ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 27–46.

УДК 517.95

© *Р. В. Бризицкий, Н. Н. Максимова*

О ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДРЕЙФА–ДИФФУЗИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Исследуются вопросы единственности и устойчивости решений задач управления для модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика. Устанавливаются достаточные условия единственности и устойчивости оптимальных решений рассматриваемых экстремальных задач, а также выводятся локальные оценки их устойчивости относительно малых возмущений функционалов качества.

Ключевые слова: модель дрейфа–диффузии электронов, модель зарядки полярного неоднородного диэлектрика, задача управления, система оптимальности, единственность оптимального решения, оценки локальной устойчивости.

DOI: 10.35634/vm250102

Введение. Постановка краевой задачи

При моделирования процессов зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях часто используется диффузионно-дрейфовое приближение. С практической точки зрения это обосновано необходимостью прогнозирования состояния функциональных диэлектрических материалов при диагностике и модификации их свойств методами растровой электронной микроскопии (см. работы [1–9] и ссылки в них).

Математическая модель процесса зарядки неоднородного полярного диэлектрика может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ:

$$-\mathrm{div}\,(d\,\nabla\rho) + \mu_n \mathbf{E}\cdot\nabla\rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\beta|\rho|\rho = f \text{ в } \Omega, \tag{0.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega, \tag{0.2}$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma. \tag{0.3}$$

Здесь ρ — объемная плотность заряда, $\mathbf{E}$ — вектор-функция напряженности электрического поля, $d(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент диффузии электронов, μ_n — дрейфовая подвижность электронов, ε — диэлектрическая проницаемость материала, ε_0 — электрическая постоянная, f — генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте, $\beta(\mathbf{x}) > 0$ — нормализованный коэффициент потери заряда, $\mathbf{k}$ — тангенциальная компонента электрического поля. Ниже на задачу (0.1)–(0.3) при заданных функциях d, f, β и $\mathbf{k}$ будем ссылаться как на задачу 1.

Глобальная разрешимость и локальная единственность решения задачи 1 при $\beta = 1$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ доказана в [10]. В цитируемой работе также установлен принцип максимума для плотности заряда ρ. Далее в [11] исследованы краевые и экстремальные задачи для модели (0.1)–(0.3) с переменным коэффициентом β, но при $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ на Γ. Одним из результатов [11] является доказательство локальной единственности оптимального решения задачи распределенного управления, роль управления в которой играет функция f. Аналогичный результат для экстремальной задачи с мультипликативным управлением d, более сложный с технической точки зрения, получен в [12]. В работе [13] выведены оценки локальной устойчивости оптимальных решений задачи мультипликативного управления, роль управлений в которой играют коэффициенты d и β, относительно малых возмущений как функционала качества, так и заданной функции f. В [13] также установлено, что управление β в одной из экстремальных задач обладает свойством релейности (см. также [14]).

Разд. 1 посвящен разрешимости задачи 1, а разд. 2 — разрешимости задачи управления, роль управлений в которой играют функции f и $\mathbf{k}$, а также выводу достаточных условий ее экстремума первого рода.

В разд. 3 выводится неравенство относительно разностей решений экстремальной задачи и соответствующих им множителей Лагранжа. Данное неравенство существенно используется в разд. 4 и 5, как для вывода достаточных условий единственности и устойчивости оптимальных решений, так и для вывода оценок их локальной устойчивости относительно (малых) возмущений функционалов качества.

В разд. 4, как и в [13], выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений экстремальной задачи с распределенным управлением f и граничным управлением $\mathbf{k}$ относительно малых возмущений конкретного функционала качества, зависящего от электрического поля $\mathbf{E}$.

В свою очередь, разд. 5 близок к более ранним работам по исследованию задач управления (см., например, [15, 16], монографию [17] и ссылки в ней). Особенностью [15, 16] является доказательство локальной единственность оптимальных решений задач управления без использования регуляризации. Последнее возможно за счет использования коэрцитивных функционалов качества и соответствующих им управлений. Отметим, что в рамках такого подхода минимизируется только функционал качества (на что и направлено управление), а не его сумма с регуляризирующими слагаемыми. Однако без использования регуляризации не удается вывести оценки локальной устойчивости оптимальных решений, как и доказать локальную единственность решений задач мультипликативного управления.

Из близких работ отметим статьи [18,19] по исследованию диффузионных моделей с переменными коэффициентами, а также статьи [20–23], посвященные моделям гидродинамики, обобщающим приближение Буссинеска.

§ 1. Разрешимость краевой задачи

При анализе краевой задачи будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}, |\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Omega$.

Введем функциональные пространства

$$H^1(\Delta,\Omega) = \big\{h \in H^1(\Omega)\colon \Delta h \in L^2(\Omega)\big\}, \quad \widetilde{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)^3 \cap \ker(\mathrm{rot}),$$
$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \big\{\mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3\colon \mathrm{rot}\,\mathbf{h} \in L^2(\Omega)^3\big\},$$
$$H^s_T(\Gamma) = \big\{\mathbf{w} \in H^s(\Gamma)^3\colon \mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma\big\}, \quad H^{-s}_T(\Gamma) \equiv H^s_T(\Gamma)^*, \quad s \geqslant 0,$$

функциональные множества $L^p_{d_0}(\Omega) = \big\{h \in L^p(\Omega)\colon h \geqslant d_0 > 0 \text{ п. в. в } \Omega\big\}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $H^s_{d_0}(\Omega) = \big\{h \in H^s(\Omega)\colon h \geqslant d_0 > 0 \text{ п. в. в } \Omega\big\}$, $s \geqslant 0$, где d_0 — положительная константа, и произведение пространств $X = H^1_0(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Для описания пространства, которому принадлежит след тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ потребуется определение *поверхностной дивергенции* (см. [17] и ссылки там). Каждой функции $u \in H^2(\Omega)$ при $\Gamma \in C^{1,1}$ можно поставить тангенциальное векторное поле $\nabla u|_\Gamma \times \mathbf{n} \in H^{1/2}_T(\Gamma)$. Пусть теперь $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$ — произвольная функция, для которой определим функцию $u \equiv u_\varphi \in H^2(\Omega)$ такую, что $u|_\Gamma = \varphi$, и поставим в соответствие функции u вектор $\nabla u_\varphi|_\Gamma \times \mathbf{n}$. Для областей с границей $\Gamma \in C^{1,1}$ так построенный вектор не зависит от выбора функции $u = u_\varphi$. Поэтому данная процедура определяет линейный непрерывный оператор *поверхностного градиента*. Поставим в соответствие данному оператору сопряженный оператор *поверхностной дивергенции* $\mathrm{div}_\Gamma\colon H_T^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-3/2}(\Gamma) \equiv H^{3/2}(\Gamma)^*$, действующий по формуле

$$\langle \mathrm{div}_\Gamma \mathbf{h}, \varphi\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{3/2}(\Gamma)} = -\langle \mathbf{h}, \nabla_\Gamma \varphi\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Для граничной функции $\mathbf{k}$ из (0.3) введем функциональное пространство

$$H_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma) = \big\{\mathbf{w} \in H_T^{-1/2}(\Gamma)\colon \mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{w} \in H^{-1/2}(\Gamma)\big\},$$

наделенное нормой $\|\mathbf{w}\|^2_{-1/2,\mathrm{div}_\Gamma} = \|\mathbf{w}\|^2_{-1/2,\Gamma} + \|\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{w}\|^2_{-1/2,\Gamma}$, и его подпространство:

$$\widetilde{H}_T^s(\Gamma) = \big\{\mathbf{w} \in H_T^s(\Gamma)\colon \mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{w} = 0\big\}, \quad s \in [-1/2, 1/2].$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{1,1}$;

(ii) $f \in L^2(\Omega)$, $d \in H^s_{d_0}(\Omega)$, $s > 3/2$;

(iii) $\beta \in L^4_{\beta_0}(\Omega)$, $\beta_0 \geqslant 1/2$;

(iv) $\mathbf{k} \in \widetilde{H}_T^{1/2}(\Gamma)$.

Напомним, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leqslant 6$, компактно при $s < 6$, и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leqslant C_s\|h\|_{1,\Omega} \quad \forall\, h \in H^1(\Omega). \tag{1.1}$$

При $s = 2$ мы полагаем $C_2 = 1$.

Справедлива следующая техническая лемма (см. [10, 17]).

Лемма 1.1. *При выполнении условий* (i), $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$, *существуют положительные константы* C_0, δ_1, γ_1' *и* γ_1, *зависящие, соответственно, от* Ω, *такие, что*

$$|(\nabla h, \nabla\eta)| \leqslant C_0\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$
$$|(\mathbf{E}\cdot\nabla h, \eta)| \leqslant \gamma_1'\|\mathbf{E}\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \leqslant \gamma_1\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \quad \forall\, h,\eta \in H^1(\Omega),$$
$$(\nabla h, \nabla h) \geqslant \delta_1\|h\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\, h \in H^1_0(\Omega).$$

Если функции $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ *и* $\rho \in H^1_0(\Omega)$ *связаны вторым соотношением в* (0.2), *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, h) = -(\nabla h\cdot\mathbf{E}, \rho) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(h, \rho^2) \quad \forall\, h \in H^1_0(\Omega),$$

принимающее при $h = \rho$ *следующий вид:*

$$\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \rho) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \rho^2).$$

Также важную роль играет следующая лемма (см. [17, с. 291]).

Лемма 1.2. *При выполнении условия* (i) *для любых функций* $\sigma \in L^2(\Omega)$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ *существует единственное решение* $\mathbf{E} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ *задачи*

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \sigma \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma,$$

для которого справедлива оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant C_N(\|\sigma\|_\Omega + \|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}),$$

где C_N *— положительная константа, зависящая от* Ω.

Пусть $\big(\rho,\mathbf{E}\big) \in \big(C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})\big)\times\big(C^1(\Omega)^3\cap\widetilde{H}^1(\Omega)\big)$ — классическое решение задачи 1. Умножим уравнение в (0.1) на функцию $h \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулы Грина. Приходим к слабой формулировке задачи 1:

$$(d\nabla\rho,\nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho|\rho, h) = (f,h) \quad \forall\, h \in H^1_0(\Omega), \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma. \tag{1.3}$$

Справедлива следующая теорема (см. [10, 11]).

Теорема 1.1. *При выполнении условий* (i)–(iv) *существует слабое решение* $(\rho,\mathbf{E}) \in X$ *задачи* 1 *и справедливы оценки*

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant C_*\|f\|_\Omega, \quad C_* = (d_0\delta_1)^{-1}, \qquad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant C_N\left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*\|f\|_\Omega + \|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}\right). \tag{1.4}$$

Если, к тому же, выполняется условие

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\gamma_1 C_N + C_4^3\|\beta\|_{L^4(\Omega)}\big)\|f\|_\Omega < \lambda_*^2, \quad \lambda_* = d_0\delta_1,$$

то слабое решение задачи 1 *единственно.*

Замечание 1.1. Доказательство теоремы 1.1 полностью идентично доказательству аналогичных теорем о разрешимости краевых задач из [10, 11]. Единственным отличием является априорная оценка (1.4) для электрического поля $\mathbf{E}$ из-за неоднородного граничного условия: $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}$.

§ 2. Задача управления и система оптимальности

В данном разделе исследуется задача управления на слабых решениях задачи 1 с распределенным управлением f и граничным управлением $\mathbf{k}$.

Будем считать, что функции f и $\mathbf{k}$ могут изменяться, соответственно, во множествах K_1 и K_2, удовлетворяющих условию:

(j) $K_1 \subset L^2(\Omega)$, $K_2 \subset \widetilde{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ — непустые выпуклые замкнутые множества.

Введем функциональные пространства $X = H^1_0(\Omega)\times\widetilde{H}^1(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H^{1/2}_T(\Gamma)$ и положим $\mathbf{x} = (\rho,\mathbf{E}) \in X$, $u = (f,\mathbf{k}) \in K$, где $K = K_1\times K_2$. Далее введем оператор $F = (F_1,F_2,F_3)\colon X\times K \to Y$ по формулам

$$\langle F_1(\mathbf{x},u),h\rangle = (d\,\nabla\rho,\nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho,h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho|\rho,h) - (f,h) \quad \forall\, h \in H^1_0(\Omega),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega, \qquad F_3(\mathbf{x},u) = \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma - \mathbf{k} \text{ в } H^{1/2}_T(\Gamma),$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\mathbf{x}, u) = 0$.

Пусть $I\colon X \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$J(\mathbf{x}, u) \equiv \frac{1}{2}I(\mathbf{x}) + \frac{\nu_1}{2}\|f\|^2_{\Omega} + \frac{\nu_2}{2}\|\mathbf{k}\|^2_{1/2,\Gamma} \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \tag{2.1}$$

Через $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, u) \in X \times K\colon F(\mathbf{x}, u) = 0,\ J(\mathbf{x}, u) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (2.1).

Пусть, в дополнение к (j), выполняется следующие условие:

(jj) $\nu_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, множество K ограничено или $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$\begin{aligned} I_1(\rho) &= \|\rho - \rho^d\|^2_Q, &\quad I_2(\rho) &= \|\rho - \rho^d\|^2_{1,\Omega}, \\ I_3(\mathbf{E}) &= \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|^2_Q, &\quad I_4(\mathbf{E}) &= \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|^2_{1,\Omega}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\rho^d \in L^2(Q)$ (или $\rho^d \in H^1(\Omega)$) обозначает заданное поле концентрации в подобласти $Q \subset \Omega$ (или в Ω). Функция $\mathbf{E}^d \in L^2(Q)^3$ (или $\mathbf{E}^d \in H^1(\Omega)^3$) имеет аналогичный смысл для электрического поля.

Из результатов [11] вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv) *и* (j), (jj), *функционал* $I\colon X \to \mathbb{R}$ *слабо полунеперрывен снизу и* $Z_{ad} \neq \emptyset$. *Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\mathbf{x}, u) \in \in X \times K$ *задачи управления* (2.1).

Замечание 2.1. Ясно, что все функционалы качества из (2.2) удовлетворяют условиям теоремы 2.1.

Далее для задачи (2.1) получим систему оптимальности, которая играет ключевую роль при выводе оценок устойчивости оптимальных решений указанной задачи управления.

Через

$$X^* = H^{-1}(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega)^*, \quad Y^* = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^{-1/2}_T(\Gamma)$$

обозначим пространства, двойственные к пространствам X и Y.

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F\colon X \times K \to Y$ по состоянию $\mathbf{x}$ в любой точке $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u}) = (\widehat{\rho}, \widehat{\mathbf{E}}, \widehat{f}, \widehat{\mathbf{k}})$ является линейным непрерывным оператором $F'_{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})\colon X \to Y$, который каждому элементу $(\tau, \mathbf{e}) \in X$ ставит в соответствие элемент

$$F'_{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})(\tau, \mathbf{e}) = (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3) \in Y.$$

Здесь $\widehat{y}_1 \in H^{-1}(\Omega)$, $\widehat{y}_2 \in L^2_0(\Omega)$ и $\widehat{y}_3 \in H^{1/2}_T(\Gamma)$ определяются по паре $(\widehat{\rho}, \widehat{\mathbf{E}})$ и $(\tau, \mathbf{e})$ с помощью следующих соотношений:

$$\langle \widehat{y}_1, (\tau, \mathbf{e})\rangle = (d\,\nabla\tau, \nabla h) + \mu_n(\widehat{\mathbf{E}} \cdot \nabla\tau, h) + \mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\widehat{\rho}, h) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\widehat{\rho}|\tau, h),$$
$$\widehat{y}_2 = \operatorname{div}\mathbf{e} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\tau, \quad \widehat{y}_3 = \mathbf{e} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} \quad \forall\,(\tau, \mathbf{e}) \in X.$$

Через $F'_{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})^*\colon Y^* \to X^*$ обозначим сопряженный к $F'_{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [24]), введем элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma, \zeta) \in Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_T^{-1/2}(\Gamma)$, на который будем ссылаться как на сопряженное состояние, и введем Лагранжиан $\mathcal{L}\colon X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u)\rangle_{Y^* \times Y} \equiv$$
$$\equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle F_1(\mathbf{x}, u), \theta\rangle + (F_2(\mathbf{x}), \sigma) + \langle \zeta, F_3(\mathbf{x}, u)\rangle_\Gamma.$$

По схеме, предложенной в [11] и [12], доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv) *и* (j), (jj) *и элемент* $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u}) \in X \times K$ *является точкой локального минимума для задачи* (2.1). *Предположим, что функционал качества* $I\colon X \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию* $\mathbf{x}$ *в точке* $\widehat{\mathbf{x}}$. *Тогда:*

(1) *существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \sigma, \zeta) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, *с которым выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа* $F'_{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})^* \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})$ *в* X^*, *эквивалентное соотношениям*

$$(d\,\nabla\tau, \nabla\theta) + \mu_n(\widehat{\mathbf{E}} \cdot \nabla\tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\widehat{\rho}|\tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma) = = -\lambda_0 \frac{1}{2}\langle I'_\rho(\widehat{\mathbf{x}}), \tau\rangle \quad \forall\, \tau \in H_0^1(\Omega), \tag{2.3}$$

$$\mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\widehat{\rho}, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma) + \langle \zeta, \mathbf{e} \times \mathbf{n}\rangle_\Gamma = -\lambda_0 \frac{1}{2}\langle I'_{\mathbf{E}}(\widehat{\mathbf{x}}), \mathbf{e}\rangle \quad \forall\, \mathbf{e} \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{2.4}$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leqslant \mathcal{L}(\widehat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ *для всех* $u \in K$, *эквивалентный неравенствам*

$$\lambda_0\nu_1\big(\widehat{f}, f - \widehat{f}\,\big) - \big(f - \widehat{f}, \theta\big) \geqslant 0 \quad \forall\, f \in K_1, \tag{2.5}$$
$$\lambda_0\nu_2\big\langle \widehat{\mathbf{k}}, \mathbf{k} - \widehat{\mathbf{k}}\,\big\rangle_{1/2,\Gamma} - \big\langle \zeta, \mathbf{k} - \widehat{\mathbf{k}}\,\big\rangle_\Gamma \geqslant 0 \quad \forall\, \mathbf{k} \in K_2; \tag{2.6}$$

(2) *если, к тому же, выполняется условие*

$$\frac{\gamma_1\mu_n C_N}{\varepsilon\varepsilon_0}\|f\|_\Omega \leqslant \lambda_*^2,$$

то любой нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, *удовлетворяющий* (2.3)–(2.6), *является регулярным, то есть имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$, *и определяется единственным образом по заданной паре* $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})$.

§ 3. Основное свойство системы оптимальности

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1) = (\rho_1, \mathbf{E}_1, f_1, \mathbf{k}_1) \in X \times K$ решение задачи (2.1). Через $(\mathbf{x}_2, u_2) = (\rho_2, \mathbf{E}_2, f_2, \mathbf{k}_2) \in X \times K$ обозначим решение задачи

$$\widetilde{J}(\mathbf{x}, u) = \frac{1}{2}\widetilde{I}(\mathbf{x}) + \frac{\nu_1}{2}\|f\|^2_\Omega + \frac{\nu_2}{2}\|\mathbf{k}\|^2_{1/2,\Gamma} \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \tag{3.1}$$

Она получается из (2.1) заменой функционала $I\colon X \to \mathbb{R}$ другим функционалом $\widetilde{I}\colon X \to \mathbb{R}$. Считая множество K ограниченным, а функционалы $I(\mathbf{x})$ и $\widetilde{I}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемыми на X, выведем одно важное для дальнейшего анализа неравенство для разности решений задач (2.1) и (3.1). Напомним, что в силу теоремы 1.1 справедливы следующие оценки для ρ_i и $\mathbf{E}_i$:

$$
\begin{gathered}
\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant M_\rho \equiv \sup_{u\in K} C_*\|f\|_\Omega, \\
\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant M_{\mathbf{E}} \equiv \sup_{u\in K} C_N\left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*\|f\|_\Omega + \|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}\right), \quad C_* = \lambda_*^{-1}.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Ясно, что $M_\rho < \infty$ и $M_{\mathbf{E}} < \infty$ в случае, когда множество K ограничено.

Предполагая, что выполняются условия теоремы 2.2, запишем (2.3), (2.4) при $\lambda_0 = 1$ для $(\mathbf{x}_i, u_i) = (\rho_i, \mathbf{E}_i, f_i, \mathbf{k}_i)$ и отвечающих им множителей Лагранжа $(\theta_i, \sigma_i, \zeta_i)$. Будем иметь

$$
\begin{gathered}
(d\,\nabla\tau, \nabla\theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i\cdot\nabla\tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_i|\tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma_i) = \\
= -\frac{1}{2}\,\langle I'_\rho(\mathbf{x}_i), \tau\rangle \quad \forall\,\tau\in H_0^1(\Omega),
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

$$
\mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma_i) + \langle\zeta_i, \mathbf{e}\times\mathbf{n}\rangle_\Gamma = -\frac{1}{2}\,\langle I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_i), \mathbf{e}\rangle \quad \forall\,\mathbf{e}\in\widetilde{H}^1(\Omega). \tag{3.4}
$$

Положим

$$
\begin{gathered}
\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad f = f_1 - f_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \\
\theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \sigma = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2.
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

Вычтем уравнения (1.2), (1.3), записанные при $(\mathbf{x}_2, u_2) = (\rho_2, \mathbf{E}_2, f_2, \mathbf{k}_2)$, из уравнений (1.2), (1.3) для $(\mathbf{x}_1, u_1) = (\rho_1, \mathbf{E}_1, f_1, \mathbf{k}_1)$. С учетом обозначений (3.5) получаем

$$
\begin{gathered}
(d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, h) = \\
= -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, h) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, h) + (f, h) \quad \forall\,h\in H_0^1(\Omega),
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

$$
\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma. \tag{3.7}
$$

Далее вычтем уравнения (3.3), (3.4) при $(\mathbf{x}_2, u_2, \theta_2, \sigma_2, \zeta_2)$ из уравнений (3.3), (3.4) при $(\mathbf{x}_1, u_1, \theta_1, \sigma_1, \zeta_1)$. Будем иметь

$$
\begin{gathered}
(d\,\nabla\tau, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma) = \\
= -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\tau, \theta_2\big) - \frac{1}{2}\langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \tau\rangle \quad \forall\,\tau\in H_0^1(\Omega),
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho_2, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma) + \langle\zeta, \mathbf{e}\times\mathbf{n}\rangle_\Gamma = \\
= -\frac{1}{2}\langle I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) - I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2), \mathbf{e}\rangle \quad \forall\,\mathbf{e}\in\widetilde{H}^1(\Omega).
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

Положим $h = \theta$ в (3.6). Далее, первое равенство в (3.7) умножим на $\sigma\in L^2(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω. Приходим к соотношениям

$$
\begin{gathered}
(d\,\nabla\rho, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\rho, \theta) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, \theta) = \\
= -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) + (f, \theta),
\end{gathered} \tag{3.10}
$$

$$
(\operatorname{div}\mathbf{E}, \sigma) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma). \tag{3.11}
$$

Полагая $\tau = \rho$ в (3.8) и $\mathbf{e} = \mathbf{E}$ в (3.9), будем иметь

$$
\begin{gathered}
(d\,\nabla\rho, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \theta\big) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) = \\
= -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) - \frac{1}{2}\langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho\rangle,
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

$$
\begin{gathered}
\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{E}, \sigma) + \langle\zeta, \mathbf{E}\times\mathbf{n}\rangle_\Gamma = \\
= -\frac{1}{2}\langle I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) - I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E}\rangle.
\end{gathered} \tag{3.13}
$$

Вычитая (3.10) из (3.12) и подставляя (3.11) в (3.13), с учетом второго равенства в (3.7), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \theta\big) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) = \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, \theta) - \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_2) + \\
+ \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) - (f, \theta) - \frac{1}{2}\langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho\rangle, \\
\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, \theta) + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) + \langle\zeta, \mathbf{k}\rangle_\Gamma = -\frac{1}{2}\langle I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) - I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E}\rangle.
\end{gathered}
$$

Сложив полученные соотношения, будем иметь

$$
\begin{gathered}
\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \theta\big) + \langle\mathbf{k}, \zeta\rangle_\Gamma = -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_1 + \theta_2) + \\
+ \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) - (f, \theta) - \\
- \frac{1}{2}\langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho\rangle - \frac{1}{2}\langle I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) - I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E}\rangle.
\end{gathered} \tag{3.14}
$$

Положим $f = f_1$ в неравенстве (2.5) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для (f_2, θ_2), и положим $f = f_2$ в (2.5) при (f_1, θ_1). Будем иметь

$$
\nu_1(f_2, f) - (f, \theta_2) \geqslant 0, \quad -\nu_1(f_1, f) + (f, \theta_1) \geqslant 0.
$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке:

$$
(f, \theta) \geqslant \nu_1\|f\|^2_\Omega. \tag{3.15}
$$

Положим $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$ в неравенстве (2.6) (при $\lambda_0 = 1$), записанном для $(\mathbf{k}_2, \zeta_2)$, и положим $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2$ в (2.6) при $(\mathbf{k}_1, \zeta_1)$. Будем иметь

$$
\nu_2\big\langle\mathbf{k}_2, \mathbf{k}\big\rangle_{1/2,\Gamma} - \big\langle\zeta_2, \mathbf{k}\big\rangle_\Gamma \geqslant 0, \quad -\nu_2\big\langle\mathbf{k}_1, \mathbf{k}\big\rangle_{1/2,\Gamma} + \big\langle\zeta_1, \mathbf{k}\big\rangle_\Gamma \geqslant 0.
$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке:

$$
\big\langle\zeta, \mathbf{k}\big\rangle_\Gamma \geqslant \nu_2\|\mathbf{k}\|^2_{1/2,\Gamma}. \tag{3.16}
$$

Тогда из (3.14) с учетом (3.15) и (3.16) получаем основное неравенство относительно разностей состояний и управлений:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\langle I'_\rho(\mathbf{x}_1) - I'_\rho(\mathbf{x}_2), \rho\rangle + \frac{1}{2}\langle I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) - I'_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2), \mathbf{E}\rangle + \nu_1\|f\|^2_\Omega + \nu_2\|\mathbf{k}\|^2_{1/2,\Gamma} \leqslant \\
\leqslant -\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \theta\big) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \\
- \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) - \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \theta_1 + \theta_2).
\end{gathered} \tag{3.17}
$$

В заключение данного раздела получим оценку норм разностей состояний ρ и $\mathbf{E}$ через нормы разностей управлений f и $\mathbf{k}$.

Из (3.7) в силу леммы 1.2 вытекает оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant C_N\left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\rho\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}\right). \tag{3.18}$$

Полагая $h = \rho$ в (3.6), получим

$$\begin{aligned}(d\,\nabla\rho, \nabla\rho) + \mu_n(\mathbf{E}_1\cdot\nabla\rho, \rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \rho\big) =\\ = -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \rho\big) + (f, \rho).\end{aligned} \tag{3.19}$$

С учетом (3.18) при выполнении условия

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\gamma_1 C_N + C_4^3\|\beta\|_{L_4(\Omega)}\big)M_\rho \leqslant \frac{\lambda_*}{2} \tag{3.20}$$

из неравенства

$$\begin{aligned}\lambda_*\|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leqslant \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\gamma_1 C_N + C_4^3\|\beta\|_{L_4(\Omega)}\big)M_\rho\|\rho\|_{1,\Omega}^2 +\\ + \mu_n\gamma_1 C_N M_\rho\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}\|\rho\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega\|\rho\|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

приходим к следующей оценке:

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant 2C_*\big(a\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\big), \quad a = \mu_n\gamma_1 C_N M_\rho. \tag{3.21}$$

С учетом (3.21) оценка (3.18) примет вид

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}C_N C_*\left(\left(a + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\right)\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\right). \tag{3.22}$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть в дополнение к условиям* (i) *и* (j) $K \subset L^2(\Omega) \times \widetilde{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ *— ограниченное множество, и пусть пары* $(\mathbf{x}_1, u_1) \in X \times K$ *и* $(\mathbf{x}_2, u_2) \in X \times K$ *являются решениями соответственно задач* (2.1) *и* (3.1). *Пусть далее* $(\theta_i, \sigma_i, \zeta_i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_T^{-1/2}(\Gamma)$ *— множители Лагранжа, отвечающие решениям* $(\mathbf{x}_i, u_i), i = 1, 2$, *и пусть функционалы* I *и* $\widetilde{I}$ *непрерывно дифференцируемы по* $\mathbf{x}$. *Тогда для разностей* $\rho, \mathbf{E}, f, \mathbf{k}, \theta, \sigma$ *и* ζ, *введенных в* (3.5), *при выполнении условия* (3.20) *справедливы оценки* (3.21), (3.22) *и выполняется неравенство* (3.17).

§ 4. Оценки локальной устойчивости оптимальных решений

Основываясь на лемме 3.1, установим достаточные условия единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач. Начнем с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_3(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_Q^2$:

$$J(\mathbf{E}, u) = \frac{1}{2}I_3(\mathbf{E}) + \frac{\nu_1}{2}\|f\|_\Omega^2 + \frac{\nu_2}{2}\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \tag{4.1}$$

Обозначим через $(\mathbf{x}_1, u_1)$ решение задачи (4.1), отвечающее заданной функции $\mathbf{E}^d = \mathbf{E}_1^d \in L^2(\Omega)^3$, через $(\mathbf{x}_2, u_2)$ — решение задачи (4.1), отвечающее возмущенной функции $\widetilde{\mathbf{E}}^d = \mathbf{E}_2^d \in L^2(\Omega)^3$. Полагая $\mathbf{E}^d = \mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d$, в дополнение к (3.5), имеем в силу (2.2), что

$$\langle I_3'(\mathbf{E}_i), \mathbf{e}\rangle = 2(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^d, \mathbf{e})_Q, \quad \langle I_3'(\mathbf{E}_1) - I_3'(\mathbf{E}_2), \mathbf{e}\rangle = 2\big((\mathbf{E}, \mathbf{e})_Q - (\mathbf{E}^d, \mathbf{e})_Q\big), \quad i = 1, 2. \tag{4.2}$$

В силу (4.2) равенства (3.3), (3.4) для множителей Лагранжа $(\theta_i, \sigma_i, \zeta_i) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_T^{-1/2}(\Gamma)$, отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i, u_i)$, $i = 1, 2$, принимают вид

$$(d\,\nabla\tau, \nabla\theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla\tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_i|\tau, \theta_i\big) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma_i) = 0 \quad \forall\,\tau \in H_0^1(\Omega), \tag{4.3}$$

$$\mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma_i) + \langle\zeta_i, \mathbf{e} \times \mathbf{n}\rangle_\Gamma = -(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^d, \mathbf{e})_Q \quad \forall\,\mathbf{e} \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{4.4}$$

В (3.8), (3.9) подставим производную Фреше от конкретного функционала качества и запишем эти соотношения в виде уравнения относительно разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$:

$$\begin{aligned}&(d\,\nabla\tau, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma) = \\ &= -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\tau, \theta_2\big) \quad \forall\,\tau \in H_0^1(\Omega),\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&\mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\rho_2, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma) + \langle\zeta, \mathbf{e} \times \mathbf{n}\rangle_\Gamma = \\ &\qquad = -(\mathbf{E} - \mathbf{E}^d, \mathbf{e}) \quad \forall\,\mathbf{e} \in \widetilde{H}^1(\Omega).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Наконец, (3.17) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}&\big(\|\mathbf{E}\|_Q^2 - (\mathbf{E}^d, \mathbf{E})_Q\big) + \nu_1\|f\|_\Omega^2 + \nu_2\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 \leqslant \\ &\leqslant -\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, \theta) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \\ &- \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_1 + \theta_2).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Получим оценки множителей Лагранжа θ_i и σ_i. Полагая в (4.3) $\tau = \theta_i$, получаем

$$(d\,\nabla\theta_i, \nabla\theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla\theta_i, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_i|\theta_i, \theta_i) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\theta_i, \sigma_i),$$

откуда приходим к неравенству

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{C_*}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\sigma_i\|_\Omega, \quad i = 1, 2. \tag{4.8}$$

В силу (3.2) и оценок $\|\mathbf{E}_i\|_Q \leqslant \|\mathbf{E}_i\|_{1,\Omega}$, $\|\mathbf{e}\|_Q \leqslant \|\mathbf{e}\|_{1,\Omega}$ имеем

$$|(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^d, \mathbf{e})_Q| \leqslant M_{\mathbf{E}}^0\|\mathbf{e}\|_{1,\Omega} \quad \forall\,\mathbf{e} \in \widetilde{H}^1(\Omega), \qquad M_{\mathbf{E}}^0 \equiv M_{\mathbf{E}} + \max\big(\|\mathbf{E}_1^d\|_Q, \|\mathbf{E}_2^d\|_Q\big).$$

Согласно лемме 1.2 существуют функции $\widetilde{\mathbf{e}}_i$ такие, что $\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{e}}_i = \sigma_i$, $\widetilde{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ и $\|\widetilde{\mathbf{e}}_i\|_{1,\Omega} \leqslant C_N\|\sigma_i\|_\Omega$, $i = 1, 2$. Полагая $\mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{e}}_i$ в (4.4), получаем

$$\mu_n(\widetilde{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla\rho_i, \theta_i) + (\sigma_i, \sigma_i) = -(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_i^d, \widetilde{\mathbf{e}}_i)_Q.$$

Отсюда, с учетом лемм 1.1 и 1.2 и оценки (4.8), приходим к неравенству

$$\|\sigma_i\|_\Omega^2 \leqslant C_*\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1 M_\rho C_N\|\sigma_i\|_\Omega^2 + M_{\mathbf{E}}^0 C_N\|\sigma_i\|_\Omega.$$

Тогда при выполнении условия

$$\frac{\mu_n\gamma_1 C_N}{\varepsilon\varepsilon_0}M_\rho \leqslant \frac{\lambda_*}{2} \tag{4.9}$$

получаем оценку для σ_i:

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leqslant M_\sigma, \quad M_\sigma \equiv 2M^0_{\mathbf{E}}C_N, \quad i=1,2. \tag{4.10}$$

С учетом (4.10) из (4.8) приходим к оценке для θ_i:

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leqslant M_\theta, \quad M_\theta \equiv 2\frac{C_*}{\varepsilon\varepsilon_0}M^0_{\mathbf{E}}C_N, \quad i=1,2. \tag{4.11}$$

Получим далее оценки норм разностей $\theta=\theta_1-\theta_2$ и $\sigma=\sigma_1-\sigma_2$. Из (4.5) при $\tau=\theta$, применяя неравенство Гёльдера и оценки леммы 1.1, приходим к нервенству

$$\lambda_*\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\sigma\|_\Omega + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta M_\theta\|\rho\|_{1,\Omega} + \mu_n\gamma_1M_\theta\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}. \tag{4.12}$$

С учетом оценок (3.21), (3.22) неравенство (4.12) принимает следующий вид

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{C_*}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\sigma\|_\Omega + \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta M_\theta C_*^2\big(a\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}+\|f\|_\Omega\big) + \\ + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1M_\theta C_NC_*^2\bigg(\Big(a+\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\Big)\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}+\|f\|_\Omega\bigg).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Рассуждая, как при выводе (4.10), из (4.6) с учетом (4.11) и (4.12) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_\Omega \leqslant \mu_n\gamma_1M_\rho C_N\|\theta\|_{1,\Omega} + \mu_n\gamma_1M_\theta C_N\|\rho\|_{1,\Omega} + C_N\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + C_N\|\mathbf{E}^d\|_Q \leqslant \\ \leqslant C_*\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1M_\rho C_N\|\sigma\|_\Omega + \mu_n\gamma_1C_NM_\theta\Big(\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3M_\rho M_\beta C_*+1\Big)\|\rho\|_{1,\Omega} + \\ + C_N\big(\mu_n^2\gamma_1^2M_\rho M_\theta C_*+1\big)\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + C_N\|\mathbf{E}^d\|_Q.\end{aligned} \tag{4.14}$$

При выполнении условия (4.9) из (4.14) выводим оценку для разности σ:

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_\Omega \leqslant 2C_N\bigg(\mu_n\gamma_1M_\theta\Big(\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3M_\rho M_\beta C_*+1\Big)\|\rho\|_{1,\Omega} + \\ + \big(\mu_n^2\gamma_1^2M_\rho M_\theta C_*+1\big)\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{E}^d\|_Q\bigg),\end{aligned}$$

которая с учетом (3.21) и (3.22) принимает вид

$$\|\sigma\|_\Omega \leqslant 2C_N\big(\kappa_1\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}+\kappa_2\|f\|_\Omega+\|\mathbf{E}^d\|_Q\big), \tag{4.15}$$

$$\kappa_1 = 2aC_*\mu_n\gamma_1M_\theta\Big(\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3M_\rho M_\beta C_*+1\Big) + \frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}C_NC_*\Big(a+\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\Big)\big(\mu_n^2\gamma_1^2M_\rho M_\theta C_*+1\big),$$

$$\kappa_2 = 2C_*\mu_n\gamma_1M_\theta\Big(\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3M_\rho M_\beta C_*+1\Big) + \frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}C_NC_*\big(\mu_n^2\gamma_1^2M_\rho M_\theta C_*+1\big).$$

С учетом (4.15) из (4.13) получаем оценку для разности θ:

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant 2C_*\big(\alpha_1\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}+\alpha_2\|f\|_\Omega+\alpha_3\|\mathbf{E}^d\|_Q\big), \tag{4.16}$$

$$\alpha_1 = \frac{C_N}{\varepsilon\varepsilon_0}\kappa_1 + 2a\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta M_\theta C_* + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1M_\theta C_NC_*\Big(a+\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\Big),$$

$$\alpha_2 = \frac{C_N}{\varepsilon\varepsilon_0}\kappa_2 + 2\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta M_\theta C_* + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\gamma_1M_\theta C_NC_*, \quad \alpha_3 = \frac{C_N}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Наконец, учитывая (1.1) и неравенство Юнга $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$), с помощью полученных выше неравенств (3.21), (3.22), (4.15) и (4.16) последовательно оценим слагаемые в правой части (4.7):

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}|(\beta|\rho_1|\rho,\theta)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\rho\big(a\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\big)\big(\alpha_1\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \alpha_2\|f\|_\Omega + \alpha_3\|\mathbf{E}^d\|_Q\big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\rho\Big[\big(a\alpha_1 + a^2 + 0.5\alpha_1^2\big)\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \big(0.5\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1\big)\|f\|_\Omega^2 + \alpha_3^2\|\mathbf{E}^d\|_Q^2\Big],$$

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big|(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2,\theta)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\rho\big(a\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\big)\big(\alpha_1\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \alpha_2\|f\|_\Omega + \alpha_3\|\mathbf{E}^d\|_Q\big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\rho\Big[\big(a\alpha_1 + a^2 + 0.5\alpha_1^2\big)\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \big(0.5\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1\big)\|f\|_\Omega^2 + \alpha_3^2\|\mathbf{E}^d\|_Q^2\Big],$$

$$\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big|(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho,\theta_2)\big| \leqslant \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\theta\big(a\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\theta\big[2a^2\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 + 2\|f\|_\Omega^2\big],$$

$$\mu_n|(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho,\theta_1+\theta_2)| \leqslant 2\,\mu_n\gamma_1 M_\theta\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*^2C_N\gamma_1M_\theta\big(a\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\big)\left(\left(a + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\right)\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} + \|f\|_\Omega\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*^2C_N\gamma_1M_\theta\left[\left(3a^2 + \frac{3a\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*} + 0.5\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\right)^2\right)\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 + 1.5\|f\|_\Omega^2\right]. \quad (4.17)$$

Используя (4.17), выводим оценку для правой части (4.7):

$$\begin{gathered}\Big|-\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho,\theta\big) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2,\theta\big) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho,\theta_2\big) - \\ - \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho,\theta_1+\theta_2)\Big| \leqslant \big(\omega_1^2\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \omega_2^2\|f\|_\Omega^2 + \omega_3^2\|\mathbf{E}^d\|_Q^2\big).\end{gathered} \quad (4.18)$$

Здесь положительные константы ω_i, $i = 1,2,3$, определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered}\omega_1^2 = \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*^2\Big[C_4^3C_\beta\Big(M_\rho\big(a\alpha_1 + a^2 + 0.5\alpha_1^2\big) + 2a^2M_\theta\Big) + \\ + C_N\gamma_1M_\theta\left(3a^2 + \frac{3a\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*} + 0.5\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\right)^2\right)\Big], \\ \omega_2^2 = \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*^2\Big[C_4^3C_\beta\Big(M_\rho\big(0.5\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1\big) + 2M_\theta\Big) + 1.5C_N\gamma_1M_\theta\Big], \\ \omega_3^2 = \frac{8\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_*^2C_\beta M_\rho\alpha_3^2.\end{gathered} \quad (4.19)$$

Пусть исходные данные задачи (4.1) таковы, что выполняется условие

$$\omega_1^2 < \nu_2(1-\varepsilon_2), \ \ \omega_2^2 < \nu_1(1-\varepsilon_1), \quad (4.20)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ — фиксированные числа. При выполнении (4.20) с учетом (4.18) неравенство (4.7) принимает вид

$$\|\mathbf{E}\|_Q^2 \leqslant (\mathbf{E}, \mathbf{E}^d)_Q - \varepsilon_1\nu_1\|f\|_\Omega^2 - \varepsilon_2\nu_2\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \omega_3^2\|\mathbf{E}^d\|_Q^2. \tag{4.21}$$

Отбрасывая неположительные слагаемые $-\varepsilon_1\nu_1\|f\|_\Omega^2$ и $-\varepsilon_2\nu_2\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}$ в правой части, из (4.21) получаем, что

$$\|\mathbf{E}\|_Q^2 \leqslant \|\mathbf{E}\|_Q\|\mathbf{E}^d\|_Q + \omega_3^2\|\mathbf{E}\|_\Omega^2. \tag{4.22}$$

Неравенство (4.22) представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|\mathbf{E}\|_Q$. Решив его, приходим к следующей оценке для $\|\mathbf{E}\|_Q$:

$$\|\mathbf{E}\|_Q \leqslant (\omega_3 + 1)\|\mathbf{E}^d\|_Q.$$

Поскольку $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}^d = \mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d$, то эта оценка эквивалентна оценке

$$\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_Q \leqslant (\omega_3 + 1)\|\mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d\|_Q. \tag{4.23}$$

В случае, когда $Q = \Omega$, оценка (4.23) имеет смысл $L^2(\Omega)$-оценки устойчивости компоненты $\widehat{\mathbf{E}}$ решения $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{u})$ задачи (4.1) относительно малых возмущений функций $\mathbf{E}^d \in L^2(\Omega)^3$. Если, кроме того, $\mathbf{E}_1^d = \mathbf{E}_2^d$, то из этой оценки следует, что $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ в Q. Это дает вместе с (4.21) при $\nu_1 > 0$ и $\nu_2 > 0$, что $f = 0$ и $\mathbf{k} = 0$, а из (3.21) тогда следует, что $\rho = 0$, то есть, что $\rho_1 = \rho_2$ в Ω. Последнее означает единственность решения задачи (3.1) при выполнении условия (4.20).

Далее, используя неравенство $\|\mathbf{E}\|_Q\|\mathbf{E}^d\|_Q \leqslant \|\mathbf{E}\|_Q^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{E}^d\|_Q^2$, вытекающее из неравенства Юнга, из (4.21) выводим, что

$$\varepsilon_1\nu_1\|f\|_\Omega^2 + \varepsilon_2\nu_2\|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma}^2 \leqslant -\|\mathbf{E}\|_Q^2 + (\mathbf{E}, \mathbf{E}^d)_Q + \omega_3^2\|\mathbf{E}^d\|_Q^2 \leqslant \frac{1}{4}\|\mathbf{E}^d\|_Q^2 + \omega_3^2\|\mathbf{E}^d\|_Q^2. \tag{4.24}$$

Из (4.24) вытекают оценки

$$\|f\|_\Omega \leqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1\nu_1}}(\omega_3 + 0.5)\|\mathbf{E}^d\|_Q, \quad \|\mathbf{k}\|_{1/2,\Gamma} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2\nu_2}}(\omega_3 + 0.5)\|\mathbf{E}^d\|_Q,$$

которые с учетом (3.5) перепишем в виде

$$\|f_1 - f_2\|_\Omega \leqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1\nu_1}}(\omega_3 + 0.5)\|\mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d\|_Q, \tag{4.25}$$

$$\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{1/2,\Gamma} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2\nu_2}}(\omega_3 + 0.5)\|\mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d\|_Q. \tag{4.26}$$

Из (4.25), (4.26) и (3.21), (3.22) вытекают следующие оценки для разностей $\rho_1 - \rho_2$ и $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$:

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_{1,\Omega} \leqslant 2C_*(\omega_3 + 0.5)A\|\mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d\|_Q, \tag{4.27}$$

$$\|\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}C_N C_*(\omega_3 + 0.5)\left(A + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2C_*}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2\nu_2}}\right)\|\mathbf{E}_1^d - \mathbf{E}_2^d\|_Q, \tag{4.28}$$

где $A = a\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2\nu_2}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1\nu_1}}$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть, в дополнение к условиям* (i) *и* (j)*,* K *— ограниченное множество, и пусть пара* $(\mathbf{x}_i, u_i) \in X \times K$ *является решением задачи* (4.1)*, отвечающим заданным функциям* $\mathbf{E}_i^d \in L^2(Q)^3$*,* $i = 1, 2$*, где* $Q \subset \Omega$ *— произвольное открытое ограниченное множество. Предположим, что выполняется условие* (4.20)*. Тогда справедливы оценки* (4.23)*,* (4.25)*–*(4.28)*, где* ω_i*,* $i = 1, 2, 3$*, определены в* (4.19)*.*

Следствие 4.1. *Пусть, в дополнение к условиям* (i) *и* (j)*,* K *— ограниченное множество,* $\mathbf{E}_1^d = \mathbf{E}_2^d$ *в* Q*. Тогда если выполняется условие* (4.20)*, то решение* $(\mathbf{x}, u) \in X \times K$ *задачи* (4.1) *единственно.*

§ 5. Задача граничного управления

Рассмотрим однопараметрическую задачу граничного управления с функционалом качества I_4 из (2.2), роль управления в которой играет функция $\mathbf{k}$, которая может изменяться во множестве $K_{\mathbf{k}}$:

$$J(\mathbf{E}) \equiv \frac{1}{2}\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|_{1,\Omega}^2 \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{k}) \in X \times K_{\mathbf{k}}. \tag{5.1}$$

Пусть выполняется следующее условие:

(jjj) $K_{\mathbf{k}} \subset \widetilde{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ — непустое выпуклое ограниченное замкнутое множество.

Из теоремы 2.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условиям* (i)–(iv) *и* (jjj)*. Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \in X \times K_{\mathbf{k}}$ *задачи управления* (5.1)*.*

В данном разделе мы установим достаточные условия локальной единственности оптимального решения задачи (5.1). В отличие от задачи (2.1), в (5.1) не используется регуляризация. Однако указанный результат будет получен за счет выбора коэрцитивного функционала качества и соответствующего ему управления.

Для задачи (5.1) основное неравенство (4.7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}^2 \leqslant -\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \theta\big) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\big) - \\ - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2\big) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_1 + \theta_2), \end{aligned} \tag{5.2}$$

неравенство (3.19) — вид

$$\begin{aligned} (d\,\nabla\rho, \nabla\rho) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, \rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta|\rho_1|\rho, \rho\big) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\big(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \rho\big). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Из (5.3) при выполнении условия

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 M_\rho \|\beta\|_{L_4(\Omega)} \leqslant \frac{\lambda_*}{2} \tag{5.4}$$

приходим к оценке

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leqslant 2C_*\mu_n\gamma_1 M_\rho \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}. \tag{5.5}$$

Оценка (4.11) переписывается следующим образом

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leqslant \widetilde{M}_\theta, \quad i=1,2, \qquad \widetilde{M}_\theta \equiv 2\frac{C_*}{\varepsilon\varepsilon_0}\widetilde{M}^0_{\mathbf{E}}C_N, \quad \widetilde{M}^0_{\mathbf{E}} \equiv M_{\mathbf{E}} + \|\mathbf{E}^d\|^2_{1,\Omega}.$$

С учетом (5.4) и (5.5) неравенство (4.12) принимает вид

$$\lambda_*\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\|\sigma\|_\Omega + \mu_n\gamma_1\widetilde{M}_\theta\left(\frac{4}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta C_*M_\rho + 1\right)\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}. \tag{5.6}$$

Далее левое неравенство в (4.14) переписывается в виде

$$\|\sigma\|_\Omega \leqslant \mu_n\gamma_1M_\rho C_N\|\theta\|_{1,\Omega} + C_N\big(2\mu_n^2\gamma_1^2\widetilde{M}_\theta C_*M_\rho + 1\big)\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega}. \tag{5.7}$$

Подставив (5.7) в (5.6), при выполнении условия (4.9) приходим к оценке

$$\begin{gathered}\|\theta\|_{1,\Omega} \leqslant 2C_*B\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega},\\ B = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}C_N\big(2\mu_n^2\gamma_1^2\widetilde{M}_\theta C_*M_\rho + 1\big) + \mu_n\gamma_1\widetilde{M}_\theta\left(\frac{4}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta C_*M_\rho + 1\right).\end{gathered} \tag{5.8}$$

Окончательно из (5.2) получаем неравенство

$$\|\mathbf{E}\|^2_{1,\Omega} \leqslant \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^2C_\beta M_\rho\|\rho\|_{1,\Omega}\|\theta\|_{1,\Omega} + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_4^3C_\beta\widetilde{M}_\theta\|\rho\|^2_{1,\Omega} + 2\gamma_1\mu_n\widetilde{M}_\theta\|\rho\|_{1,\Omega}\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega},$$

которое с учетом (5.5), (5.8) принимает вид

$$\|\mathbf{E}\|^2_{1,\Omega} \leqslant 4\mu_n^2C_*\gamma_1M_\rho\left(\frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*C_4^3C_\beta M_\rho B + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*\gamma_1C_4^3C_\beta M_\rho\widetilde{M}_\theta + \gamma_1\widetilde{M}_\theta\right)\|\mathbf{E}\|^2_{1,\Omega}. \tag{5.9}$$

Из (5.9) вытекает, что если выполняется условие

$$4\mu_n^2\gamma_1M_\rho\left(\frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*C_4^3C_\beta M_\rho B + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}C_*\gamma_1C_4^3C_\beta M_\rho\widetilde{M}_\theta + \gamma_1\widetilde{M}_\theta\right) < \lambda_*, \tag{5.10}$$

то $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ п. в. в Ω. Тогда В таком случае, из оценки (5.5) получаем, что $\rho = 0$ или $\rho_1 = \rho_2$ п. в. в Ω.

Из вышесказанного вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть, в дополнение к условиям* (i)–(iv) *и* (jjj)*, выполняется условие* (5.10)*. Тогда существует единственное решение* $(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \in X \times K_{\mathbf{k}}$ *экстремальной задачи* (5.1)*.*

Замечание 5.1. Из доказательства теоремы 5.2 несложно заметить, что для коэрцитивного функционала $I_2(\rho)$ из (2.2) «соответствующим» управлением является распределенное управление f.

В заключение отметим, что в рамках оптимизационного подхода к задаче управления (5.1) может быть сведена задача восстановления граничной функции $\mathbf{k}$ по измеренному во всей области Ω электрическому полю $\mathbf{E}^d$, при условии что измерения выполнены с высокой точностью так, что $\mathbf{E}^d \in H^1(\Omega)^3$ (о корректности такого подхода см. [25]).

Финансирование. Исследование выполнено в рамках госзадания Института прикладной математики ДВО РАН (№ 075–00459–25–00).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Suga H., Tadokoro H., Kotera M. A simulation of electron beam induced charging-up of insulators // Electron microscopy 1998. Proceedings of the 14th International Congress on Electron Microscopy, Cancun, Mexico, August 31–September 4 1998. Vol. I. General interest and instrumentation. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1998. P. 177–178.
2. Kotera M., Yamaguchi K., Suga H. Dynamic simulation of electron-beam-induced chargingup of insulators // Japanese Journal of Applied Physics. 1999. Vol. 38. No. 12S. P. 7176–7179. https://doi.org/10.1143/JJAP.38.7176
3. Cazaux J. About the mechanisms of charging in EPMA, SEM, and ESEM with their time evolution // Microscopy and Microanalysis. 2004. Vol. 10. Issue 6. P. 670–684. https://doi.org/10.1017/S1431927604040619
4. Масловская А. Г. Физико-математическое моделирование индуцированной электронным зондом зарядки сегнетоэлектриков в процессе переключения доменной системы // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 7. С. 84–88. https://doi.org/10.7868/s0207352813070123
5. Maslovskaya A., Sivunov A. V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with SEM-techniques // Solid State Phenomena. 2014. Vol. 213. P. 119–124. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.213.119
6. Maslovskaya A., Pavelchuk A. Simulation of dynamic charging processes in ferroelectrics irradiated with SEM // Ferroelectrics. 2015. Vol. 476. Issue 1. P. 1-11. https://doi.org/10.1080/00150193.2015.998111
7. Maslovskaya A., Pavelchuk A. Simulation of heat conductivity and charging processes in polar dielectrics induced by electron beam exposure // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2015. Vol. 81. 012119. https://doi.org/10.1088/1757-899X/81/1/012119
8. Raftari B., Budko N. V., Vuik C. Self-consistence drift-diffusion-reaction model for the electron beam interaction with dielectric samples // Journal of Applied Physics. 2015. Vol. 118. Issue 20. 204101. https://doi.org/10.1063/1.4936201
9. Павельчук А. В., Масловская А. Г. Подход к численной реализации диффузионно-дрейфовой модели полевых эффектов, индуцированных движущимся источником физического эксперимента // Известия высших учебных заведений. Физика. 2020. Т. 63. № 1. С. 94–100. https://doi.org/10.17223/00213411/63/1/94
10. Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н., Масловская А. Г. Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 10. С. 1696–1706. https://doi.org/10.31857/S0044466922100039
11. Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н., Масловская А. Г. Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 9. С. 1537–1552. https://doi.org/10.31857/S0044466923090053
12. Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н. О единственности решения задачи мультипликативного управления для модели дрейфа-диффузии электронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 1. С. 3–18. https://doi.org/10.35634/vm240101
13. Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н. Задачи мультпликативного управления для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 643–659. https://doi.org/10.31857/S0374064124050062
14. Чеботарев А. Ю. Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390. https://doi.org/10.31857/S004446692203005X
15. Alekseev G. V., Tereshko D. A. On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1998. Vol. 6. No. 6. P. 521–562. https://doi.org/10.1515/jiip.1998.6.6.521

16. Алексеев Г. В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С. 971–991. https://www.mathnet.ru/rus/smj1419
17. Алексеев Г. В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. https://elibrary.ru/item.asp?id=19463227
18. Бризицкий Р. В., Быстрова В. С., Сарицкая Ж. Ю. Анализ некоторых краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 635–648. https://doi.org/10.31857/S037406412105006X
19. Baranovskii E. S., Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu. Optimal control problems for the reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2024. Vol. 75. 103979. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103979
20. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model // International Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016. 9428128. https://doi.org/10.1155/2016/9428128
21. Барановский Е. С. Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Математический сборник. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43. https://doi.org/10.1070/SM9246
22. Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu. Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model // Journal of Dynamical and Control Systems. 2021. Vol. 27. Issue 2. P. 379–402. https://doi.org/10.1007/s10883-020-09508-z
23. Барановский Е. С. Задача оптимального управления с обратной связью для сетевой модели движения вязкой жидкости // Математические заметки. 2022. Т. 112. Вып. 1. С. 31–47. https://doi.org/10.4213/mzm13392
24. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
25. Brizitskii R. V., Saritskaya Zh. Yu. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2018. Vol. 26. Issue 6. P. 821–833. https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0011

Поступила в редакцию 29.08.2024
Принята к публикации 03.03.2025

Бризицкий Роман Викторович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5439-2271
E-mail: mlnwizard@mail.ru

Максимова Надежда Николаевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа и моделирования, старший научный сотрудник, лаборатория математического моделирования сложных физических и биологических систем, Амурский государственный университет, 675027, Россия, г. Благовещенск, Игнатьевское шоссе, 21.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8135-7399
E-mail: knnamursu@mail.ru

Цитирование: Р. В. Бризицкий, Н. Н. Максимова. О единственности и устойчивости решений задач управления для модели дрейфа–диффузии электронов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 27–46.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 27–46.

R. V. Brizitskii, N. N. Maksimova

On the uniqueness and stability of solutions to the control problems for the electron drift–diffusion model

Keywords: electron drift–diffusion model, polar inhomogeneous dielectric charging model, control problem, optimality system, uniqueness of the optimal solution, local stability estimates.

MSC2020: 35A02, 35G30, 35R30, 49J20

DOI: 10.35634/vm250102

The issues of uniqueness and stability of solutions to the control problems for the model of electron-induced charging of an inhomogeneous polar dielectric are studied. Sufficient conditions for the uniqueness and stability of optimal solutions to the considered extremum problems are established, and the local estimates of their stability with respect to small perturbations of the cost functionals are derived.

Funding. The research was carried out within the state assignment of the Institute of Applied Mathematics FEB RAS (No. 075–00459–25–00).

REFERENCES

1. Suga H., Tadokoro H., Kotera M. A simulation of electron beam induced charging-up of insulators // *Electron microscopy 1998. Proceedings of the 14th International Congress on Electron Microscopy, Cancun, Mexico, August 31–September 4 1998. Vol. I. General interest and instrumentation*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 1998. P. 177–178.
2. Kotera M., Yamaguchi K., Suga H. Dynamic simulation of electron-beam-induced chargingup of insulators, *Japanese Journal of Applied Physics*, 1999, vol. 38, no. 12S, pp. 7176–7179. https://doi.org/10.1143/JJAP.38.7176
3. Cazaux J. About the mechanisms of charging in EPMA, SEM, and ESEM with their time evolution, *Microscopy and Microanalysis*, 2004, vol. 10, issue 6, pp. 670–684. https://doi.org/10.1017/S1431927604040619
4. Maslovskaya A. G. Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain-structure switching, *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 680–684. https://doi.org/10.1134/S1027451013040125
5. Maslovskaya A., Sivunov A. V. Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with SEM-techniques, *Solid State Phenomena*, 2014, vol. 213, pp. 119–124. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.213.119
6. Maslovskaya A., Pavelchuk A. Simulation of dynamic charging processes in ferroelectrics irradiated with SEM, *Ferroelectrics*, 2015, vol. 476, issue 1, pp. 1–11. https://doi.org/10.1080/00150193.2015.998111
7. Maslovskaya A., Pavelchuk A. Simulation of heat conductivity and charging processes in polar dielectrics induced by electron beam exposure, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2015, vol. 81, 012119. https://doi.org/10.1088/1757-899X/81/1/012119
8. Raftari B., Budko N. V., Vuik C. Self-consistence drift-diffusion-reaction model for the electron beam interaction with dielectric samples, *Journal of Applied Physics*, 2015, vol. 118, issue 20, 204101. https://doi.org/10.1063/1.4936201
9. Pavelchuk A. V., Maslovskaya A. G. Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source, *Russian Physics Journal*, 2020, vol. 63, issue 1, pp. 105–112. https://doi.org/10.1007/s11182-020-02008-4
10. Brizitskii R. V., Maksimova N. N., Maslovskaya A. G. Theoretical analysis and numerical implementation of a stationary diffusion-drift model of polar dielectric charging, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, issue 10, pp. 1680–1690. https://doi.org/10.1134/S0965542522100037

11. Brizitskii R. V., Maksimova N. N., Maslovskaya A. G. Inverse problems for the diffusion–drift model of charging an inhomogeneous polar dielectric, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2023, vol. 63, no. 9, pp. 1685–1699. https://doi.org/10.1134/S0965542523090051
12. Brizitskii R. V., Maksimova N. N. On the uniqueness of a solution to the multiplicative control problem for the electron drift–diffusion model, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 1, pp. 3–18. https://doi.org/10.35634/vm240101
13. Brizitskii R. V., Maksimova N. N. Multiplicative control problems for the diffusion–drift charging model of an inhomogeneous polar dielectric, *Differential Equations*, 2024, vol. 60, issue 5, pp. 614–629. https://doi.org/10.1134/S0012266124050069
14. Chebotarev A. Yu. Optimal control problems for complex heat transfer equations with Fresnel matching conditions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, issue 3, pp. 372–381. https://doi.org/10.1134/S0965542522030058
15. Alekseev G. V., Tereshko D. A. On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1998, vol. 6, no. 6, pp. 521–562. https://doi.org/10.1515/jiip.1998.6.6.521
16. Alekseev G. V. Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations, *Siberian Mathematical Journal*, 2001, vol. 42, no. 5, pp. 811–827. https://doi.org/10.1023/A:1011940606843
17. Alekseev G. V. *Optimizatsiya v statsionarnykh zadachakh teplomassoperenosa i magnitnoi gidrodinamiki* (Optimization in stationary problems of heat and mass transfer and magnetohydrodynamics), Moscow: Nauchnyi Mir, 2010. https://elibrary.ru/item.asp?id=19463227
18. Brizitskii R. V., Bystrova V. S., Saritskaia Zh. Yu. Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction–diffusion–convection equation, *Differential Equations*, 2021, vol. 57, issue 5, pp. 615–629. https://doi.org/10.1134/S0012266121050062
19. Baranovskii E. S., Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu. Optimal control problems for the reaction–diffusion–convection equation with variable coefficients, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2024, vol. 75, 103979. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103979
20. Baranovskii E. S., Artemov M. A. Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model, *International Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 2016, 9428128. https://doi.org/10.1155/2016/9428128
21. Baranovskii E. S. Optimal boundary control of nonlinear-viscous fluid flows, *Sbornik: Mathematics*, 2020, vol. 211, issue 4, pp. 505–520. https://doi.org/10.1070/SM9246
22. Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu. Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2021, vol. 27, issue 2, pp. 379–402. https://doi.org/10.1007/s10883-020-09508-z
23. Baranovskii E. S. Feedback optimal control problem for a network model of viscous fluid flows, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 112, no. 1–2, pp. 26–39. https://doi.org/10.1134/S0001434622070033
24. Fursikov A. V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* (Optimal control of distributed systems. Theory and applications), Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999.
25. Brizitskii R. V., Saritskaya Z. Y. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2018, vol. 26, issue 6, pp. 821–833. https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0011

Received 29.08.2024
Accepted 03.03.2025

Roman Viktorovich Brizitskii, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics, Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Radio, 7, Vladivostok, 690041, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5439-2271
E-mail: mlnwizard@mail.ru

Nadezhda Nikolaevna Maksimova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis and Modeling, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University, Ignatyevskoye shosse, 21, Blagoveshchensk, 675027, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8135-7399
E-mail: knnamursu@mail.ru

Citation: R. V. Brizitskii, N. N. Maksimova. On the uniqueness and stability of solutions to the control problems for the electron drift–diffusion model, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 27–46.