МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 3–26.

УДК 517.929

© *И. А. Аксененко, К. М. Чудинов*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Изучается устойчивость линейных автономных скалярных разностных уравнений с комплексными коэффициентами. Для уравнения с произвольным количеством запаздываний приводится простое доказательство линейной связности его области устойчивости в пространстве коэффициентов. Этот результат позволяет утверждать, что областью устойчивости уравнения в пространстве коэффициентов является область D-разбиения этого пространства, содержащая начало координат. Далее рассматриваются некоторые уравнения с двумя запаздываниями и комплексными коэффициентами, для которых даются подробные аналитические и геометрические описания областей равномерной и экспоненциальной устойчивости.

Ключевые слова: разностное уравнение, экспоненциальная устойчивость, равномерная устойчивость, D-разбиение.

DOI: 10.35634/vm250101

Введение

Теория разностных уравнений [1–3] как самостоятельный раздел математики сформировалась к последней четверти XX века, а с 80-х гг. скорость роста количества работ, посвященных разностным уравнениям, резко увеличилась. Не обсуждая здесь причины этого явления, отметим, что оно затронуло и качественные исследования линейных автономных уравнений.

Теория устойчивости линейных разностных уравнений [4,5] подобна классической теории устойчивости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость линейных автономных разностных уравнений определяется расположением корней характеристического многочлена относительно единичного круга на комплексной плоскости, а одной из основных задач исследования является описание областей устойчивости в пространстве параметров уравнения. Условия расположения корней многочлена относительно единичного круга систематически исследуется с известных работ И. Шура и А. Кона [6–8]. Алгебраические критерии расположения корней многочленов в заданном множестве составляют отдельное направление исследований, о котором в этой работе говорить не будем (см., например, классическую монографию [9] и относительно новые книги [10,11]); наш интерес сосредоточен на свойствах областей устойчивости определенных классов разностных уравнений. Отметим, что устойчивость многочленов в смысле их применения к устойчивости разностных уравнений (расположение корней относительно единичного круга) и дифференциальных уравнений (относительно полуплоскости) тесно связаны.

В 1976 г. в статье [12] была получена область на действительной прямой, попадание в которую коэффициента a уравнения $x(n) = x(n-1) + ax(n-k)$ является критерием асимптотической устойчивости его решений. Этот результат положил начало поискам явно выраженных через параметры уравнения критериев устойчивости разных классов разностных уравнений; такие условия обычно называют эффективными. В 1994 г. критерий устойчивости из [12] был существенно обобщен в работе [13], где, по-видимому, впервые получены двумерные области устойчивости автономных разностных уравнений.

В первые годы XXI в., в частности в связи с прикладными вопросами, возник исследовательский интерес к точному описанию условий устойчивости автономного уравнения с двумя запаздываниями

$$x(n) + ax(n-k) + bx(n-m) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.1}$$

Сразу ряд разных авторов получили необходимые и достаточные условия устойчивости уравнения (0.1) с действительными коэффициентами a и b. Наиболее ясно области устойчивости описаны в работах [14–16]. Статья [17] содержит подробный обзор и обсуждение полученных результатов, а также возможных обобщений.

К необходимости поиска эффективных условий устойчивости скалярных уравнений с комплексными коэффициентами приводит исследование систем линейных уравнений. Так, в работе [18] приведены таблицы достижений в получении критериев устойчивости некоторых линейных систем с двумя запаздываниями в терминах параметров; некоторые другие соотношения между скалярными уравнениями и системами двух уравнений указаны в [19]. В [20] предложен критерий устойчивости уравнения $x(n)+Ax(n-k)+Bx(n-m)=0$, где матрицы A и B одновременно триангуляризуемы. В [21] отмечены свойства областей устойчивости уравнения (0.1), связанные с потерей и приобретением устойчивости при изменении запаздываний («switches»; отметим, что этому явлению уделено внимание во многих работах по устойчивости дифференциальных и разностных уравнений с последействием). В работе [22] получены эффективные условия устойчивости уравнения

$$x(n) + ax(n-1) + bx(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.2}$$

в случае $a \in (0,1)$, $b \in \mathbb{C}$. Наиболее конструктивный, по нашему мнению, подход к исследованию устойчивости уравнения (0.1) с комплексными коэффициентами a и b был предложен в работе [23], где получен не только аналитический критерий асимптотической устойчивости, но и его геометрическая интерпретация.

В настоящей работе мы используем предложенный в [23] подход для аналитического и геометрического описания областей экспоненциальной и равномерной устойчивости и ряда свойств решений уравнения (0.2), где $a, b \in \mathbb{C}$, развивая тем самым результаты работы [23], а также [24].

Отметим некоторые другие результаты, имеющие отношение к нашему исследованию. В первую очередь следует отметить возможности сведения описания областей устойчивости одних уравнений к таким описаниям для других уравнений. Так, в [25] устойчивость дифференциального уравнения $\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0$, где $a, b \in \mathbb{C}$, исследуется с помощью разностного уравнения с тремя запаздываниями. В связи с этим упомянем работы [26–28], где получены критерий для некоторых уравнений с тремя коэффициентами при трех запаздываниях; работы [29,30], где предложены способы понижения порядка исследуемого разностного уравнения; а также посвященные автономным дифференциальным уравнениям работы [31–33], которые показали, что уравнения с определенным числом параметров можно естественным образом классифицировать. Далее, отметим, что конструктивный подход к исследованию асимптотики дифференциально-разностного уравнения с двумя комплексными коэффициентами продемонстрирован в недавнем препринте [34] (вторая, расширенная версия). Анализ использования известных методов локализации корней многочленов с комплексными коэффициентами в связи с радиотехническими приложениями см. в [35]. Наконец, область применения подходов к описанию областей устойчивости линейных автономных уравнений можно расширять; например, в [36] рассматривается уравнение с двумя матрицами коэффициентов, разрешенное относительно дробной производной.

Скорость роста количества работ, посвященных эффективным условиям устойчивости линейных автономных дифференциальных и разностных уравнений, по нашим наблюдениям, достигла пика на рубеже XX и XXI веков, на некоторое время стабилизировалась, а за последние годы несколько снизилась. Краткий обзор некоторых сложившихся подходов к исследованию устойчивости линейных разностных уравнений с произвольным числом запаздываний см. в [37], а в работе [38] предложены способы переноса некоторых результатов на неавтономные уравнения. Исследование линейных систем оказывается существенно более трудной задачей, чем исследование скалярных уравнений с действительными коэффициентами; сегодня требуются новые идеи.

Работа построена следующим образом. В § 1 определяются основные понятия и приводятся критерии устойчивости линейных автономных разностных уравнений в терминах корней характеристического уравнения. В § 2 определяется пространство параметров уравнения, напоминается суть известного метода D-разбиения, доказывается теорема о связности области устойчивости уравнения в пространстве коэффициентов и устанавливается связь между областями экспоненциальной и равномерной устойчивости. В § 3 изучены области устойчивости простейшего уравнения с двумя комплексными коэффициентами — уравнения с запаздываниями, равными 1 и 2. Посвящение этому уравнению отдельного параграфа позволило проще изложить построенное на тех же идеях более общее исследование, что сделано в § 4, где изучены области устойчивости уравнений с запаздываниями 1 и k. В заключении обсуждается место нашей работы в ряду работ, посвященных условиям устойчивости линейных разностных уравнений.

§ 1. Критерии устойчивости автономного разностного уравнения

Будем обозначать символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ множества натуральных, действительных и комплексных чисел, для множества A через $[A]$ его замыкание и для множеств A и B через $A\backslash B$ их разность. Рассмотрим линейное разностное уравнение p-го порядка

$$x(n)+\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k)=0, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.1}$$

где $a_k\in\mathbb{C}$. Очевидно, что если заданы значения $x(n)=\varphi(n)\in\mathbb{C}$, $n=\overline{1-p,0}$, то значения $x(n)\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, определяются уравнением (1.1) однозначно. В таком случае функцию $x\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ будем называть *решением* уравнения (1.1), соответствующим *начальной функции* $\varphi\colon\{1-p,\ldots,0\}\to\mathbb{C}$.

Любое решение уравнения (1.1) представимо в виде [3, с. 77]

$$x(n)=q_1(n)\lambda_1^n+q_2(n)\lambda_2^n+\ldots+q_m(n)\lambda_m^n, \tag{1.2}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ — различные корни его характеристического многочлена

$$\lambda^p+\sum_{k=1}^{p} a_k\lambda^{p-k}, \tag{1.3}$$

а $q_j(n)$ — многочлены степени, на единицу меньшей кратности корня λ_j.

Понятие *устойчивость* отражает непрерывную зависимость решений уравнения от определяющих их начальных функций. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями для исследования устойчивости решений уравнения (1.1) в силу его линейности достаточно ограничиться изучением устойчивости тривиального решения и говорить не об устойчивости решений, а об устойчивости самого уравнения.

Определение 1.1. Уравнение (1.1) будем называть:

- *равномерно устойчивым*, если существует такая константа $N > 0$, что для каждого решения x для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $|x(n)| \leqslant N \max\limits_{1-p\leqslant n\leqslant 0} |\varphi(n)|$.
- *экспоненциально устойчивым*, если существует такие константы $N, \gamma > 0$, что для каждого решения x для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $|x(n)| \leqslant N \max\limits_{1-p\leqslant n\leqslant 0} |\varphi(n)|\, e^{-\gamma n}$.

Предложенный подход к определению решений разностного уравнения и их устойчивости не является единственно возможным: например, можно определить *фундаментальную функцию* уравнения (1.1) и рассматривать устойчивость как ее свойство [39]. В отношении исследования асимптотического поведения решений линейного автономного уравнения применяемые разными исследователями подходы, как правило, равносильны.

Обозначим $U = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, $[U] = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}$, $\partial U = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Из представления (1.2) следуют известные критерии устойчивости.

Теорема 1.1 ([3, с. 246]). *Уравнение* (1.1) *экспоненциально устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена* (1.3) *принадлежат открытому кругу U.*

Теорема 1.2 ([3, с. 246]). *Уравнение* (1.1) *равномерно устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена* (1.3) *принадлежат замкнутому кругу $[U]$, причем корни, лежащие на его границе ∂U, являются простыми.*

§ 2. Пространство параметров и области устойчивости

Когда идет речь об области устойчивости уравнения, предполагается, что это область в некотором *пространстве параметров* исследуемого класса уравнений. Мы в качестве параметров уравнения (1.1) будем рассматривать его коэффициенты $a_1, \dots, a_p$, и, таким образом, пространством параметров полагать множество допустимых значений коэффициентов. Основное внимание в настоящей работе уделяется уравнениям с двумя запаздываниями с пространствами параметров $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^2$: два коэффициента принимают произвольные (действительные или комплексные) значения, а остальные коэффициенты полагаются нулевыми.

Ниже термин *устойчивость* иногда употребляется без уточнения, в смысле какого из пунктов определения 1.1 следует его понимать. В таких случаях следует относить сказанное к обоим рассматриваемым видам устойчивости: как к равномерной, так и к экспоненциальной.

Так, множества точек пространства параметров, соответствующих устойчивым уравнениям, будем называть *областями устойчивости* класса уравнений (1.1).

2.1. Метод D-разбиения

Применительно к исследованию устойчивости уравнения (1.1) метод D-разбиения, предложенный в работах Ю. И. Неймарка [40,41] для исследования дифференциальных динамических систем, состоит в разбиении пространства параметров уравнения гиперповерхностями, точкам которых соответствуют характеристические многочлены, имеющие нули во множестве ∂U. Поскольку корни многочлена являются непрерывными функциями его коэффициентов и при движении точки в пространстве коэффициентов количество корней (в смысле суммы их кратностей) соответствующего ей характеристического многочлена не меняется, то количество корней, находящихся вне единичного круга U, изменяется только при переходе точки через поверхности D-разбиения.

Таким образом, пространство параметров разбивается на открытые области; точкам каждой области соответствуют многочлены с одинаковым числом корней вне круга U. Чтобы исследовать уравнение (1.1) на устойчивость, строится D-разбиение его пространства параметров и выделяются области, которым соответствуют многочлены, не имеющие корней вне круга U. Чтобы убедиться, что некоторой области соответствуют такие многочлены, достаточно указать в ней хотя бы одну точку, которой соответствует такой многочлен.

2.2. Связность области устойчивости неполного многочлена

Установим свойство областей устойчивости уравнения (1.1), которое значительно упрощает их описание.

Из теорем 1.1 и 1.2 следует, что устойчивость уравнения (1.1) можно рассматривать как свойство его характеристического многочлена: многочлен (1.3) будем называть устойчивым, если устойчиво соответствующее ему уравнение (1.1).

Если пространством параметров уравнения (1.1) является пространство его коэффициентов $S = \mathbb{R}^p$ или $S = \mathbb{C}^p$, то его область устойчивости линейно связна. Приведем простое доказательство этого факта — чтобы ниже, дополнив рассуждение, доказать более общий факт.

Пусть точка $(a_1, \dots, a_p) \in S$ принадлежит области устойчивости. Тогда корни соответствующего многочлена (1.3) находятся внутри круга U или на его границе. Будем непрерывно изменять эти корни, уменьшая их по модулю от исходных значений до нуля. При этом коэффициенты многочлена будут меняться также непрерывно от исходных до нулевых, и для каждого их значения многочлен будет оставаться устойчивым. Таким образом, каждая точка области устойчивости соединяется в пространстве S непрерывной кривой с началом координат.

Изменим пространство параметров уравнения (1.1): положим некоторые коэффициенты a_k равными нулю. Приходим к уравнению вида

$$x(n) + \sum_{k=1}^{m} a_{r_k} x(n - r_k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

где $r_k \in \{1, \dots, p\}$. Для определенности будем считать, что $r_m = \max\{r_k \colon k = \overline{1, m}\} = p$.

По теоремам 1.1 и 1.2 устойчивость уравнения (2.1) определяется расположением корней его характеристического многочлена

$$\lambda^p + \sum_{k=1}^{m} a_{r_k} \lambda^{p - r_k} \tag{2.2}$$

относительно единичного круга U.

Теорема 2.1. *Области экспоненциальной и равномерной устойчивостей уравнения* (2.1) *линейно связны.*

Для доказательства теоремы 2.1 недостаточно сослаться на приведенное выше рассуждение, доказывающее связность областей устойчивости уравнения (1.1): при изменении корней многочлена (2.2) от исходных значений до нулевых коэффициенты многочлена изменяются, вообще говоря, так, что коэффициенты, которые при исходных и конечных значениях корней нулевые, при промежуточных значениях корней могут не быть нулевыми; тогда соответствующее многочлену уравнение теряет вид (2.1).

Доказательство теоремы 2.1. Пусть точка $(a_{r_1}, \dots, a_{r_m})$ принадлежит области устойчивости уравнения (1.1), то есть корни соответствующего характеристического многочлена находятся внутри или на границе круга U.

Как и ранее, можно непрерывно по компонентам изменять вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_m})$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$ от исходного значения до нуля, не увеличивая его компоненты по модулю. *Но это можно делать так, что определяемый этим вектором как набором корней многочлен, изменяясь, не теряет вида* (2.2)*, то есть его коэффициенты при тех степенях, где они в исходный момент нулевые, при изменении вектора остаются нулевыми.* Покажем это. Положим

$$\mu(t) = (1-t)\lambda, \quad t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Получим: $\mu(0) = \lambda$, $\mu(1) = (0, \ldots, 0)$. По теореме Виета коэффициенты многочлена вида (2.2) являются однородными функциями его корней:

$$a_{r_k} = \sum_{i=1}^{C_{r_m}^{r_k}} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_{r_k}}, \quad i_1, \ldots, i_{r_k} \in \{r_1, \ldots, r_m\}.$$

Следовательно, коэффициенты $b_{r_k}(t)$ соответствующего набору корней $\mu(t)$ многочлена

$$\lambda^p + \sum_{k=1}^{m} b_{r_k}(t)\lambda^{p-r_k}$$

изменяются по закону $b_{r_k}(t) = (1-t)^{r_k} a_{r_k}$, то есть этот многочлен непрерывно, не выходя из области устойчивости, изменяется от многочлена (2.2) до имеющего нулевые корни одночлена λ^p. □

Следствие 2.1. *Область D-разбиения уравнения* (2.1) *является областью его экспоненциальной устойчивости, если и только если она содержит начало координат.*

2.3. Соотношение областей экспоненциальной и равномерной устойчивости

Обозначим через E область экпоненциальной устойчивости уравнения (2.1) и через E_1 множество точек пространства коэффициентов уравнения (2.1), соответствующих уравнениям, для которых все корни характеристического многочлена (2.2) принадлежат кругу $[U]$.

Теорема 2.2. *Множество E_1 является замыканием области E.*

Доказательство. Будем для краткости отождествлять точки пространства коэффициентов уравнения с соответствующими характеристическими многочленами.

Включение $[E] \subset E_1$ следует из непрерывной зависимости корней многочлена (2.2) от его коэффициентов: если в любой окрестности многочлена P есть многочлен с корнями из круга U, то корни многочлена P принадлежат кругу $[U]$.

Докажем обратное включение $E_1 \subset [E]$. Допустим, $P \in E_1$, то есть все корни многочлена P по модулю не превосходят 1. Надо показать, что $P \in E$, то есть что в любой окрестности многочлена P есть многочлены из E. Но если это неверно, то существует окрестность многочлена P, у всех многочленов которой корни по модулю не превышают 1, но достигают 1. Такой окрестности быть не может: действительно, из P в начало координат можно провести кривую, определенную изменением корней по закону (2.3). При сколь угодно малом сдвиге вдоль этой кривой все корни станут по модулю меньше 1. Таким образом, $E_1 = [E]$. □

Назовем *множеством кратности M* подмножество точек из E_1, которым соответствуют многочлены (2.2), имеющие кратные корни. Из теорем 1.1, 1.2 и 2.2 получаем

Следствие 2.2. *Областью равномерной устойчивости уравнения* (2.1) *является множество $E \cup ([E] \setminus M)$.*

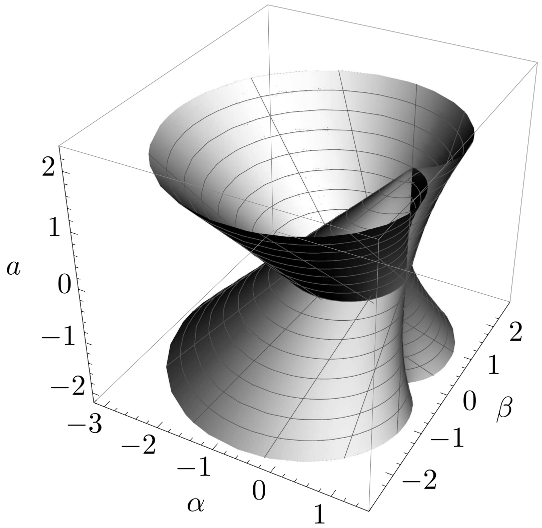

Рис. 1. Поверхность D-разбиения для уравнения (3.2)

§ 3. Области устойчивости уравнения второго порядка

В этом параграфе построим области экспоненциальной и равномерной устойчивостей уравнения

$$x(n) + ax(n-1) + bx(n-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

с комплексными коэффициентами a и b. Для этого используем метод, предложенный в работе [23], и результаты § 2.

Сначала применим полученные в § 2 результаты к случаю действительного a. Рассмотрим уравнение

$$x(n) - ax(n-1) + (\alpha + i\beta)x(n-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

где $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - a\lambda + \alpha + i\beta = 0. \tag{3.3}$$

Положим в (3.3) $\lambda = e^{i\varphi}$, применим формулу Эйлера и разделим действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \alpha = a\cos\varphi - \cos 2\varphi, \\ \beta = a\sin\varphi - \sin 2\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [-\pi, \pi]. \tag{3.4}$$

Равенства (3.4) можно рассматривать как параметрическое задание поверхности в пространстве $O\alpha\beta a$ (см. рис. 1), которая представляет собой D-разбиение для уравнения (3.2).

Эта поверхность симметрична относительно плоскости $a = 0$, а ее сечения при фиксированных $a \in \mathbb{R}$ представляют собой улитки Паскаля: при $|a| \geqslant 2$ это замкнутые кривые без самопересечений, при $|a| \in [0, 2)$ они имеют самопересечение, при $a = 0$ кривая обращается в окружность (см. рис. 2).

При $a \geqslant 0$ и $a \leqslant 0$ множество «внутренних овалов» улиток образуют два симметричных «криволинейных конуса», которые ограничивают область, содержащую начало координат (см. рис. 3). По следствию 2.1 она является областью экспоненциальной устойчивости уравнения (3.2). Сечения этих конусов вырождаются в точку, когда $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, следовательно, вершины конусов находятся в точках $(1, 0, \pm 2)$. Их общее основание — круг $|b| \leqslant 1$, лежащий в плоскости $a = 0$.

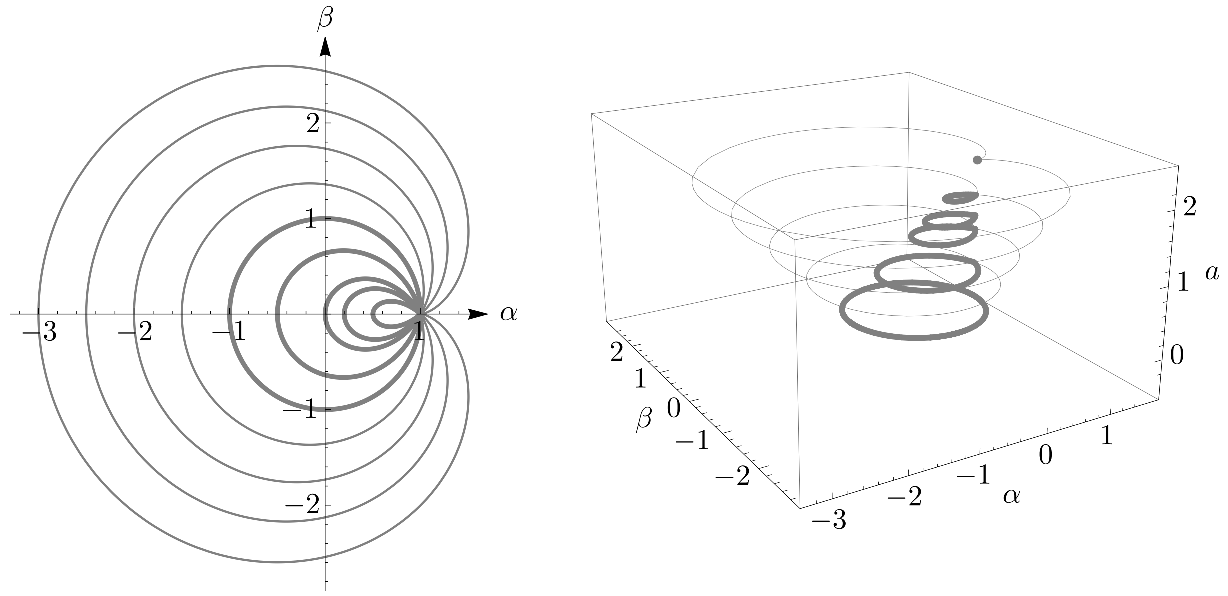

Рис. 2. D-разбиения в плоскостях $a = \mathrm{const}$

Дадим аналитическое описание области устойчивости. Найдем условия на параметр φ, при которых поверхность (3.4) описывает границу конусов. Из (3.4) и рис. 1 и 2 следует, что при фиксированном значении $a \in [-2, 2]$, граничные значения φ определяются системой

$$\begin{cases} 1 = a\cos\varphi - \cos 2\varphi, \\ 0 = a\sin\varphi - \sin 2\varphi, \end{cases}$$

преобразуя которую, получаем $a = 2\cos\varphi$. Положим $\varphi_0 = \arccos(|a|/2)$. Внутренний овал улитки Паскаля для $a \in [0, 2]$ образуется при $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, а для $a \in [-2, 0]$ — при $\varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]$. Обозначим

$$\partial C = \big\{(\alpha, \beta, a)\colon \alpha = a\cos\varphi - \cos 2\varphi,\ \beta = a\sin\varphi - \sin 2\varphi,\ a \in [0, 2],\ \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]\big\} \cup$$
$$\cup \big\{(\alpha, \beta, a)\colon \alpha = a\cos\varphi - \cos 2\varphi,\ \beta = a\sin\varphi - \sin 2\varphi,\ a \in [-2, 0],\ \varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0]\big\},$$

а через C — открытую область, ограниченную поверхностью ∂C. Теперь можно сформулировать критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (3.2).

Теорема 3.1. *Для того чтобы уравнение* (3.2) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$ *принадлежала области* C.

Найдем условия на a и b, при которых уравнение (3.2) равномерно устойчиво. По следствию 2.2 областью равномерной устойчивости являются точки замыкания $[C]$, за исключением тех, для которых кратные корни характеристического уравнения лежат на единичной окружности ∂U. Корням, лежащим на ∂U, соответствуют точки, принадлежащие ∂C. Характеристическое уравнение (3.3) имеет кратные корни, когда $\lambda^2 - a\lambda + b = (\lambda - \lambda_0)^2$, что возможно только при $\alpha = a^2/4$, $\beta = 0$ и $\lambda_0 = a/2$. Эти равенства задают в $[C]$ определенное в § 2.3 множество кратности M — в данном случае *кривую кратности* (см. рис. 3). Поскольку λ_0 лежит на границе единичного круга только в случаях $a = \pm 2$, то все точки, лежащие на поверхности ∂C, кроме вершин конусов, соответствуют простым корням уравнения (3.3).

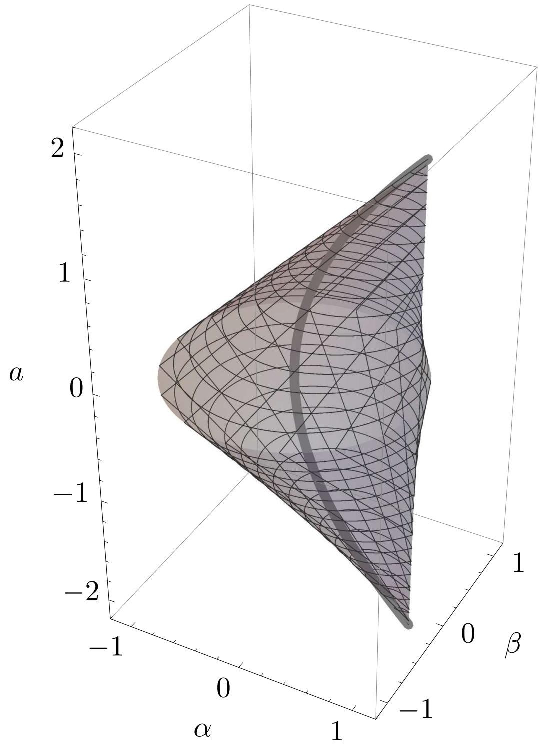

Рис. 3. Область устойчивости C уравнения (3.2) и кривая кратности

Теорема 3.2. *Для того чтобы уравнение* (3.2) *было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$ *принадлежала множеству* $[C] \setminus (1, 0, \pm 2)$.

Отметим случай, когда оба коэффициента уравнения (3.2) действительны. Из теорем 3.1 и 3.2 получаем два следствия с конструктивным описанием областей устойчивости (ранее полученным в работе [42]).

Следствие 3.1. *Пусть* $b \in \mathbb{R}$. *Уравнение* (3.2) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $a \in (-2, 2)$ *и* $b \in (-a - 1, a - 1)$.

Доказательство. Так как $b \in \mathbb{R}$, то $\beta = 0, \alpha = b$. Из определения ∂C получаем:

$$\begin{cases} \cos 2\varphi - a \cos \varphi + b = 0, \\ \sin 2\varphi - a \sin \varphi = 0, \end{cases}$$

Представим второе равенство в виде $\sin \varphi (2 \cos \varphi - a) = 0$, откуда следует, что либо $\sin \varphi = 0$, либо $\cos \varphi = a/2$. Рассмотрим первый случай. При $a \in [0, 2]$ из определения ∂C следует, что $\varphi = 0$, тогда из первого равенства имеем $1 - a + b = 0$; при $a \in [-2, 0]$ из определения ∂C следует, что $\varphi = \pi$, тогда из первого равенства получаем $1 + a + b = 0$.

Во втором случае, подставляя $\cos \varphi = a/2$ в первое уравнение системы, получаем $b = 1$.

Таким образом, в сечении поверхности ∂C плоскостью $\beta = 0$ образуются три прямых $b = a - 1$, $b = -a - 1$, $b = 1$, которые ограничивают треугольник. Этот треугольник является сечением области C плоскостью $\beta = 0$, следовательно, он есть область экспоненциальной устойчивости при $b \in \mathbb{R}$. □

Следствие 3.2. *Пусть* $b \in \mathbb{R}$. *Уравнение* (3.2) *равномерно устойчиво, если и только если* $a \in (-2, 2)$ *и* $b \in [-a - 1, a - 1]$.

Теперь построим область устойчивости для общего случая: рассмотрим уравнение (3.1), где $a, b \in \mathbb{C}$.

Запишем коэффициент a в показательной форме $a = |a|e^{i\omega}$, а для коэффициента b сохраним алгебраическую форму $b = \alpha + i\beta$. Сделаем замену $x(n) = e^{i\omega n}y(n)$. Уравнение (3.1) принимает вид

$$y(n) + |a|y(n-1) + be^{-2i\omega}y(n-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Представив второй коэффициент в алгебраической форме $be^{-2i\omega} = u + iv$, получаем уравнение

$$y(n) + |a|y(n-1) + (u+iv)y(n-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

которое является уравнением вида (3.2). Так как $|a| \geqslant 0$, то его областью устойчивости является верхний конус на рис. 3.

Теорема 3.3. *Для того чтобы уравнение* (3.1) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами*

$$(\alpha \cos 2\omega + \beta \sin 2\omega, \beta \cos 2\omega - \alpha \sin 2\omega, |a|)$$

принадлежала области C.

Доказательство. Так как $|x(n)| = \left|e^{i\omega n}y(n)\right| = |y(n)|$, то уравнение (3.1) экспоненциально устойчиво, если и только если экспоненциально устойчиво уравнение (3.5). Осталось заметить, что $u = \alpha \cos 2\omega + \beta \sin 2\omega$ и $v = \beta \cos 2\omega - \alpha \sin 2\omega$ и применить к уравнению (3.5) теорему 3.1. □

Аналогичным образом, опираясь на теорему 3.2, получаем критерий равномерной устойчивости уравнения (3.1).

Теорема 3.4. *Для того чтобы уравнение* (3.1) *было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами*

$$(\alpha \cos 2\omega + \beta \sin 2\omega, \beta \cos 2\omega - \alpha \sin 2\omega, a)$$

принадлежала множеству $[C] \setminus (1, 0, 2)$.

Теоремам 3.3 и 3.4 можно придать более наглядный вид, указав множество, которому должны принадлежать точки $(\alpha, \beta, |a|)$.

Найдем семейство поверхностей, которые задают D-разбиение уравнения (3.1) в пространстве параметров $(\alpha, \beta, |a|)$ при фиксированном ω. Из формул (3.4), примененных к уравнению (3.5), и формул для u и v, приведенных в доказательстве теоремы 3.3, получаем

$$\begin{cases} \alpha \cos 2\omega + \beta \sin 2\omega = |a| \cos \varphi - \cos 2\varphi, \\ \beta \cos 2\omega - \alpha \sin 2\omega = |a| \sin \varphi - \sin 2\varphi, \end{cases}$$

откуда α и β выражаются явно:

$$\begin{cases} \alpha = |a| \cos(\varphi + 2\omega) - \cos(2\varphi + 2\omega), \\ \beta = |a| \sin(\varphi + 2\omega) - \sin(2\varphi + 2\omega). \end{cases}$$

Эти равенства можно рассматривать при каждом фиксированном ω как параметрически заданные поверхности; обозначим их через ∂C_ω, а ограниченные ими области через C_ω.

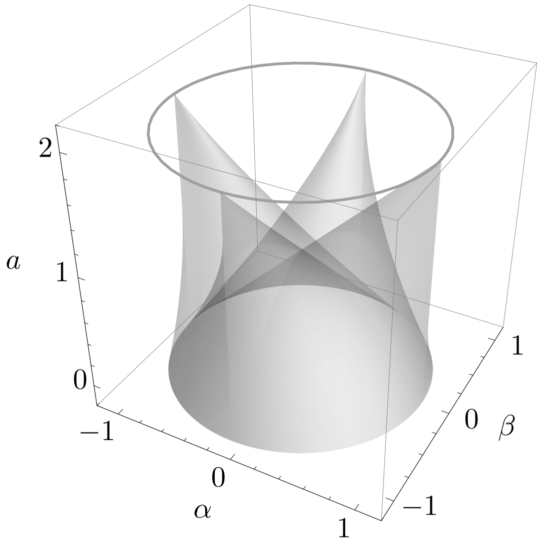

Рис. 4. «Конусы» C_ω при $\omega = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$

При $\omega = 0$ получаем определенную выше поверхность $\partial C_0 = \partial C$ и ограниченный ею «конус» $C_0 = C$. Так как $\alpha + i\beta = (u + iv)e^{2i\omega}$, то C_ω получается из конуса C_0 поворотом вокруг оси a на угол 2ω.

На рис. 4 приведены четыре таких конуса. Основанием всех конусов C_ω служит одна и та же окружность $|b| = 1$, лежащая в плоскости $a = 0$, а вершины конусов имеют координаты $(\cos 2\omega, \sin 2\omega, 2)$ и описывают окружность $|b| = 1$ в плоскости $a = 2$. Эта окружность образует множество точек поверхностей ∂C_ω, которым соответствуют кратные корни характеристического многочлена уравнения (3.1).

Теперь теоремы 3.3 и 3.4 можно переформулировать в терминах областей C_ω.

Теорема 3.5. *Для того чтобы уравнение* (3.1) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$ *принадлежала области* C_ω.

Теорема 3.6. *Для того чтобы уравнение* (3.1) *было равномерно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$ *принадлежала множеству* $[C_\omega] \setminus (\cos 2\omega, \sin 2\omega, 2)$.

§ 4. Области устойчивости уравнений высших порядков

В этом параграфе построим области экспоненциальной и равномерной устойчивости разностного уравнения

$$x(n) + ax(n-1) + bx(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{N}$.

4.1. Экспоненциальная устойчивость

Если $k = 1$, то уравнение (4.1) принимает вид

$$x(n) + (a+b)x(n-1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

устойчивость которого легко исследовать, применив теоремы 1.1 и 1.2: уравнение (4.2) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $|a + b| < 1$, и равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда $|a + b| \leqslant 1$.

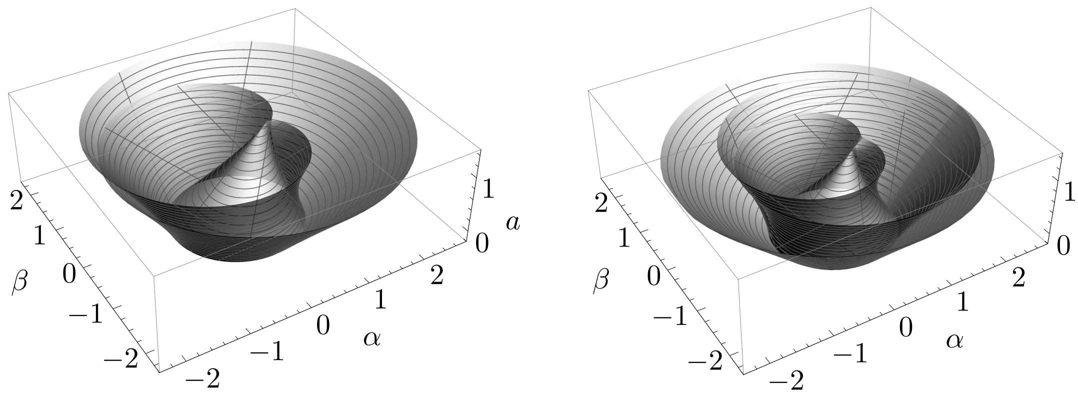

Рис. 5. Поверхности D-разбиения для $k = 3$ и $k = 4$

Случай $k = 2$ исследован в § 3, поэтому далее полагаем, что $k \geqslant 3$.

Сначала рассмотрим случай, когда первый коэффициент действительный. Запишем уравнение

$$x(n) - ax(n-1) + (\alpha + i\beta)x(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

где $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и построим для него области устойчивости по схеме § 3. Воспользуемся методом D-разбиения и найдем поверхность, которая разбивает пространство параметров (α, β, a) на несколько областей:

$$\begin{cases} \alpha = a\cos(k-1)\varphi - \cos k\varphi, \\ \beta = a\sin(k-1)\varphi - \sin k\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [-\pi, \pi] \tag{4.4}$$

(минимальный период функций переменной φ в правых частях равен 2π). На рис. 5 изображены поверхности (4.4) для $k = 3$ и $k = 4$ в полуплоскости $a \geqslant 0$, на рис. 6 — их сечения. С увеличением k число витков и самопересечений поверхности увеличивается, внутренний виток образует ограниченную поверхность, при $a = 0$ все витки пересекаются по окружности $|b| = 1$.

Замечание 1. Выбор для начала исследования пары $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ не случаен: пара $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ формально тоже приводит к трехмерной области устойчивости, но она имеет простой вид только для случая $k = 2$. При $k \geqslant 3$ структура области усложняется: построить ее и изучить свойства сложнее, чем проследить за трансформацией поверхностей, подобных изображенным на рис. 5.

Из (4.4) следует, что если k четно, то области разбиения симметричны относительно плоскости $a = 0$, а если k нечетно — то относительно начала координат. Исследуем сечение поверхностей D-разбиения плоскостью $\beta = 0$. Из (4.4) получаем:

- если $\sin(k-1)\varphi = 0$, то из первого уравнения системы получаем границы разбиения: $a = \alpha + 1$ (для всех k), $a = -\alpha - 1$ (для четных k) и $a = \alpha - 1$ (для нечетных k);

- если $\sin(k-1)\varphi \neq 0$, то для всех k границы разбиения задаются параметрически:

$$\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin(k-1)\varphi}, \quad a = \frac{\sin k\varphi}{\sin(k-1)\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \frac{l\pi}{k-1} : l = \overline{-(k-1), k-1} \right\}. \tag{4.5}$$

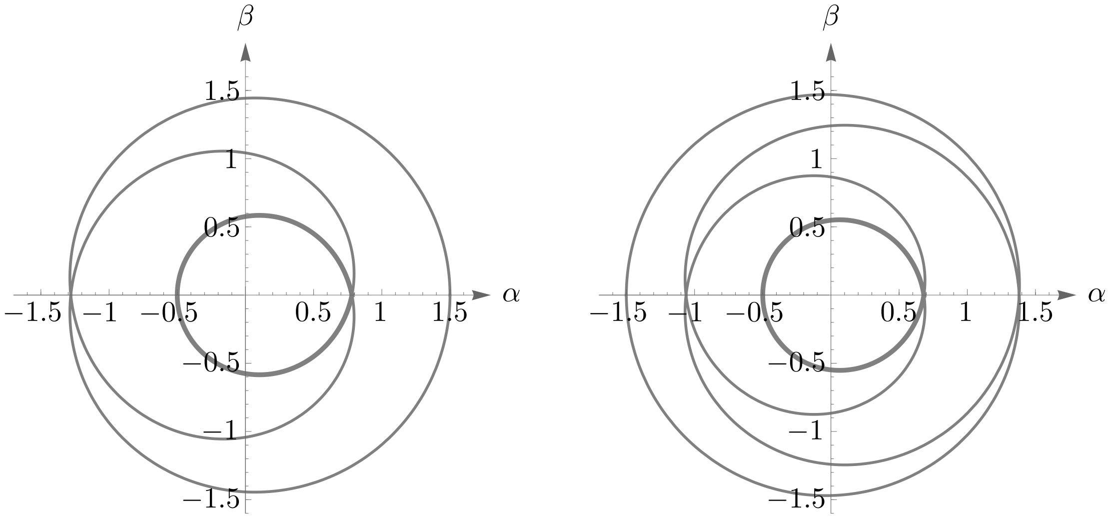

Рис. 6. Сечения поверхностей D-разбиения для $k = 3$ и $k = 4$ плоскостью $a = 0.5$

По следствию 2.1 область D-разбиения является областью экспоненциальной устойчивости, если и только если она содержит начало координат, следовательно, эта область ограничена внутренними витками поверхности D-разбиения. Заметим, что граница области имеет единственную точку границы с максимальной координатой a, см. рис. 5. Подмножество области экспоненциальной устойчивости при $a \geqslant 0$ назовем *конусом устойчивости*, а точку его границы с максимальной координатой a — его *вершиной*.

Из (4.4) следует, что D-разбиение при любом k симметрично относительно плоскости $\beta = 0$, значит на этой плоскости находится вершина конуса устойчивости и симметричного ему конуса. На рис. 7 приведены сечения конусов плоскостью $\beta = 0$ при четных (слева) и нечетных (справа) k. Эти сечения представляют собой объединения двух криволинейных треугольников, ограниченных двумя прямыми и одной кривой и симметричных, в зависимости от четности k, относительно прямой $a = 0$ или начала координат. По-видимому, впервые эти сечения были получены в работе [13].

Вершинам конуса устойчивости и симметричного конуса соответствуют значения параметра $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, при которых значения координат α и a по формулам (4.4) не определены. Доопределим их по непрерывности: вычисляя пределы

$$\alpha = \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin\varphi}{\sin(k-1)\varphi} = \frac{1}{k-1}, \qquad a = \lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin k\varphi}{\sin(k-1)\varphi} = \frac{k}{k-1},$$
$$\alpha = \lim_{\varphi\to \pi} \frac{\sin\varphi}{\sin(k-1)\varphi} = \frac{(-1)^k}{k-1}, \qquad a = \lim_{\varphi\to \pi} \frac{\sin k\varphi}{\sin(k-1)\varphi} = -\frac{k}{k-1},$$

получаем, что в координатах (α, a) вершинами конусов являются точки $\left(\frac{1}{k-1}, \pm\frac{k}{k-1}\right)$ для четных k и точки $\left(\frac{1}{k-1}, \frac{k}{k-1}\right)$ и $\left(-\frac{1}{k-1}, -\frac{k}{k-1}\right)$ для нечетных k.

Таким образом, конус устойчивости лежит между плоскостями $a = 0$ и $a = \frac{k}{k-1}$. Найдем интервал значений параметра φ, при которых поверхность (4.4) описывает границу конуса устойчивости. Для каждого $a \in (0, \frac{k}{k-1})$ из (4.5) получаем уравнение

$$a = \frac{\sin k\varphi}{\sin(k-1)\varphi} = \frac{U_{k-1}(\cos\varphi)}{U_{k-2}(\cos\varphi)},$$

где U_{k-1}, U_{k-2} — многочлены Чебышёва 2-го рода. Для случаев $k = 2, 3$ отсюда можно явно

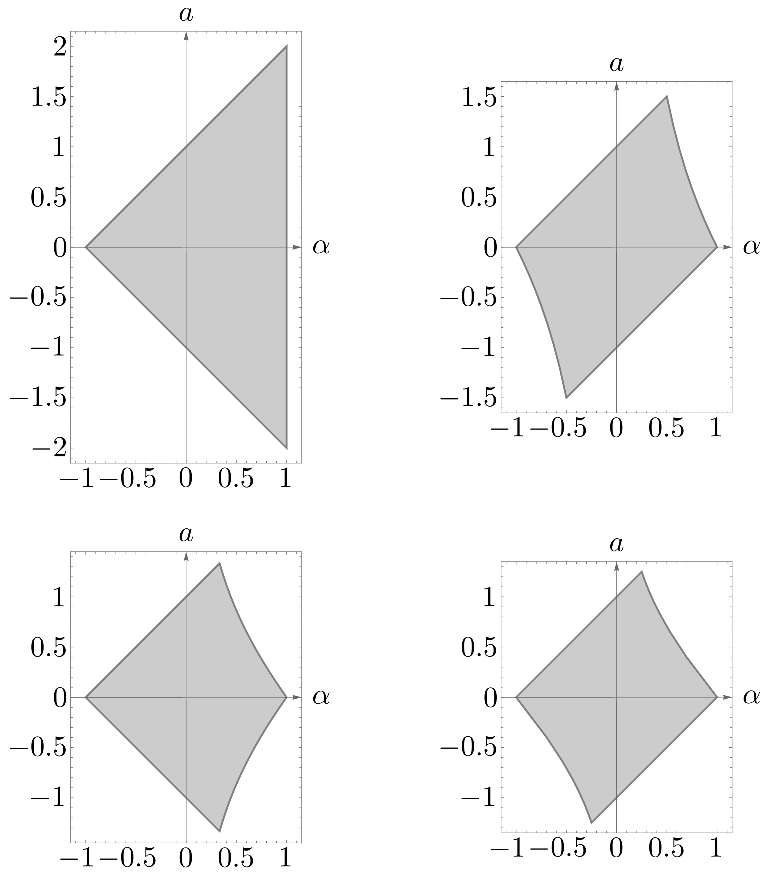

Рис. 7. Сечения конусов устойчивости плоскостью $\beta = 0$ для $k = 2, 3, 4, 5$

выразить $\cos\varphi$:

$$\begin{aligned} &a = 2\cos\varphi, && k = 2,\\ &2a\cos\varphi = -1 + 4{\cos\varphi}^2, && k = 3. \end{aligned}$$

В общем случае сделать это не удается, однако многочлены Чебышёва хорошо изучены, поэтому корни уравнения

$$aU_{k-2}(t) = U_{k-1}(t)$$

вычисляются с произвольной точностью. Обозначим его минимальный положительный корень через t_1 и положим $\varphi_1 = \arccos t_1$. При $a \in (0, \frac{k}{k-1})$ получаем множество овалов (с одной точкой излома), которые описываются параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} \alpha = a\cos(k-1)\varphi - \cos k\varphi,\\ \beta = a\sin(k-1)\varphi - \sin k\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [-\varphi_1, \varphi_1].$$

При $a = \frac{k}{k-1}$ овал стягивается в точку, при $a = 0$ обращается в окружность (рис. 8, слева). В пространстве $O\alpha\beta a$ множество овалов образует поверхность, действительно напоминающую конус (рис. 8, справа).

Теперь нетрудно построить области экспоненциальной устойчивости уравнения (4.3), учитывая их симметрию (см. рис. 9, для нечетных k слева, для четных — справа). Обозначим эти области через C_k.

Теорема 4.1. *Уравнение* (4.3) *экспоненциально устойчиво, если и только если точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$ *принадлежит множеству* C_k.

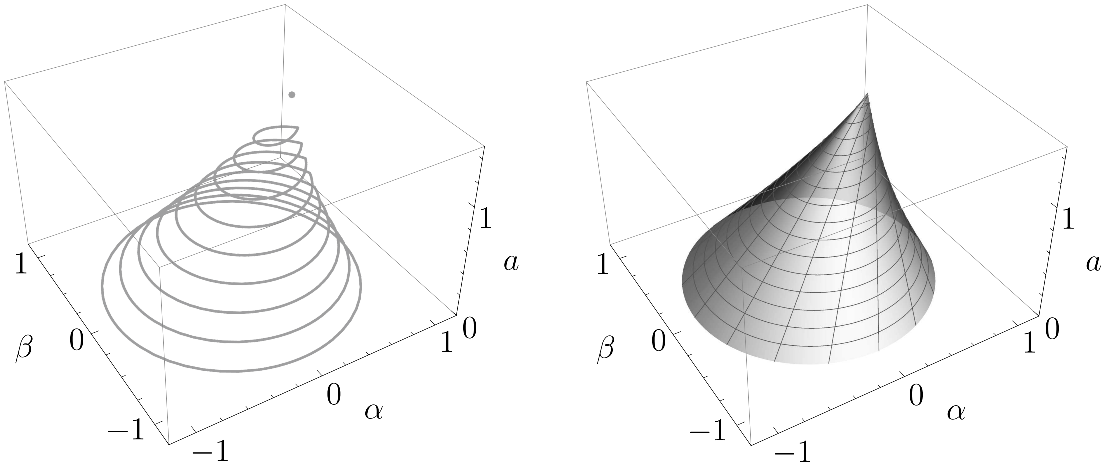

Рис. 8. Конус устойчивости

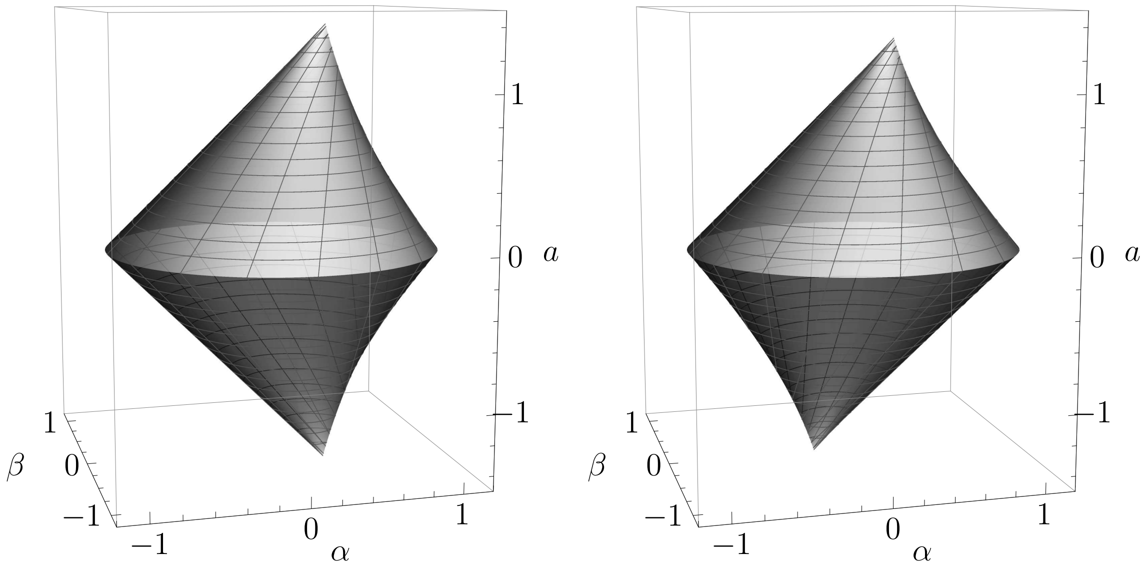

Рис. 9. Области устойчивости уравнения (4.3) для четных и нечетных k

Перейдем к случаю двух комплексных коэффициентов.

Воспользуемся тем же методом, что и в § 3. Представим коэффициенты a и b уравнения (4.1) в виде $a = |a|e^{i\omega}$ и $b = \alpha + i\beta$ и сделаем замену $x(n) = e^{i\omega n}y(n)$. Тогда уравнение (4.1) переписывается в виде

$$y(n) + |a|y(n-1) + be^{-2i\omega}y(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Представляя второй коэффициент в виде $be^{-2i\omega} = u + iv$, получаем уравнение

$$y(n) + |a|y(n-1) + (u+iv)y(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

которое является уравнением вида (4.3). Так как $|a| \geqslant 0$, то его областью устойчивости является конус устойчивости.

Теорема 4.2. *Для того чтобы уравнение* (4.1) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами*

$$(\alpha\cos 2\omega + \beta\sin 2\omega, \beta\cos 2\omega - \alpha\sin 2\omega, |a|)$$

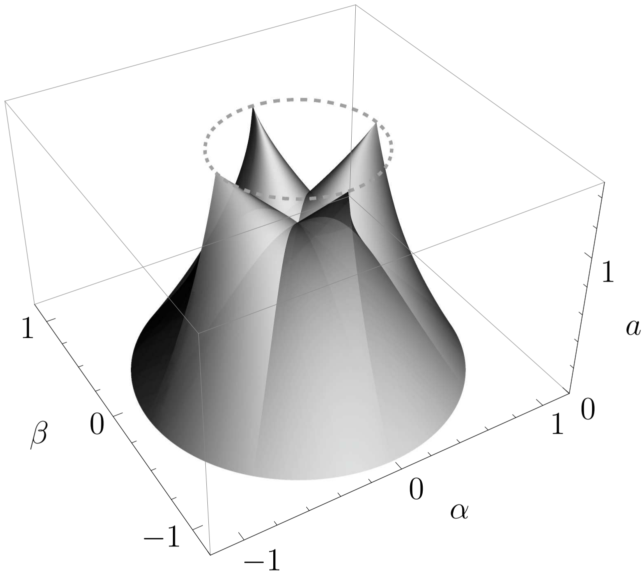

Рис. 10. «Конусы» $C_{k\omega}$ при $\omega = \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$, $k = 3$

принадлежала области C_k.

Доказательство. Так как $|x(n)| = \left|e^{i\omega n}y(n)\right| = |y(n)|$, то уравнение (4.1) экспоненциально устойчиво, если и только если экспоненциально устойчиво уравнение (4.6). Осталось заметить, что $u = \alpha\cos 2\omega + \beta\sin 2\omega$, а $v = \beta\cos 2\omega - \alpha\sin 2\omega$ и применить к уравнению (4.6) теорему 4.1. □

Найдем семейство поверхностей, которые задают D-разбиение для уравнения (4.1) в пространстве параметров $(\alpha, \beta, |a|)$ при фиксированном ω. Из формул (4.4), примененных к уравнению (4.6), и формул для u и v, приведенных в доказательстве теоремы 4.2, получаем

$$\begin{cases}\alpha\cos 2\omega + \beta\sin 2\omega = |a|\cos(k-1)\varphi - \cos k\varphi,\\ \beta\cos 2\omega - \alpha\sin 2\omega = |a|\sin(k-1)\varphi - \sin k\varphi,\end{cases}$$

откуда легко выразить α и β:

$$\begin{cases}\alpha = |a|\cos((k-1)\varphi + k\omega) - \cos(k\varphi + k\omega),\\ \beta = |a|\sin((k-1)\varphi + k\omega) - \sin(k\varphi + k\omega).\end{cases} \tag{4.7}$$

Равенства (4.7) можно рассматривать при каждом фиксированном ω как параметрически заданные поверхности, которые мы обозначим через $\partial C_{k\omega}$, а ограниченные ими области через $C_{k\omega}$.

При $\omega = 0$ получаем определенную ранее поверхность и ограниченный ею конус устойчивости, то есть $\partial C_{k0} = \partial C_k$, а $C_{k0} = C_k$. Так как $\alpha + i\beta = (u + iv)e^{2i\omega}$, то $C_{k\omega}$ получается из конуса C_{k0} поворотом вокруг оси $|a|$ на угол 2ω (на рис. 10 приведены четыре таких конуса). Основанием всех конусов $C_{k\omega}$ служит одна и та же окружность $|b| = 1$, лежащая в плоскости $a = 0$, а вершины конусов имеют координаты $\left(\frac{\cos k\omega}{k-1}, \frac{\sin k\omega}{k-1}, \frac{k}{k-1}\right)$ и описывают в плоскости $a = \frac{k}{k-1}$ окружность с центром в точке $\left(0, 0, \frac{k}{k-1}\right)$ радиусом $\frac{1}{k-1}$.

Теперь теорему 4.2 можно переформулировать в терминах областей $C_{k\omega}$.

Теорема 4.3. *Для того чтобы уравнение* (4.1) *было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$ *принадлежала области $C_{k\omega}$.*

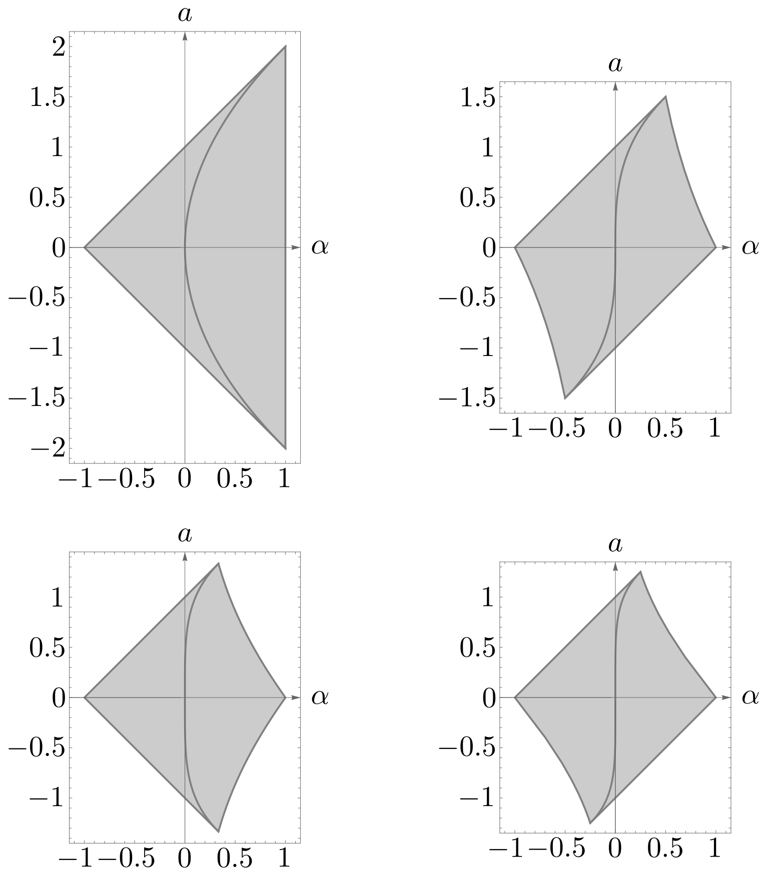

Рис. 11. Кривые кратности для четных и нечетных k

4.2. Равномерная устойчивость

Рассмотрим уравнение (4.3), где $a \in \mathbb{R}$ и $b = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Из теоремы 1.2, следствия 2.2 и теоремы 4.1 следует, что областью равномерной устойчивости являются точки замыкания $[C_k]$, за исключением тех, для которых кратные корни характеристического уравнения лежат на единичной окружности ∂U.

Очевидно, $[C_k] = C_k \cup \partial C_k$, а корням, лежащим на ∂U, соответствуют точки, принадлежащие ∂C_k. Выясним, когда характеристический многочлен уравнения (4.1) имеет кратные корни. Как известно, корень многочлена является кратным, если и только если он является корнем этого многочлена и его производной, то есть для кратного корня λ_0 справедливы одновременно два равенства:

$$g(\lambda_0) \equiv \lambda_0^k - a\lambda_0^{k-1} + b = 0,$$
$$g'(\lambda_0) \equiv k\lambda_0^{k-1} - (k-1)a\lambda_0^{k-2} = 0.$$

Отсюда находим кривую кратности, задающую связь между коэффициентами, при которой уравнение (4.3) имеет кратные корни:

$$\begin{cases} \alpha = a^k \cdot \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Убедимся, что эта кривая пересекает границу области устойчивости только в вершинах конуса устойчивости и симметричного ему конуса.

Поскольку она лежит в плоскости $\beta = 0$, то достаточно найти ее пересечения с сечением области устойчивости, являющимся криволинейным четырехугольником (см. рис. 11).

Пусть $a \geqslant 0$. Нас интересуют значения $\alpha \in [-1,1]$. Нетрудно установить, что при $\alpha \in \left[-1, \frac{1}{k-1}\right]$ у границы области устойчивости $\alpha = a-1$ и имеющей вид параболы $\alpha = ca^k$ кривой кратности есть единственная точка пересечения, и непосредственной подстановкой убедиться, что в координатах (α, a) это точка $\left(\frac{1}{k-1}, \frac{k}{k-1}\right)$. При $\alpha \in \left[\frac{1}{k-1}, 1\right]$ граница задается равенствами (4.5) при $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{k}\right]$ как однозначная функция $\alpha = \alpha(a)$, доопределяемая при $\varphi \to 0$ по непрерывности значением $\alpha(0) = 1$. При $\varphi = \frac{\pi}{k}$ имеем $\alpha\left(\frac{k}{k-1}\right) = \frac{1}{k-1}$. Для всех $\alpha \in \left(\frac{1}{k-1}, 1\right)$ имеем $\dfrac{d\alpha}{da} = \dfrac{d\alpha/d\varphi}{da/d\varphi} < 0$, значит, функция $\alpha = \alpha(a)$ строго монотонно убывает. Следовательно, для $a \geqslant 0$ точка $\left(\frac{1}{k-1}, \frac{k}{k-1}\right)$ является единственной точкой пересечения кривой кратности с границами области устойчивости. Для $a < 0$ в силу симметрии области получаем вторую точку пересечения: $\left(\frac{1}{k-1}, -\frac{k}{k-1}\right)$ при четных k и $\left(-\frac{1}{k-1}, -\frac{k}{k-1}\right)$ при нечетных k.

Таким образом, все точки, лежащие на поверхности (4.7), кроме вершин конусов, соответствуют простым корням характеристического многочлена уравнения (4.1).

Так как для общего случая $a = |a|e^{i\omega} \in \mathbb{C}$ и $b \in \mathbb{C}$, области устойчивости получаются из конуса $C_{k\omega}$ поворотом на угол $k\omega$, то доказаны следующие утверждения.

Теорема 4.4. *Для того чтобы уравнение* (4.3) *при* $a, b \in \mathbb{C}$ *было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами*

$$(\alpha \cos k\omega + \beta \sin k\omega, \beta \cos k\omega - \alpha \sin k\omega, |a|)$$

принадлежала множеству $[C_k] \setminus \left(\frac{1}{k-1}, 0, \frac{k}{k-1}\right)$.

Теорема 4.5. *Для того чтобы уравнение* (4.3) *при* $a, b \in \mathbb{C}$ *было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$ *принадлежала множеству* $[C_k] \setminus \left(\frac{\cos k\omega}{k-1}, \frac{\sin k\omega}{k-1}, \frac{k}{k-1}\right)$.

Заключение

В настоящей работе описаны аналитически и геометрически области равномерной и экспоненциальной устойчивости автономного разностного уравнения вида

$$x(n) = ax(n-1) + bx(n-k), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.8}$$

с комплексными коэффициентами a и b. Области находятся в четырехмерном действительном пространстве; для их описания один из параметров фиксируется и строится соответствующая трехмерная область, которая представляет собой «криволинейный конус». При изменении фиксируемого параметра конус вращается вокруг оси, проходящей через центр основания.

Такой подход к описанию области устойчивости был использован в работе [23], где была получена область асимптотической устойчивости уравнения (4.8). Наша статья дополняет результаты работы [23]: найдена кривая кратности корней и получены условия равномерной устойчивости, критерий устойчивости доказан проще благодаря теореме 2.1 о связности области устойчивости, а также отмечена связь описания областей устойчивости с многочленами Чебышёва. Отметим, что такая связь уже возникала при решении близких задач [28], и сегодня ясно, что при переносе использованных в настоящей работе методов исследования на уравнения более общего вида роль многочленов Чебышёва в описании областей устойчивости станет более явной.

Полученные результаты показывают, что возможности известного метода D-разбиений, который к сегодняшнему дню разработан во многих направлениях [43], далеко не исчерпаны по отношению к исследованиям скалярных динамических систем, которые в силу своей относительной простоты требуют максимально точного описания асимптотики решений, в частности, геометрических критериев обладания определенными асимптотическими свойствами. В связи с этим отметим важность информации о количестве компонент связности исследуемых областей в пространстве параметров.

Наконец, заметим, что все использованные в этой статье идеи в полной мере применимы для исследования уравнения с двумя произвольными запаздываниями.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках госзадания, номер проекта FSNM-2023-0005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Карамзин Ю. Н. Разностные уравнения. М.: Знание, 1978.
2. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. https://zbmath.org/0669.39001
3. Elaydi S. An introduction to difference equations. New York: Springer, 2005. https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5
4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. https://zbmath.org/0226.34001
5. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972. https://zbmath.org/0257.39001
6. Schur J. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1917. Vol. 1917. No. 147. P. 205–232. https://doi.org/10.1515/crll.1917.147.205
7. Schur J. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung) // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal). 1918. Vol. 1918. No. 148. P. 122–145. https://doi.org/10.1515/crll.1918.148.122
8. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Mathematische Zeitschrift. 1922. Vol. 14. No. 1. P. 110–148. https://doi.org/10.1007/BF01215894
9. Marden M. Geometry of polynomials. American Mathematical Society, 1949. https://doi.org/10.1090/surv/003
10. McNamee J. M. Numerical methods for roots of polynomials. Part I. Amsterdam: Elsevier, 2007. https://doi.org/10.1016/s1570-579x(07)x8002-9
11. McNamee J. M., Pan V. Y. Numerical methods for roots of polynomials. Part II. Amsterdam: Elsevier, 2013. https://doi.org/10.1016/c2009-0-16414-0
12. Levin S. A., May R. M. A note on difference-delay equations // Theoretical Population Biology. 1976. Vol. 9. Issue 2. P. 178–187. https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5
13. Kuruklis S. A. The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1994. Vol. 188. Issue 3. P. 719–731. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1457
14. Николаев Ю. П. Анализ геометрии D-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 2004. Вып. 12. С. 49–61. https://www.mathnet.ru/rus/at1673
15. Кипнис М. М., Нигматулин Р. М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2004. Вып. 11. С. 25–39. https://www.mathnet.ru/rus/at1657
16. Čermák J., Jánský J. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation // Applied Mathematics Letters. 2015. Vol. 43. P. 56–60. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.11.014
17. Čermák J. Stability conditions for linear delay difference equations: a survey and perspectives // Tatra Mountains Mathematical Publications. 2015. Vol. 63. No. 1. P. 1–29. https://doi.org/10.1515/tmmp-2015-0017
18. Matsunaga H. Exact stability criteria for delay differential and difference equations // Applied Mathematics Letters. 2007. Vol. 20. Issue 2. P. 183–188. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.03.012

19. Matsunaga H., Hajiri C. Exact stability sets for a linear difference system with diagonal delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2010. Vol. 369. Issue 2. P. 616–622. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.062
20. Čermák J., Jánský J., Matsunaga H. On stability and stabilization of some discrete dynamical systems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41. Issue 10. P. 3684–3695. https://doi.org/10.1002/mma.4855
21. Čermák J., Jánský J. Stability switches in linear delay difference equations // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 243. P. 755–766. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.065
22. Kaslik E. Stability results for a class of difference systems with delay // Advances in Difference Equations. 2010. Vol. 2009. No. 1. Article number: 938492. https://doi.org/10.1155/2009/938492
23. Kipnis M. M., Malygina V. V. The stability cone for a matrix delay difference equation // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2011. Vol. 2011. No. 1. 860326. https://doi.org/10.1155/2011/860326
24. Аксененко И. А. Исследование устойчивости одного разностного уравнения с комплексными коэффициентами // Прикладная математика и вопросы управления. 2023. № 1. С. 6–25. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.01
25. Čermák J., Jánský J., Nechvátal L. Exact versus discretized stability regions for a linear delay differential equation // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 347. P. 712–722. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.11.026
26. Čermák J., Jánský J., Kundrát P. On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2012. Vol. 18. Issue 11. P. 1781–1800. https://doi.org/10.1080/10236198.2011.595406
27. Čermák J., Jánský J., Tomášek P. Two types of stability conditions for linear delay difference eqations // Applicable Analysis and Discrete Mathematics. 2015. Vol. 9. Issue 1. P. 120–138. https://doi.org/10.2298/AADM141009016C
28. Кандаков А. А. Линейчатое представление областей устойчивости некоторых классов разностных уравнений // Прикладная математика и вопросы управления. 2019. № 3. С. 40–53. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2019.3.02
29. Кандаков А. А., Чудинов К. М. Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 4. С. 88–103. https://elibrary.ru/item.asp?id=32303669
30. Кандаков А. А., Чудинов К. М. Эффективные критерии экспоненциальной устойчивости автономных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123. С. 402–414. https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414
31. Мулюков М. В. Классификация двупараметрических автономных линейных систем с запаздыванием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 74–76. https://www.mathnet.ru/rus/into169
32. Мулюков М. В. Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть I // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 2019–2054. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.145
33. Мулюков М. В. Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть II // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 2055–2079. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146
34. Kapica R., Zawiski R. Conditions for asymptotic stability of first order scalar differential-difference equation with complex coefficients // arXiv:2204.08729v2 [math.DS]. 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.08729
35. Богачев В. М. Алгебраические критерии устойчивости комплексных полиномов и их применение в радиотехнике // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 7. С. 731–741. https://doi.org/10.7868/S0033849415060029

36. Čermák J., Kisela T. Delay-dependent stability switches in fractional differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 79. 104888. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104888
37. Liz E. On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 303. Issue 2. P. 492–498. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.08.048
38. Berezansky L., Braverman E., Liz E. Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2005. Vol. 11. Issue 9. P. 785–798. https://doi.org/10.1080/10236190500141050
39. Berezansky L., Braverman E. On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays // Advances in Dynamical Systems and Applications. 2006. Vol. 1. No. 1. P. 29–47. https://zbmath.org/1124.39002
40. Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949.
41. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
42. Козак А. Д., Новоселов О. Н. Асимптотическое поведение решений линейного однородного разностного уравнения второго порядка // Математические заметки. 1999. Т. 66. Вып. 2. С. 211–215. https://doi.org/10.4213/mzm1158
43. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Современное состояние метода D-разбиения // Автоматика и телемеханика. 2008. Вып. 12. С. 3–40. https://www.mathnet.ru/rus/at761

Поступила в редакцию 09.07.2024
Принята к публикации 08.01.2025

Аксененко Илья Александрович, студент магистратуры, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский просп., 29.
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-6400-7024
E-mail: ilya156@list.ru

Чудинов Кирилл Михайлович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра вычислительной математики, механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский просп., 29.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7574-793X
E-mail: cyril@list.ru

Цитирование: И. А. Аксененко, К. М. Чудинов. Об устойчивости линейных автономных разностных уравнений с комплексными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 3–26.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 3–26.

I. A. Aksenenko, K. M. Chudinov

On stability of linear autonomous difference equations with complex coefficients

Keywords: difference equation, exponential stability, uniform stability, D-decomposition

MSC2020: 39A06, 39A30

DOI: 10.35634/vm250101

We study the stability of linear autonomous scalar difference equations with complex coefficients. For an equation with an arbitrary number of delays, we propose a simple proof of the linear connectivity of the stability region in the space of coefficients. This result allows us to assert that the stability region of the equation in the space of coefficients is the region of the D-decomposition of this space containing the origin of coordinates. Further, we consider some equations with two delays and complex coefficients, for which we give detailed analytic and geometric descriptions of the regions of uniform and exponential stability.

Funding. The study was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no. FSNM-2023-0005.

REFERENCES

1. Samarskii A. A., Karamzin Yu. N. *Raznostnye uravneniya* (Difference equations), Moscow: Znanie, 1978.
2. Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu. *Difference equations and their applications*, Dordrecht: Springer, 1993. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0
3. Elaydi S. *An introduction to difference equations*, New York: Springer, 2005. https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5
4. Halanay A., Wexler D. *Teoria calitativă a sistemelor cu impulsuri* (Qualitative theory of impulse systems), Bucharest: The Academy of the Socialist Republic of Romania, 1968. https://zbmath.org/0176.05202
5. Martynyuk D. I. *Lektsii po kachestvennoi teorii raznostnykh uravnenii* (Lectures on qualitative theory of difference equations), Kiev: Naukova Dumka, 1972. https://zbmath.org/0257.39001
6. Schur J. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1917, vol. 1917, no. 147, pp. 205–232. https://doi.org/10.1515/crll.1917.147.205
7. Schur J. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung), *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1918, vol. 1918, no. 148, pp. 122–145. https://doi.org/10.1515/crll.1918.148.122
8. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise, *Mathematische Zeitschrift*, 1922, vol. 14, no. 1, pp. 110–148. https://doi.org/10.1007/BF01215894
9. Marden M. *Geometry of polynomials*, American Mathematical Society, 1949. https://doi.org/10.1090/surv/003
10. McNamee J. M. *Numerical methods for roots of polynomials. Part I*, Amsterdam: Elsevier, 2007. https://doi.org/10.1016/s1570-579x(07)x8002-9
11. McNamee J. M., Pan V. Y. *Numerical methods for roots of polynomials. Part II*, Amsterdam: Elsevier, 2013. https://doi.org/10.1016/c2009-0-16414-0
12. Levin S. A., May R. M. A note on difference-delay equations, *Theoretical Population Biology*, 1976, vol. 9, issue 2, pp. 178–187. https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5
13. Kuruklis S. A. The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1994, vol. 188, issue 3, pp. 719–731. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1457
14. Nikolaev Yu. P. The geometry of D-decomposition of a two-dimensional plane of arbitrary coefficients of the characteristic polynomial of a discrete system, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 12, pp. 1904–1914. https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000049876.54417.e6

15. Kipnis M. M., Nigmatullin R. M. Stability of the trinomial linear difference equations with two delays, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 11, pp. 1710–1723. https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000047886.46498.79
16. Čermák J., Jánský J. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation, *Applied Mathematics Letters*, 2015, vol. 43, pp. 56–60. https://doi.org/10.1016/j.aml.2014.11.014
17. Čermák J. Stability conditions for linear delay difference equations: a survey and perspectives, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 2015, vol. 63, no. 1, pp. 1–29. https://doi.org/10.1515/tmmp-2015-0017
18. Matsunaga H. Exact stability criteria for delay differential and difference equations, *Applied Mathematics Letters*, 2007, vol. 20, issue 2, pp. 183–188. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.03.012
19. Matsunaga H., Hajiri C. Exact stability sets for a linear difference system with diagonal delay, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, vol. 369, issue 2, pp. 616–622. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.03.062
20. Čermák J., Jánský J., Matsunaga H. On stability and stabilization of some discrete dynamical systems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 41, issue 10, pp. 3684–3695. https://doi.org/10.1002/mma.4855
21. Čermák J., Jánský J. Stability switches in linear delay difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 243, pp. 755–766. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.065
22. Kaslik E. Stability results for a class of difference systems with delay, *Advances in Difference Equations*, 2010, vol. 2009, no. 1, article number: 938492. https://doi.org/10.1155/2009/938492
23. Kipnis M. M., Malygina V. V. The stability cone for a matrix delay difference equation, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2011, vol. 2011, no. 1, 860326. https://doi.org/10.1155/2011/860326
24. Aksenenko I. A. Investigation of the stability of one difference equation with complex coefficients, *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2023, no. 1, pp. 6–25 (in Russian). https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.01
25. Čermák J., Jánský J., Nechvátal L. Exact versus discretized stability regions for a linear delay differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2019, vol. 347, pp. 712–722. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.11.026
26. Čermák J., Jánský J., Kundrát P. On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2012, vol. 18, issue 11, pp. 1781–1800. https://doi.org/10.1080/10236198.2011.595406
27. Čermák J., Jánský J., Tomášek P. Two types of stability conditions for linear delay difference eqations, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2015, vol. 9, issue 1, pp. 120–138. https://doi.org/10.2298/AADM141009016C
28. Kandakov A. A. Linear representation of the stability areas of some classes of difference equations, *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2019, no. 3, pp. 40–53 (in Russian). https://doi.org/10.15593/2499-9873/2019.3.02
29. Kandakov A. A., Chudinov K. M. Effective stability criterion of a discrete dynamical system, *Prikladnaya Matematika i Voprosy Upravleniya*, 2017, no. 4, pp. 88–103 (in Russian). https://elibrary.ru/item.asp?id=32303669
30. Kandakov A. A., Chudinov K. M. Effective criteria of exponential stability of autonomous difference equations, *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Seriya: Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 402–414 (in Russian). https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414
31. Mulyukov M. V. Classification of two-parameter autonomous linear systems with delay, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 724–727. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3777-1
32. Mulyukov M. V. Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part I, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 2019–2054 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.145

33. Mulyukov M. V. Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part II, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 2055–2079 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.146
34. Kapica R., Zawiski R. Conditions for asymptotic stability of first order scalar differential-difference equation with complex coefficients, *arXiv:2204.08729v2 [math.DS]*, 2022. https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.08729
35. Bogachev V. M. Algebraic stability criteria of complex polynomials and their application in radio electronics, *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2015, vol. 60, no. 7, pp. 773–783. https://doi.org/10.1134/S1064226915060029
36. Čermák J., Kisela T. Delay-dependent stability switches in fractional differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 79, 104888. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104888
37. Liz E. On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, vol. 303, issue 2, pp. 492–498. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.08.048
38. Berezansky L., Braverman E., Liz E. Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2005, vol. 11, issue 9, pp. 785–798. https://doi.org/10.1080/10236190500141050
39. Berezansky L., Braverman E. On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 29–47. https://zbmath.org/1124.39002
40. Neimark Yu. I. *Ustoichivost' linearizovannykh sistem (diskretnykh i raspredelennykh)* (Stability ol linearized systems (discrete and distributed)), Leningrad: Leningrad Red Banner Air Force Engineering Academy, 1949.
41. Neimark Yu. I. *Dinamicheskie sistemy i upravlyaemye protsessy* (Dynamical systems and controlled processes), Moscow: Nauka, 1978.
42. Kozak A. D., Novoselov O. N. Asymptotic behavior of solutions of linear homogeneous second-order difference equations, *Mathematical Notes*, 1999, vol. 66, no. 2, pp. 167–170. https://doi.org/10.1007/BF02674873
43. Gryazina E. N., Polyak B. T., Tremba A. A. *D*-decomposition technique state-of-the-art, *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 12, pp. 1991–2026. https://doi.org/10.1134/S0005117908120011

Received 09.07.2024
Accepted 08.01.2025

Il'ya Aleksandrovich Aksenenko, Master's Student, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-6400-7024
E-mail: ilya156@list.ru

Kirill Mikhailovich Chudinov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7574-793X
E-mail: cyril@list.ru

Citation: I. A. Aksenenko, K. M. Chudinov. On stability of linear autonomous difference equations with complex coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 3–26.