МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 129–136.

УДК 517.958, 530.145.6, 517.984

© *Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин*

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЙОРАНОВСКИХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В МОДЕЛИ КИТАЕВА С МНИМЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Рассматривается бесконечная неэрмитовая конечно-разностная модель Китаева, моделирующая одномерную сверхпроводящую проволоку. Неэрмитовость вводится в модель с помощью дельта-образных мнимых потенциалов, которые имитируют усиления и потери амплитуд майорановских локализованных состояний (МЛС). В строгом математическом подходе находятся условия существования собственных функций, описывающих МЛС, а также зависимость собственных функций от параметров модели и влияние неэрмитовости на МЛС. Рассматривается два режима, вблизи топологической межфазной границы и при нулевом химическом потенциале.

Ключевые слова: модель Китаева, неэрмитовость, майорановские локализованные состояния.

DOI: 10.35634/vm250108

Введение

В физической литературе наблюдается постоянный интерес к так называемым майорановским локализованным состояниям (МЛС), которые представляют собой квазичастицы вида «электрон–дырка» с нулевой энергией, возникающие в сверхпроводниках. Это во многом обусловлено их возможным использованием в квантовых вычислениях [1–3]. При этом важна устойчивость МЛС к различного рода воздействиям [3, 4]. Для исследования устойчивости, воздействия на систему эффективно моделируются, например, мнимыми потенциалами [5, 6], в результате чего эрмитовые гамильтонианы становятся неэрмитовыми.

Основополагающая модель Китаева [7] (см. также обзор [8]) представляет собой конечно-разностный оператор, описывающий МЛС в сверхпроводящей проволоке. Эта модель и ее модификации изучались во множестве статей в физической литературе (см. обзор [8]), но мало исследовались в строгом математическом подходе (см., например, [9, 10]). Актуальность дальнейшего математического исследования гамильтониана Китаева не вызывает сомнений, поскольку в таком подходе явно обнаруживается зависимость собственных функций, описывающих МЛС, от параметров системы, что позволяет охарактеризовать локализацию и устойчивость МЛС при изменении параметров.

В статье аналитически исследуются МЛС в бесконечной цепочке Китаева с дельта-образными мнимыми потенциалами, которые моделирует усиления и потери (gains and losses) амплитуд. Рассматриваются два режима: вблизи топологической межфазной границы эрмитовой модели Китаева (ср. [9]), а также при при нулевом химическом потенциале (ср. [7, 10]). Нами аналитически найдены собственные функции, отвечающие МЛС, а также описано влияние неэрмитовости на МЛС.

§ 1. Гамильтониан и резольвента

Гамильтониан Китаева [1] является разностной моделью, которая описывает бесспиновую p-волновую сверхпроводящую проволоку и для бесконечного числа узлов имеет вид

$$H_0 = \sum_n \big(-t(c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n) + \Delta(c_n c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n^\dagger) - \mu c_n^\dagger c_n\big),$$

где n — номер узла, $c_n^\dagger$ и c_n — операторы рождения и уничтожения частицы в n-м узле, t — амплитуда перехода на соседний узел, Δ — вещественный параметр спаривания, μ — химический потенциал.

Действие гамильтониана H_0 на функции $\Psi(n) = \big(\psi_1(n), \psi_2(n)\big)^T$, где T — транспонирование, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, определяется формулой [9]

$$(H_0\Psi)(n) = \begin{pmatrix} -t\big(\psi_1(n+1) + \psi_1(n-1)\big) + \Delta\big(\psi_2(n+1) - \psi_2(n-1)\big) - \mu\psi_1(n) \\ t\big(\psi_2(n+1) + \psi_2(n-1)\big) - \Delta\big(\psi_1(n+1) - \psi_1(n-1)\big) + \mu\psi_2(n) \end{pmatrix}.$$

Компоненты $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ функции $\Psi(n)$ описывают, соответственно, электроны и дырки.

Далее будем предполагать, что $t > 0$, $\Delta > 0$, $t \neq \Delta$. Резольвента $(H_0 - E)^{-1}$ гамильтониана H_0 (здесь E — энергия квазичастицы) определяется равенствами [9]

$$\begin{aligned} \big((H_0 - E)^{-1}\psi\big)_1(n) = {}& \frac{\alpha(2t\cos k_+ - E + \mu)}{2i\sin k_+} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{ik_+|n-n'|}\psi_1(n') - \\ & - \frac{\alpha(2t\cos k_- - E + \mu)}{2i\sin k_-} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{ik_-|n-n'|}\psi_1(n') - \\ & - \alpha\Delta \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(n-n')\big(e^{ik_+|n-n'|} - e^{ik_-|n-n'|}\big)\psi_2(n'), \\ \big((H_0 - E)^{-1}\psi\big)_2(n) = {}& -\frac{\alpha(2t\cos k_+ + E + \mu)}{2i\sin k_+} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{ik_+|n-n'|}\psi_2(n') + \\ & + \frac{\alpha(2t\cos k_- + E + \mu)}{2i\sin k_-} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} e^{ik_-|n-n'|}\psi_2(n') + \\ & + \alpha\Delta \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(n-n')\Big(e^{ik_+|n-n'|} - e^{ik_-|n-n'|}\Big)\psi_1(n'), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(2\sqrt{t^2E^2 + \Delta^2\big(4(\Delta^2 - t^2) + \mu^2 - E^2\big)}\right)^{-1}, \\ \cos k_\pm &= \frac{t\mu \pm \sqrt{t^2E^2 + \Delta^2\big(4(\Delta^2 - t^2) + \mu^2 - E^2\big)}}{2(\Delta^2 - t^2)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

§ 2. МЛС вблизи поверхности $\mu = 2t$

Заметим, что в физической литературе топологические фазы представляют собой области в пространстве параметров с различным числом МЛС. Положим $\varepsilon = 2t - \mu$, тогда $\varepsilon > 0$ соответствует нетривиальной топологической фазе (число МЛС больше нуля) в эрмитовом случае, а $\varepsilon < 0$ соответствует тривиальной топологической фазе (число МЛС равно нулю) [11]. Поскольку речь идет об МЛС, в формулах полагаем $E = 0$. В этом параграфе будем предполагать, что $0 < \varepsilon \ll \max\{\Delta, t\}$. Из (1.2) имеем

$$\alpha = \frac{1}{4\Delta^2} + O(\varepsilon), \quad \cos k_+ = 1 + \frac{2t^2}{\Delta^2 - t^2} + O(\varepsilon), \quad \cos k_- = -1 - \frac{\varepsilon^2}{8\Delta^2} + O(\varepsilon^3), \tag{2.1}$$

откуда

$$\sin k_+ = \pm\frac{2i\Delta t}{\Delta^2 - t^2} + O(\varepsilon), \quad \sin k_- = \pm\frac{i\varepsilon}{2\Delta} + O(\varepsilon^2). \tag{2.2}$$

При этом знаки «$\pm$» в (2.2) не зависят друг от друга и от индекса «$\pm$» в $k_\pm$. Из (2.1), (2.2) получаем

$$\frac{\alpha(2t\cos k_+ + \mu)}{2i\sin k_+} = \mp\frac{1}{4\Delta} + O(\varepsilon), \quad \frac{\alpha(2t\cos k_- + \mu)}{2i\sin k_-} = \pm\frac{1}{4\Delta} + O(\varepsilon) \tag{2.3}$$

(знаки «$\pm$» взяты из (2.2)). Для нахождения и исследования собственных функций будем использовать уравнение

$$\Psi(n) = -H_0^{-1}V\Psi(n), \tag{2.4}$$

полученное из уравнения $(H_0 + V)\Psi(n) = E\Psi$ при $E = 0$. Неэрмитовый потенциал V определим его действием на функции:

$$V\begin{pmatrix}\psi_1(n)\\ \psi_2(n)\end{pmatrix} = i\gamma\begin{pmatrix}\delta_{n,0}\psi_1(0) - \delta_{n,N}\psi_1(N)\\ \delta_{n,0}\psi_2(0) - \delta_{n,N}\psi_2(N)\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где γ — вещественный параметр неэрмитовости, $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, $N \geqslant 1$ — ср. [5,6] (см. рис. 1).

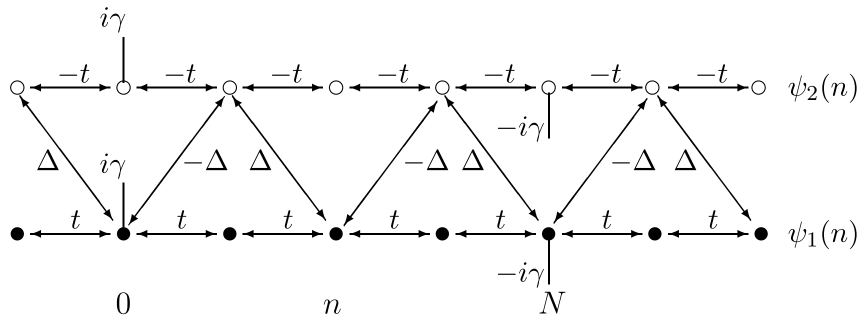

Рис. 1. Неэрмитовая цепочка Китаева. Функции $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ отвечают электронам и дыркам соответственно, n — номер узла

Убывание или возрастание собственных функций определяется, согласно (2.4), (2.5), (1.1), экспонентами $e^{ik_\pm|n|}$. Выбирая в (2.2) знаки таким образом, чтобы экспоненты $e^{ik_\pm|n|}$ убывали при $n \to \infty$, получим

$$e^{ik_+} = \frac{\Delta - t}{\Delta + t} + O(\varepsilon), \quad e^{ik_-} = -1 + \frac{\varepsilon}{2\Delta} + O(\varepsilon^2) \tag{2.6}$$

(далее малые слагаемые будем опускать), при этом в равенствах (2.3) выбираем знак «$-$». В дальнейшем под МЛС мы будем понимать состояния в широком смысле, а именно, квазичастицы, описываемые решениями уравнения (2.3).

Теорема 2.1. *При выполнении условия*

$$\gamma = \pm 2\Delta\big(e^{ik_+N} - e^{ik_-N}\big)^{-1}, \tag{2.7}$$

где $e^{ik_\pm}$ взяты из (2.6), существуют два МЛС, которые описываются функциями

$$\begin{aligned}\psi_1(n) &= \frac{i\gamma}{4\Delta}\Big(\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\big(1 + \operatorname{sgn}(n)\big) \mp i\big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\big(1 - \operatorname{sgn}(n-N)\big)\Big),\\ \psi_2(n) &= -\frac{i\gamma}{4\Delta}\Big(\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\big(1 + \operatorname{sgn}(n)\big) \pm i\big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\big(1 - \operatorname{sgn}(n-N)\big)\Big).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнение (2.4) с помощью (1.1), (2.1), (2.3), (2.5) в виде

$$
\begin{gathered}
\psi_1(n) = \frac{i\gamma}{4\Delta}\Big(\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\psi_1(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\psi_1(N) + \\
+ \big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\operatorname{sgn}(n)\psi_2(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\operatorname{sgn}(n-N)\psi_2(N)\Big), \\
\psi_2(n) = -\frac{i\gamma}{4\Delta}\Big(\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\psi_2(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\psi_2(N) + \\
+ \big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\operatorname{sgn}(n)\psi_1(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\operatorname{sgn}(n-N)\psi_1(N)\Big).
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Введем обозначение $w = \dfrac{i\gamma}{4\Delta}\big(e^{ik_+N} - e^{ik_-N}\big)$. Из (2.9) имеем уравнение для нахождения величин $\psi_1(0)$, $\psi_1(N)$, $\psi_2(0)$, $\psi_2(N)$:

$$
\begin{pmatrix} 1 & w & 0 & -w \\ w & -1 & w & 0 \\ 0 & w & 1 & -w \\ w & 0 & w & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_1(N) \\ \psi_2(0) \\ \psi_2(N) \end{pmatrix} = 0. \tag{2.10}
$$

Определитель матрицы в (2.10) равен $d = -1 - 4w^2$ и обращается в нуль, если $w = \pm i/2$ или, что то же, справедливо равенство (2.7). При выполнении (2.7) из (2.10) имеем $\psi_1(0) = \psi_2(0) = \mp i\psi_1(N)$, $\psi_1(N) = -\psi_2(N)$. Положим $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 1$, $\psi_1(N) = -\psi_2(N) = \pm i$. С использованием этих величин, из (2.9) получаем равенства (2.8). □

Замечание 2.1. Комплексное сопряжение собственной функции меняет местами компоненты, так как $\Psi^*(n) = (\psi_1^*(n), \psi_2^*(n))^T = (\psi_2(n), \psi_1(n))^T$ (см. [1]).

Замечание 2.2. Для существования МЛС, с ростом N величина γ должна экспоненциально возрастать.

§ 3. МЛС вблизи поверхности $\mu = 0$

В этом параграфе будем предполагать, что $\mu = 0$, $\Delta > 0$, $t > 0$. Из (1.2) получим

$$
\alpha = \frac{1}{4\Delta\sqrt{\Delta^2 - t^2}}, \qquad \cos k_\pm = \pm\frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - t^2}}, \qquad \sin k_\pm = \pm\frac{it}{\sqrt{\Delta^2 - t^2}},
$$

знаки «$\pm$» в последнем равенстве не зависят от знаков в $k_\pm$. Выбираем знаки в равенстве для $\sin k_\pm$ так, чтобы $|e^{ik_\pm}| < 1$ (в противном случае получим не локализованные, а так называемые резонансные состояния, так как экспоненты в составе резольвенты экспоненциально возрастают на бесконечности):

$$
e^{ik_\pm} = \pm\sqrt{\frac{\Delta - t}{\Delta + t}}, \qquad \frac{\alpha t \cos k_\pm}{i \sin k_\pm} = -\Delta\alpha. \tag{3.1}
$$

Вместо (2.9) будем иметь систему

$$
\begin{gathered}
\psi_1(n) = i\gamma\alpha\Delta\Big(\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\psi_1(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\psi_1(N) + \\
+ \big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\operatorname{sgn}(n)\psi_2(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\operatorname{sgn}(n-N)\psi_2(N)\Big), \\
\psi_2(n) = -i\gamma\alpha\Delta\Big(\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\psi_2(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\psi_2(N) + \\
+ \big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\operatorname{sgn}(n)\psi_1(0) - \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\operatorname{sgn}(n-N)\psi_1(N)\Big),
\end{gathered}
$$

Обозначим $w = i\gamma\alpha\Delta\big(e^{ik_+N} - e^{ik_-N}\big)$, тогда константы $\psi_1(0)$, $\psi_1(N)$, $\psi_2(0)$, $\psi_2(N)$ удовлетворяют уравнению (2.10), которое имеет ненулевое решение, если

$$2\gamma\alpha\Delta\big(e^{ik_+N} - e^{ik_-N}\big) = \pm 1. \tag{3.2}$$

Если N четное, то $e^{ik_+N} - e^{ik_-N} = 0$ и (3.2) не выполняется. Если N нечетное, то

$$e^{ik_+N} - e^{ik_-N} = 2\left(\sqrt{\frac{\Delta - t}{\Delta + t}}\right)^N. \tag{3.3}$$

Из (3.2), (3.3) находим следующее условие существования МЛС:

$$\gamma = \pm\frac{\big(\sqrt{\Delta + t}\,\big)^{N+1}}{\big(\sqrt{\Delta - t}\,\big)^{N-1}}; \tag{3.4}$$

при этом должно выполняться $\Delta > t$, так как γ вещественно. Собственные функции будут совпадать с (2.8), но выражения для $e^{ik_\pm}$ определяются равенствами в (3.1).

Получена следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для нечетных N и $\Delta > t$ при выполнении условия (3.4) существуют два МЛС, которые описываются функциями*

$$\psi_1(n) = \left(\sqrt{\frac{\Delta + t}{\Delta - t}}\right)^N \Big(\pm i\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\big(1 + \operatorname{sgn}(n)\big) + \\ + \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\big(1 - \operatorname{sgn}(n - N)\big)\Big),$$

$$\psi_2(n) = \left(\sqrt{\frac{\Delta + t}{\Delta - t}}\right)^N \Big(\mp i\big(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\big)\big(1 + \operatorname{sgn}(n)\big) + \\ + \big(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\big)\big(1 - \operatorname{sgn}(n - N)\big)\Big),$$

где экспоненты $e^{ik_\pm}$ взяты из (3.1).

Замечание 3.1. Как и для случая $\mu \approx 2t$ выполнено равенство $\Psi^*(n) = (\psi_2(n), \psi_1(n))^T$.

Финансирование. Исследования Чубурина Ю. П. поддержаны ФТИ УрО РАН, рег. номер ЕГИСУ НИОКТР: 124021900019-5. Исследования Тинюковой Т. С. выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elliott S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87. No. 1. P. 137–163. https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Reports on Progress in Physics. 2012. Vol. 75. No. 7. 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors // Journal of the Physical Society of Japan. 2016. Vol. 85. No. 7. 072001. https://doi.org/10.7566/jpsj.85.072001
4. Das Sarma S., Nag A., Sau J. D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires // Physical Review B. 2016. Vol. 94. No. 3. 035143. https://doi.org/10.1103/physrevb.94.035143

5. Wang Xiaohui, Liu Tingting, Xiong Ye, Tong Peiqing. Spontaneous $\mathcal{PT}$-symmetry breaking in non-Hermitian Kitaev and extended Kitaev models // Physical Review A. 2015. Vol. 92. No. 1. 012116. https://doi.org/10.1103/physreva.92.012116
6. Klett M., Cartarius H., Dast D., Main J., Wunner G. Relation between $\mathcal{PT}$-symmetry breaking and topologically nontrivial phases in the Su–Schrieffer–Heeger and Kitaev models // Physical Review A. 2017. Vol. 95. No. 5. 053626. https://doi.org/10.1103/physreva.95.053626
7. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. Приложение к № 10. С. 131–136. https://www.mathnet.ru/rus/ufn5648
8. Вальков В. В., Шустин М. С., Аксенов С. В., Злотников А. О., Федосеев А. Д., Мицкан В. А., Каган М. Ю. Топологическая сверхпроводимость и майорановские состояния в низкоразмерных системах // Успехи физических наук. 2022. Т. 192. № 1. С. 3–44. https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.03.038950
9. Тинюкова Т. С., Чубурин Ю. П. Майорановские состояния вблизи примеси в бесконечной и полубесконечной модели Китаева // Теоретическая и математическая физика. 2019. Т. 200. № 1. С. 137–146. https://doi.org/10.4213/tmf9585
10. Chuburin Yu. P., Tinyukova T. S. Zero-energy states in the Kitaev finite and semi-infinite model // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2023. Vol. 146. 115528. https://doi.org/10.1016/j.physe.2022.115528
11. von Oppen F., Peng Yang, Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension // Topological Aspects of Condensed Matter Physics: Lecture Notes of the Les Houches Summer School. Oxford: Oxford Academic, 2017. P. 387–450. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009
12. Beenakker C. W. J. Random-matrix theory of Majorana fermions and topological superconductors // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87. No. 3. P. 1037–1066. https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.1037

Поступила в редакцию 05.01.2025
Принята к публикации 08.03.2025

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1043-4753
E-mail: ttinyukova@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, УдмФИЦ УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2621-6892
E-mail: chuburin@ftiudm.ru

Цитирование: Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин. Исследование майорановских локализованных состояний в модели Китаева с мнимыми потенциалами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 129–136.

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 129–136.

T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin

Study of Majorana bound states in the Kitaev model with imaginary potentials

Keywords: Kitaev model, non-Hermiticity, Majorana bound states.

MSC2020: 81Q10, 81Q15, 47A10, 47A40

DOI: 10.35634/vm250108

We consider the infinite non-Hermitian finite-difference Kitaev model simulating a one-dimensional superconducting wire. Non-Hermitianity is introduced into the model using delta-shaped imaginary potentials that simulate the gains and losses of the amplitudes of Majorana bound states (MBS). In a rigorous mathematical approach, the conditions for the existence of eigenfunctions describing the MBSs are found, as well as the dependence of the eigenfunctions on the model parameters and the effect of non-Hermiticity on the MBSs. Two regimes are considered, near the topological interphase boundary and at zero chemical potential.

Funding. The research of Chuburin Yu. P. was supported by the Physical-Technical Institute of the Ural Branch of the RAS, registration number 124021900019-5. The research of Tinyukova T. S. was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment, project FEWS-2024-0009.

REFERENCES

1. Elliott S. R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, no. 1, pp. 137–163. https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.137
2. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, *Reports on Progress in Physics*, 2012, vol. 75, no. 7, 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
3. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors, *Journal of the Physical Society of Japan*, 2016, vol. 85, no. 7, 072001. https://doi.org/10.7566/jpsj.85.072001
4. Das Sarma S., Nag A., Sau J. D. How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires, *Physical Review B*, 2016, vol. 94, no. 3, 035143. https://doi.org/10.1103/physrevb.94.035143
5. Wang Xiaohui, Liu Tingting, Xiong Ye, Tong Peiqing. Spontaneous $\mathcal{PT}$-symmetry breaking in non-Hermitian Kitaev and extended Kitaev models, *Physical Review A*, 2015, vol. 92, no. 1, 012116. https://doi.org/10.1103/physreva.92.012116
6. Klett M., Cartarius H., Dast D., Main J., Wunner G. Relation between $\mathcal{PT}$-symmetry breaking and topologically nontrivial phases in the Su–Schrieffer–Heeger and Kitaev models, *Physical Review A*, 2017, vol. 95, no. 5, 053626. https://doi.org/10.1103/physreva.95.053626
7. Kitaev A. Yu. Unpaired Majorana fermions in quantum wires, *Physics-Uspekhi*, 2001, vol. 44, issue 10 suppl., pp. s131–s136. https://doi.org/10.1070/1063-7869/44/10s/s29
8. Val'kov V. V., Shustin M. S., Aksenov S. V., Zlotnikov A. O., Fedoseev A. D., Mitskan V. A., Kagan M. Yu. Topological superconductivity and Majorana states in low-dimensional systems, *Physics-Uspekhi*, 2022, vol. 65, no. 1, pp. 2–39. https://doi.org/10.3367/ufne.2021.03.038950
9. Tinyukova T. S., Chuburin Yu. P. Majorana states near an impurity in the Kitaev infinite and semi-infinite model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2019, vol. 200, issue 1, pp. 1043–1052. https://doi.org/10.1134/s0040577919070080
10. Chuburin Yu. P., Tinyukova T. S. Zero-energy states in the Kitaev finite and semi-infinite model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2023, vol. 146, 115528. https://doi.org/10.1016/j.physe.2022.115528
11. von Oppen F., Peng Yang, Pientka F. Topological superconducting phases in one dimension, *Topological Aspects of Condensed Matter Physics: Lecture Notes of the Les Houches Summer School*,

Oxford: Oxford Academic, 2017, pp. 387–450.
https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198785781.003.0009

12. Beenakker C. W. J. Random-matrix theory of Majorana fermions and topological superconductors, *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, no. 3, pp. 1037–1066.
https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.1037

Received 05.01.2025
Accepted 08.03.2025

Tatyana Sergeevna Tinyukova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426067, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1043-4753
E-mail: ttinyukova@mail.ru

Yurii Pavlovich Chuburin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2621-6892
E-mail: chuburin@ftiudm.ru

Citation: T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Study of Majorana bound states in the Kitaev model with imaginary potentials, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 129–136.