({}^{n}_{\mathcal{P}}x\right)(t) = 0 \quad (t \in [a,b]), \quad {}_{\mathcal{P}}x(a) = \xi, \tag{6.13}$$

имеет единственное решение $\widetilde{x}(\cdot)$, которое в связи с теоремой 8 естественно принять за решение задачи (6.12). Итак, при условиях $\mathfrak{C}$ *решением задачи* (6.12) называется *решение задачи* (6.13) *при определенной в п.* **2** *матрице* $\mathcal{P}$ *и* $\xi = H(a)\gamma$. Этим решение определяется однозначно, оно существует и единственно. Согласно лемме 4 $\widetilde{x}^{(n-1)} \in \mathbf{N}$ а $\widetilde{x}^{(n)}$ — обобщенная функция.

Пусть $X = \left({}^{i-1}_{\mathcal{P}}x_k\right)^n_{i,k=1}$ — такая фундаментальная матрица однородного уравнения ${}^{n}_{\mathcal{P}}x = 0$, что $X(a) = \mathcal{E}_n$. Тогда $\left({}_{\mathcal{P}}\widetilde{x}\right)(t) = X(t)H(a)\gamma$, а согласно лемме 4 $\left({}_{\mathcal{E}_{n+1}}\widetilde{x}\right)(t) = H^{-1}(t)X(t)X^{-1}(a)H(a)\gamma$. (Заметим, что хотя $H(a)$, $X(a)$ — единичные матрицы (см. свойство 1)), такая запись сохраняется на тот случай, если начальные условия и нижний предел интегрирования — различные точки.) Если $\widetilde{X}(\cdot)$ — фундаментальная матрица уравнения $Lx = 0$, обладающая свойством $(\widetilde{X}(a) = \mathcal{E}_n)$, то согласно лемме 4

$$\widetilde{X}(t) = H^{-1}(t)X(t). \tag{6.14}$$

2. Вернемся к исходной задаче (6.1). Сначала предположим выполнение условий $\mathfrak{A}_{n+1}$. Пусть $M = \left(m_{ik}\right)^n_{i,k=1}$ — матрица, соответствующая уравнению $Lx = 0$, то есть $m_{i,i+1}(t) = 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $m_{nk}(t) = -p'_{n-k+1}(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$, остальные элементы этой матрицы — нулевые. Таким образом, $\widetilde{X}' = M(t)\widetilde{X}$; так как $X' = A(t)X$ (напомним: матрица A строится по матрице $\mathcal{P}$ как показано в п. **1**, см. (6.5)), то в силу равенства (6.14) и того факта, что фундаментальная матрица однозначно восстанавливает (непрерывную!) матрицу системы, получаем

$$A = (H' + HM)H^{-1}. \tag{6.15}$$

Полагаем

$$h_{n0}(t) \doteq (*)\int_a^t h_{nn}(s)\, dp_{n+1}(s) \qquad (t \in [a,b]), \tag{6.16}$$

$h_0 = (0, \ldots, 0, h_{n0})^\top h_0(t) \in \mathbb{R}^n$, $(t \in [a,b])$.

Теорема 9. *Если выполнены условия* $\mathfrak{A}_{n+1}$*, то задача* (6.1) *эквивалентна задаче*

$$y' = A(t)y + F(t), \quad y(a) = \xi, \tag{6.17}$$

при $\xi = H(a)\gamma$, $F = \left(h_{n0/h_{nn}}\right)(0, \ldots, -h_{n-1,n-1},\, h_{n,n-1})^\top$*, причем*

$${}_{\mathcal{E}_n}x = H^{-1}(y + h_0), \tag{6.18}$$

где $x(\cdot)$ *— решение задачи* (6.1).

Доказательство. Пусть $m = (0, \ldots, 0, p'_{n+1})^\top$. Задача (6.1) может быть записана в виде системы

$$\left({}_{\mathcal{E}_n}x\right)' = M(t)_{\mathcal{E}_n}x + m(t), \qquad {}_{\mathcal{E}_n}x(a) = \gamma. \tag{6.19}$$

Так как теперь $h_0' = h_{nn}m = Hm$, $Ah_0 = F$, то с помощью равенства (6.15) убеждаемся, что подстановки (6.18) и $y = H({}_{\mathcal{E}_n}x - h_0)$ переводят задачу (6.19) в задачу (6.17) и обратно. □

Пусть выполнены условия $\mathfrak{C}$. Определим $h_{n0}(\cdot)$, $F(\cdot)$, ξ как выше. Теперь компоненты $F(\cdot)$ принадлежат $\mathbf{N}$, задача (6.17) имеет единственное решение $y(\cdot)$; это решение имеет абсолютно непрерывные компоненты, а компоненты $y'(\cdot)$ принадлежат $\mathbf{N}$. Как и выше, в п. 3°.1 назовем *решением задачи* (6.1) *функцию* $x(\cdot)$, *определяемую равенством* (6.18). Так определенное решение *существует и единственно*. При этом производная решения порядка $n-1$ — функция из $\mathbf{N}$, а производная порядка n — обобщенная функция. При выполнении условий $\mathfrak{V}_\delta$ определенное таким образом решение совпадает с решением в смысле работы [3], так как *-интеграл, как ранее и LS-интеграл, превращается в интеграл Дарбу–Стилтьеса (см. например, [3]).

3. Без соображений о непрерывной зависимости (в каком либо приемлемом смысле) решения от первообразных коэффициентов задачи (6.1), приведенные определения выглядят формальными. Такого рода непрерывность может быть доказана с помощью предельной теоремы 2 (как это сделано в [14, 18]). Однако в этом случае «близкие» задачи также будут задачами с обобщенными функциями в коэффициентах, так как равномерная сходимость в теореме 2 не позволяют аппроксимировать разрывные функции последовательностями абсолютно непрерывных функций. Для того чтобы «близкие» задачи были задачами с суммируемыми коэффициентами, несколько сузим класс рассматриваемых задач (6.1) (от условий $\mathfrak{C}$ перейдем к условиям $\mathfrak{C}_\delta$) и воспользуемся теоремой 7. Нам понадобится следующее утверждение из статьи [3].

Утверждение 2. *Рассмотрим последовательность задач Коши*

$$\dot{X}_m = \mathcal{A}_m(t)X_m + \mathcal{F}_m(t), \quad X_m(a) = I, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad (t \in [a,b]), \tag{6.20}$$

где элементы матриц $\mathcal{A}_m(\cdot)$ $\big($компоненты векторов $\mathcal{F}_m(\cdot)\big)$, суммируемы по Лебегу на $[a,b]$, $m = 0,1,2,\ldots$, причем поэлементно (покомпонентно) $\mathcal{A}_m(t) \to \mathcal{A}_0(t)$, $\mathcal{F}_m(t) \to \mathcal{F}_0(t)$ $(m \to \infty)$ п. в.; пусть все функциональные последовательности обладают суммируемыми мажорантами. Тогда все задачи (6.20) однозначно разрешимы, компоненты решений $X_m(\cdot)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ абсолютно непрерывны, причем $X_m(t) \rightrightarrows X(t)$.

Имея в виду применение теоремы 7, перейдем снова к непрерывной параметризации. Напомним также, что если выполнены условия $\mathfrak{C}_\delta$, то выполнены и условия $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{B}$. При выполнении этих условий представим $p_k(\cdot)$ $(k = 1,\ldots,n{+}1)$ в виде суммы непрерывной справа и непрерывной слева функции и рассмотрим функции $(p_k)_\varepsilon(\cdot)$ $(\varepsilon > 0,\ k = 1,\ldots,n+1)$, определенные равенствами (5.1). Рассмотрим совокупность классических задач Коши

$$(x)_\varepsilon^{(n)} + (p_1)'_\varepsilon(t)(x)_\varepsilon^{(n-1)} + \ldots + (p_n)'_\varepsilon(t)(x)_\varepsilon = (p_{n+1})'_\varepsilon(t), \quad (x)_\varepsilon^{(k-1)}(a) = \gamma_k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Теорема 10. *Пусть выполнены условия $\mathfrak{C}_\delta$. Тогда ${}_{\mathcal{E}_n}(x)_\varepsilon(t) \rightrightarrows {}_{\mathcal{E}_n}x(t)$ $(\varepsilon \to 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.2), (5.3)

$$(p_k)_\varepsilon \in \mathbf{AC}, \quad (p_k)_\varepsilon(t) \to p_k(t) \quad (k = 1,\ldots,n+1,\ \varepsilon \to 0) \tag{6.21}$$

(а также $\bigvee\limits_a^b\big((p_k)_\varepsilon\big) \to \bigvee\limits_a^b(p_k)$ $(k = 2,\ldots,n+1)$). Подставив в определения (6.6)–(6.11), (6.16) вместо функций p_k функции $(p_k)_\varepsilon$ $(k = 1,\ldots,n+1)$, получим функции $(h_{ik})_\varepsilon$, $(p_{ik})_\varepsilon$, а также функции $(a_{ik})_\varepsilon$ и решения $(x)_\varepsilon$ задачи (6.1) согласно теореме 9. При $\varepsilon \to 0$ по теореме Лебега в силу (6.21) $(h_{nn})_\varepsilon(t) \to h_{nn}(t)$, $(h_{n,n-k+1})_\varepsilon(t) \to h_{n,n-k+1}(t)$ $(k = 2,\ldots,n+1$, см. теорему 7), $(h_{kk})_\varepsilon(t) \to h_{kk}(t)$, $(h_{k,k-i+1})_\varepsilon(t) \to h_{n,n-k+1}(t)$, $k = n-1,\ldots,2$; $i = 2,\ldots,k$; $t \in [a,b]$. При этом $(h_{kk})_\varepsilon$ $(k = 2,\ldots,n)$ ограничены снизу и сверху положительными константами. Далее, в силу арифметических свойств предела, $(p_{ik})_\varepsilon(t) \to p_{ik}(t)$ $(i = 1,\ldots,n$, $k = 0,1,\ldots,i)$, $(a_{ik})_\varepsilon(t) \to a_{ik}(t)$ $(\varepsilon \to 0,\ i = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,i+1,\ t \in [a,b])$. При этом $(p_{kk})_\varepsilon$ $(k = 2,\ldots,n)$ ограничены снизу и сверху положительными константами (см. (6.9)), а $(a_{ik})_\varepsilon$ ограничены. Итак, выполнены все условия утверждения 2, согласно которому ${}_{\mathcal{E}_n}(x)_\varepsilon(t) \rightrightarrows {}_{\mathcal{E}_n}x(t)$. $\square$

При выполнении утверждения теоремы 10 назовем решение $x(\cdot)$ *δ-корректным*. Условия $\mathfrak{C}_\delta$, таким образом, влекут за собой δ-корректность решения.

4. Пусть теперь выполнены условия $\mathfrak{D}$. *-интегралы в (6.7), (6.16), определяющие последнюю строку матрицы $H(\cdot)$ и вектор правой части $h_0(\cdot)$, существуют (см. (3.5)). Очевидным образом (несущественно) изменятся свойства и утверждения подпункта $2°.3$. Остальные определения и утверждения подпунктов $3°.1$, $3°.2$ не претерпят никаких изменений. Однако, в этом случае не удается доказать δ-корректность решения (теорему 10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дерр В. Я. О расширении интеграла Римана–Стилтьеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 2. С. 135–152. https://doi.org/10.20537/vm190201
2. Дерр В. Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008.
3. Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II // Вестник Ярославского университета. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
4. Дьёдонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
5. Толстоногов А. А. О некоторых свойствах пространства правильных функций // Математические заметки. 1984. Т. 35. Вып. 6. С. 803–812. https://www.mathnet.ru/rus/mzm5823
6. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
7. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. Вып. 1. С. 35–58. https://www.mathnet.ru/rus/vuu226
8. Derr V. Ja. On the exact pairs of classes for the Stieltjes integral // Functional Differential Equations. 2020. Vol. 27. Nos. 3–4. P. 85–94.
9. Баранов В. Н., Родионов В. И. О нелинейных метрических пространствах функций ограниченной вариации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 3. С. 341–360. https://doi.org/10.35634/vm220301
10. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
11. Schwabik S., Tvrdý M., Vejvoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. Praha: Academia, 1979.
12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Лань, 1997.
13. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
14. Дерр В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 2. С. 269–272. https://www.mathnet.ru/rus/dan7815
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Лань, 1996.
16. Дерр В. Я. О линейных дифференциальных уравнениях с коэффициентами — обобщенными функциями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2187–2188.
17. Дерр В. Я. О решениях дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 1995. Вып. 1. С. 51–75.
18. Дерр В. Я. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах: обзор // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Пермь: ПНИПУ, 2018. С. 60–86.
19. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Математический сборник. 1940. Т. 7 (49). № 3. С. 479–532. https://www.mathnet.ru/rus/sm5959

Поступила в редакцию 20.12.2022

Принята к публикации 25.01.2023

Дерр Василий Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8211-6258
E-mail: derr@uni.udm.ru

Цитирование: В. Я. Дерр. О некоторых свойствах *-интеграла // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 66–89.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 1. Pp. 66–89.

V. Ya. Derr

On some properties of *-integral

Keywords: regulated functions, σ-continuous functions, rl-representation, *-integral, quasi-differential equation, generalized functions, δ-correctness.

MSC2020: 26B30, 26A42, 34K10

DOI: 10.35634/vm230105

This work continues the author's research on the theory of regulated functions and *-integral. The possibility to express a regulated function as a sum of right-continuous and left-continuous functions (called rl-representation) is studied. A limit theorem for the *-integral is proved. It allows approximating discontinuous integrands and integrators by sequences of absolutely continuous functions. A new result on δ-correctness of the solution of an ordinary linear differential equation with generalized functions in coefficients is proved. This solution is defined via a quasi-differential equation. A formula for the total variation of an indefinite *-integral of a σ-continuous function with respect to a function of bounded variation is given. It generalizes the well-known formula for computing the total variation of an absolutely continuous function. The formula is also interesting in the case of an indefinite RS-integral.

REFERENCES

1. Derr V. Ya. On the extention of a Rieman–Stieltjes integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 135–152 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190201
2. Derr V. Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of real argument. Lectures and exercises), Moscow: Vysshaya Shkola, 2008.
3. Levin A. Yu. On the theory of ordinary differential equations. II, *Vestnik Yaroslavskogo Universiteta*, 1974, issue 8, pp. 122–144 (in Russian).
4. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 1960.
5. Tolstonogov A. A. Properties of the space of proper functions, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1984, vol. 35, issue 6, pp. 422–427. https://doi.org/10.1007/BF01139944
6. Schwartz L. *Analyse mathématique. I*, Paris: Hermann, 1967.
7. Derr V. Ya., Kinzebulatov D. M. Differential equations with distributions admitting multiplication on discontinuous functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2005, issue 1, pp. 35–58 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/vuu226
8. Derr V. Ya. On the exact pairs of classes for the Stieltjes integral, *Functional Differential Equations*, 2020, vol. 27, nos. 3–4, pp. 85–94.
9. Baranov V. N., Rodionov V. I. On nonlinear metric spaces of functions of bounded variation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 3, pp. 341–360 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220301
10. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part 1: General theory*, New York–London: Interscience Publishers, 1958.
    Translated under the title *Lineinye operatory. Tom 1. Obshchaya teoriya*, Moscow: Inostrannaya Literatura, 1962.
11. Schwabik S., Tvrdý M., Vojevoda O. *Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints*, Praha: Academia, 1979.
12. Natanson I. P. *Theory of functions of real variable. Vol. 1*, New York: Frederick Ungar, 1961.
13. Filippov A. F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988. https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9
14. Derr V. Ya. On the definition of a solution of a linear differential equation with generalized functions in the coefficients, *Sov. Math., Dokl.*, 1988, vol. 37, no. 1, pp. 56–59.
    https://zbmath.org/?q=an:0691.34006

15. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung. III*, Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1992.
16. Derr V. Ya. On linear differential equations with generalized functions as coefficiets, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 2187–2188 (in Russian).
17. Derr V. Ya. On the solutions of differential equations with generalized functions in coefficiets, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1995, issue 1, pp. 51–75 (in Russian).
18. Derr V. Ya. Ordinary linear differential equations with generalized functions in coefficiets: survey, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya*, Perm: Perm National Research Polytechnic University, 2018, pp. 60–86 (in Russian).
19. Schin D. Über die Lósungen einer quasi-Differentialgleichung der n-ten Ordnung, *Recueil Mathématique (Nouvelle série)*, 1940, vol. 7 (49), no. 3, pp. 479–532 (in Russian).
https://www.mathnet.ru/eng/sm5959

Received 20.12.2022

Accepted 25.01.2023

Vasilii Yakovlevich Derr, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analisys, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8211-6258
E-mail: derr@uni.udm.ru

Citation: V. Ya. Derr. On some properties of *-integral, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 1, pp. 66–89.