МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 75–81.

УДК 517.977

© *М. С. Никольский*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ

Различные задачи управления пучками траекторий составляют важный объект изучения в современной математической теории управления. Такие задачи возникают, например, при изучении движения потока заряженных частиц, а также при наличии неполной информации о начальном состоянии управляемой системы. В настоящей статье для нелинейного управляемого объекта весьма общего вида на фиксированном отрезке времени $[0,T]$ рассматривается задача управления пучками траекторий при неодноточечном начальном множестве. На множестве достижимости в момент $T>0$ изучается задача максимизации заданной непрерывной функции. Эту задачу можно интерпретировать как задачу о разбросе траекторий управляемого объекта. Соответствующий максимум зависит от выбранного допустимого управления $u(\cdot)$. В статье обосновывается существование минимума на множестве допустимых управлений от этого максимума.

Ключевые слова: управляемый объект, пучок траекторий, множество достижимости, функционал.

DOI: 10.35634/vm250104

§ 1. Введение

Рассматривается управляемый объект вида (см. [1–3]):

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ $(n \geqslant 1)$, $u \in U$ — выпуклому компакту из R^r $(r \geqslant 1)$, $a(x)$ — n-мерная векторная функция, определённая на R^n, $b(x)$ — матричная функция размерности $n \times r$, определённая на R^n.

Условимся через R^k $(k \geqslant 1)$ обозначать k-мерное арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются столбцы из k чисел, со стандартными скалярным произведением векторов $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и длиной вектора $|\cdot|$. Для управляемого объекта (1) на начальный вектор $x(0) = x_0$ накладывается ограничение

$$x_0 \in M, \tag{2}$$

где M — неодноточечный компакт из R^n. В дальнейшем предполагаются выполненными следующие условия:

1) компоненты векторной функции $a(x)$ и матричной функции $b(x)$ непрерывны и локально липшицевы на R^n;

2) при всех $x \in R^n$, $u \in U$ выполняется неравенство

$$\langle a(x) + b(x)u, x \rangle \leqslant c\big(1 + |x|^2\big), \tag{3}$$

где c — неотрицательная константа;

3) компоненты матрицы $b(x)$ непрерывно дифференцируемы на R^n.

При сделанных предположениях решение $x(t, u(\cdot), x_0)$ уравнения (1) существует и единственно в классе локально липшицевых функций при $t \geqslant 0$ для произвольных измеримых по Лебегу функций $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, и $x(0) = x_0 \in R^n$ (см. [2, 3]). Отметим также, что при сделанных предположениях при произвольном измеримом управлении $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, и $x_0 \in R^n$ при $t \geqslant 0$ выполняется неравенство (см. [3])

$$|x(t, u(\cdot), x_0)| \leqslant e^{ct}\big(1 + |x_0|^2\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

В дальнейшем фиксируется $T > 0$. Обозначим через $\mathcal{U}$ множество измеримых по Лебегу функций $u(t) \in U$ при $t \in \Delta$, где $\Delta = [0, T]$, через $D(u(\cdot))$ множество достижимости управляемого объекта (1) с начальным условием (2) при данном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ в момент $T > 0$, то есть

$$D(u(\cdot)) = \bigcup_{x_0 \in M} x(T, u(\cdot), x_0). \tag{5}$$

Рассмотрим функционал

$$F(u(\cdot)) = \max_{y \in D(u(\cdot))} \varphi(y), \tag{6}$$

где непрерывная на R^n функция $\varphi(y)$ фиксирована. Функционал (6) можно трактовать как некоторую оценку сверху для разброса траекторий управляемого объекта (1) с начальным условием (2) при данной $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ с помощью функции ущерба $\varphi(y)$. Например, функция $\varphi(y)$ может иметь вид $\operatorname{dist}(y, X)$, то есть расстояния от точки y до фиксированного компакта $X \subset R^n$.

В статье обосновывается корректность определения функционала (6), то есть обосновывается достижение максимума в (6).

Далее, обозначим

$$G = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} F(u(\cdot)). \tag{7}$$

Величину G можно трактовать как наименьшую оценку разброса траекторий управляемого объекта (1) при начальном множестве M. В статье обосновывается корректность определения величины G, то есть обосновывается достижение минимума в (7).

Отметим, что различные задачи управления пучками траекторий рассматривались в монографии [4]. В этой монографии основным источником для постановки задач являются физические проблемы, связанные с управлением потоком заряженных частиц. В работах А. Б. Куржанского (см., например, [5]) источником для постановки задач управления пучками траекторий являются задачи с неполной информацией, в которых начальное состояние управляемой системы известно неточно.

Отметим, что в работе [6] были получены теоремы существования оптимального управления в некоторых задачах управления пучками траекторий. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение исследований работы [6].

§ 2. Основная часть

Теорема 1. *При произвольном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ множество достижимости $D(u(\cdot))$ (см. (5)) является компактом в R^n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность множества $D(u(\cdot))$ вытекает из компактности M и неравенств (3), (4). Пусть некоторая последовательность векторов $\xi_i \in D(u_i(\cdot))$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится при $i \to \infty$ к вектору ξ_*. Докажем, что $\xi_* \in D(u(\cdot))$. При $i = 1, 2, \ldots$ имеем для ξ_i представление вида

$$\xi_i = x(T, u(\cdot), x_{0i}), \tag{8}$$

где векторы $x_{0i} \in M$. Так как M — компакт, то, переходя, если надо, к подпоследовательности и производя соответствующую перенумерацию, можно считать, что последовательность x_{0i}, $i = 1, 2, \ldots$, сходится при $i \to \infty$ к некоторому вектору $x_* \in M$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начального условия (при сделанных предположениях она верна) следует, что последовательность векторов ξ_i (см. (8)) сходится к вектору $x(T, u(\cdot), x_*)$, который принадлежит $D(u(\cdot))$. Теорема доказана. □

Из теоремы 1 и непрерывности функции $\varphi(y)$ на R^n вытекает корректность определения величины $F(u(\cdot))$ (см. (6)).

В дальнейшем нам понадобится следующий факт.

Рассмотрим при $t \in \Delta$ два решения уравнения (1) $x(t) = x(t, u(\cdot), \xi)$, $y(t) = y(t, v(\cdot), \eta)$, соответствующие парам $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ из $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, (ξ, η) из $K \times K$, где K — компакт из R^n. Для произвольной измеримой функции $p(t) \in R^r$, $t \in \Delta$, равномерно ограниченной по модулю при $t \in \Delta$, можно определить величину (слабую норму)

$$\|p(\cdot)\|_w = \max_{t\in\Delta}\left|\int\limits_0^t p(s)\,ds\right|, \tag{9}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Отметим, что слабая норма использовалась, например, в работе [7].

Справедлива следующая

Теорема 2. *При произвольных парах* $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ *из* $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, $(\xi, \eta) \in K \times K$ *для* $t \in \Delta$ *при достаточно большой константе* $c_1 > 0$*, не зависящей от этих пар, выполняется неравенство вида*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant c_1\big(|\xi - \eta| + \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_w\big). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнение (1), получаем при $t \in \Delta$ равенство

$$\begin{gathered} x(t) - y(t) = (\xi - \eta) + \int\limits_0^t \big(a(x(s)) - a(y(s))\big)\,ds + \\ + \int\limits_0^t \big(b(x(s)) - b(y(s))\big)u(s)\,ds + \int\limits_0^t b(y(s))\big(u(s) - v(s)\big)\,ds, \end{gathered} \tag{11}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега. С помощью формулы интегрирования по частям получаем при $t \in \Delta$ равенство

$$\int\limits_0^t b(y(s))\big(u(s)-v(s)\big)\,ds = b(y(t))\int\limits_0^t \big(u(r)-v(r)\big)\,dr - \int\limits_0^t \frac{db(y(s))}{ds}\int\limits_0^s \big(u(r)-v(r)\big)\,dr\,ds, \tag{12}$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега, а в повторном интеграле сначала берётся интеграл по dr, а затем по ds. Отметим, что почти всюду на Δ определена функция $\dfrac{db(y(s))}{ds}$, причём почти всюду на Δ

$$\frac{db(y(s))}{ds} = b_y(y(s))\big[a(y(s)) + b(y(s))v(s)\big], \tag{13}$$

и она там является измеримой по Лебегу, ограниченной в существенном по модулю функцией. Знак $b_y(y)$ означает матрицу Якоби. Так как векторы ξ, η принадлежат компакту K, то, в силу оценки (4), функции $|x(s)|$, $|y(s)|$ на Δ ограничены некоторой константой $c_2 > 0$. Отметим, что из локальной липшицевости элементов векторной функции $a(x)$ и элементов матричной функции $b(x)$, а также из ограниченности по модулю функций $|u(s)|$, $|v(s)|$ на Δ и из формул (11)–(13) при $t \in \Delta$ с помощью несложных оценок вытекает при $t \in \Delta$ неравенство вида

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |\xi - \eta| + l_1 \int\limits_0^t |x(s) - y(s)|\, ds + l_2 \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_w, \tag{14}$$

где l_1, l_2 — достаточно большие положительные константы, не зависящие от пар $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ из $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, (ξ, η) из $K \times K$. Применяя известное неравенство Гронуолла–Беллмана (см. теорему 1.1 в [8]) к интегральному неравенству (14), теперь нетрудно получить искомое неравенство (10) при достаточно большой константе $c_1 > 0$. □

Замечание 1. Отметим, что при $\xi = \eta \in K$ неравенство (10) превращается в неравенство

$$|x(t) - y(t)| \leqslant c_1 \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_w,$$

где $t \in \Delta$, c_1 — положительная константа, не зависящая от $\xi \in K$ и пар $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ из $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Для дальнейшего нам будет полезно следующее определение.

Определение 1. Для пары непустых компактов P, Q из R^n расстояние Хаусдорфа $h(P, Q)$ определяется как наименьшее число $\varepsilon \geqslant 0$, для которого одновременно выполняются два включения:

$$P \subset Q + S_\varepsilon, \qquad Q \subset P + S_\varepsilon, \tag{15}$$

где $S_\varepsilon = \{x \in R^n \colon |x| \leqslant \varepsilon\}$, а сложение множеств понимается в алгебраическом смысле.

Теорема 3. *Величина G (см. (7)) определена корректно, то есть минимум в формуле (7) достигается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — минимизирующая последовательность для функционала $F(u(\cdot))$ (см. (6)) на $\mathcal{U}$. Используя слабую компактность множества $\mathcal{U}$ в гильбертовом пространстве $L_2^r(\Delta)$ (см. [9]) и производя соответствующую перенумерацию, можно считать, что последовательность $u_i(\cdot)$ сходится слабо в $L_2^r(\Delta)$ к некоторой функции $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}$. Покажем, что при $i \to \infty$ в метрике Хаусдорфа h

$$D(u_i(\cdot)) \to D(u_*(\cdot)), \tag{16}$$

где $D(u(\cdot))$ определяется формулой (5). Можно показать, используя свойства слабой сходимости в $L_2^r(\Delta)$, что при $i \to \infty$ (см. (9)) $\|u_i(\cdot) - u_*(\cdot)\|_w \to 0$. Отсюда в силу замечания 1 для $x_0 \in M$ получаем при $i \to \infty$, что

$$x(T, u_i(\cdot), x_0) \to x(T, u_*(\cdot), x_0), \tag{17}$$

причём равномерно относительно $x_0 \in M$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно показать, что при $i \geqslant N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ — достаточно большое натуральное число, выполняются включения (см. (15))

$$D(u_i(\cdot)) \subset D(u_*(\cdot)) + S_\varepsilon, \tag{18}$$

$$D(u_*(\cdot)) \subset D(u_i(\cdot)) + S_\varepsilon. \tag{19}$$

Рассмотрим последовательность векторов $x(T, u_i(\cdot), x_0)$, $i = 1, 2, \ldots$, при данном $x_0 \in M$. В силу равномерной по $x_0 \in M$ сходимости векторов $x(T, u_i(\cdot), x_0)$ к $x(T, u_*(\cdot), x_0)$ (см. (17)), нетрудно обосновать, что при $i \geqslant N_1(\varepsilon)$, где $N_1(\varepsilon)$ — достаточно большое натуральное число, выполняется включение (18). Фиксируем теперь $\xi \in D(u_*(\cdot))$. При некотором начальном векторе $x_0(\xi) \in M$ имеет место равенство $\xi = x(T, u_*(\cdot), x_0(\xi))$. Отметим, что нелинейное отображение $x(T, u_*(\cdot), x_0)$ осуществляет взаимнооднозначное отображение множества M на $D(u_*(\cdot))$. Поэтому вектор $x_0(\xi)$ определяется единственным образом. Последовательность векторов $\xi_i = x(T, u_i(\cdot), x_0(\xi))$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится при $i \to \infty$ к вектору ξ в силу соотношения (17) при $x_0 = x_0(\xi)$, причём эта сходимость будет равномерной по $\xi \in D(u_*(\cdot))$. Из сказанного вытекает включение (19) при $i \geqslant N_2(\varepsilon)$, где $N_2(\varepsilon)$ — достаточно большое натуральное число. На основании сказанного получаем, что включения (18), (19) выполняются при $i \geqslant \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Таким образом, сходимость множеств (16) в метрике Хаусдорфа обоснована. □

Обозначим

$$K = D(u_*(\cdot)) + S_1,$$

где сумма множеств понимается в алгебраическом смысле. Нетрудно обосновать, что K — компакт в R^n. Дальнейшие рассуждения будут вестись при $i \geqslant N_1$, где N_1 — достаточно большое натуральное число, гарантирующее при $i \geqslant N_1$ выполнение включений (ср. с (18), (19))

$$D(u_i(\cdot)) \subset D(u_*(\cdot)) + S_1,$$
$$D(u_*(\cdot)) \subset D(u_i(\cdot)) + S_1.$$

Нам будет полезно следующее

Определение 2. Модулем непрерывности $m(\delta)$ непрерывной на компакте K функции $\varphi(y)$ при $\delta \geqslant 0$ называют величину

$$m(\delta) = \max_{y_1, y_2} |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|,$$

где $y_1 \in K$, $y_2 \in K$, $|y_1 - y_2| \leqslant \delta$.

Отметим, что функция $m(\delta)$ монотонно растет вместе с ростом δ и неотрицательна при $\delta \geqslant 0$ и что $m(0) = 0$, причём при $\delta \to 0+$ выполняется: $\lim m(\delta) = 0$. Для упрощения обозначений положим $D_i = D(u_i(\cdot))$, $D_* = D(u_*(\cdot))$. Из (16) следует, что последовательность компактов D_i сходится в метрике Хаусдорфа к компакту D_*. Отсюда вытекает, что при $j = 2, 3, \ldots$ существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $N_j \geqslant N_1$, для которых имеют место включения

$$D_{N_j} \subset D_* + \frac{1}{j} S_1, \tag{20}$$

$$D_* \subset D_{N_j} + \frac{1}{j} S_1. \tag{21}$$

При $j \geqslant 2$ рассмотрим последовательность чисел $\varphi(\xi_j) - \varphi(\eta)$, где ξ_j, η — фиксированные максимизаторы функции $\varphi(y)$ на компактах D_{N_j}, D_* соответственно. В силу соотношения (20)

$$\varphi(\xi_j) - \varphi(\eta) \leqslant \varphi(\xi_j) - \varphi(s_j) \leqslant m\left(\frac{1}{j}\right), \tag{22}$$

где s_j — одна из наиближайших точек к точке ξ_j в компакте D_*. Рассмотрим также при $j \geqslant 2$ последовательность чисел $\varphi(\eta) - \varphi(\xi_j)$. В силу соотношения (21)

$$\varphi(\eta) - \varphi(\xi_j) \leqslant \varphi(\eta) - \varphi(\gamma_j) \leqslant m\left(\frac{1}{j}\right), \tag{23}$$

где γ_j — одна из наиближайших точек к η в компакте D_{N_j}. Из соотношений (22), (23) и определения векторов ξ_j, η при $j = 2, \ldots$ получаем неравенство

$$|F(u_{N_j}(\cdot)) - F(u_*(\cdot))| \leqslant m\left(\frac{1}{j}\right). \tag{24}$$

Так как последовательность чисел $F(u_{N_j}(\cdot))$ сходится к нижней грани чисел $F(u(\cdot))$ при $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, то из (24) и стремления $m\left(\frac{1}{j}\right)$ к нулю при $j \to \infty$ вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. https://zbmath.org/0179.14001
2. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. https://zbmath.org/0247.49001
3. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах оптимального регулирования // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 1959. № 2. С. 25–32. http://vmu.phys.msu.ru/abstract/1959/2/1959-2-025/
4. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1980.
5. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. https://elibrary.ru/item.asp?id=29169631
6. Никольский М. С., Беляевских Е. А. Теоремы существования оптимального управления для некоторых задач управления пучками траекторий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 113–118. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.111
7. Никольский М. С. Сходимость оптимальных управлений // Нелинейная динамика и управления. Вып. 4. М.: Физматлит, 2004. С. 301–314.
8. Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наукова думка, 1989.
9. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

Поступила в редакцию 17.08.2024
Принята к публикации 03.01.2025

Никольский Михаил Сергеевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 117966, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.
E-mail: mni@mi-ras.ru

Цитирование: М. С. Никольский. Об одной задаче управления пучками траекторий // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 75–81.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 75–81.

M. S. Nikol'skii

On a problem of control of trajectory bundles

Keywords: controlled object, the bundle of trajectories, attainable set, functional.

MSC2020: 93C10, 93B03

DOI: 10.35634/vm250104

Various problems of control of trajectory bundles constitute an important object of study in modern mathematical control theory. Such problems arise, for example, in studying the motion of a flow of charged particles, and also in the presence of incomplete information about the initial state of the controlled system. In the present article, for a nonlinear controlled object of a quite general form on a fixed time interval $[0, T]$, the problem of control of trajectory bundles with a non-single-point initial set is considered. On the reachable set at the moment $T > 0$, the problem of maximization of a given continuous function is studied. This problem can be interpreted as a problem on the spread of trajectories of the controlled object. The corresponding maximum depends on the chosen admissible control $u(\cdot)$. In the article, the existence of a minimum on the set of admissible controls from this maximum is substantiated.

REFERENCES

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. *The mathematical theory of optimal processes*, New York: Wiley Interscience, 1962. https://zbmath.org/0102.32001
2. Lee E. B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*, New York: John Wiley and Sons, 1967. https://zbmath.org/0159.13201
3. Filippov A. F. About some questions of optimal control, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya Matematiki, Mekhaniki, Astronomii, Fiziki, Khimii*, 1959, vol. 14, no. 2, pp. 25–38 (in Russian). https://zbmath.org/0090.06902
4. Ovsyannikov D. A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* (Mathematical methods for controlling bundles), Leningrad: Leningrad State University, 1980.
5. Kurzhanskii A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under conditions of uncertainty), Moscow: Nauka, 1977. https://elibrary.ru/item.asp?id=29169631
6. Nikol'skii M. S., Belyaevskikh E. A. Existence theorems for optimal control in some problems of trajectories bundles control, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, issue 1, pp. 113–118 (in Russian). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.111
7. Nikol'skii M. S. Convergence of optimal controls, *Nelineinaya dinamika i upravleniya. Vypusk 4*, Moscow: Fizmatlit, 2004, pp. 301–314 (in Russian).
8. Martynyuk A. A., Lakshmikantam B., Lila S. *Ustoichivost' dvizheniya: metod integral'nykh neravenstv* (Stability of motion: the method of integral inequalities), Kiev: Naukova Dumka, 1989.
9. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* (The methods of optimization), Moscow: Factorial Press, 2002.

Received 17.08.2024
Accepted 03.01.2025

Mikhail Sergeevich Nikol'skii, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina, 8, Moscow, 117966, Russia.
E-mail: mni@mi-ras.ru

Citation: M. S. Nikol'skii. On a problem of control of trajectory bundles, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 75–81.