ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 137–154.

УДК 517.954

© *Б. Х. Турметов*

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

В настоящей работе с помощью отображений типа инволюции вводится нелокальный аналог оператора Лапласа. Для соответствующего нелокального аналога уравнения Пуассона в единичном шаре изучены новые классы краевых задач. В рассматриваемых задачах граничные условия заданы в виде связи значения искомой функции в верхней полусфере со значением в нижней полусфере. Исследуемые задачи обобщают известные периодические и антипериодические краевые задачи для круговых областей. Задачи решаются сведением их к двум вспомогательным задачам с краевыми условиями Дирихле и Неймана для нелокального аналога уравнения Пуассона. Используя известные утверждения для полученных вспомогательных задач, мы доказываем теоремы о существовании и единственности решения основных задач. Найдены точные условия разрешимости исследуемых задач, а также получены интегральные представления решений. Изучены также спектральные вопросы, связанные с периодическими задачами. Найдены собственные функции и собственные значения этих задач. Доказаны теоремы о полноте системы собственных функций в пространстве L_2.

Ключевые слова: инволюция, уравнение Пуассона, периодические условия, задача Дирихле, задача Неймана, собственные функции, собственные значения.

DOI: 10.35634/vm250109

Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n \colon |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geqslant 2$, $\partial\Omega$ — единичная сфера. В пространстве R^n рассмотрим отображения $S_j x = (x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Если i — некоторый индекс, то вместе с обычной записью мы будем использовать его представление в двоичной системе исчислении: $i = (i_n \ldots i_2 i_1)_2 \equiv i_n \cdot 2^{n-1} + \ldots + i_2 \cdot 2^1 + i_1 \cdot 2^0$. Используя эту запись, мы можем рассмотреть отображения вида $S_n^{i_n} \ldots S_2^{i_2} S_1^{i_1} x$, где $i_k = 0$ или $i_k = 1$. Общее количество таких отображений равняется 2^n.

Используя эти отображения, введем оператор

$$L_n u(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta) u\big(S_n^{i_n} \ldots S_2^{i_2} S_1^{i_1} x\big),$$

где a_i, $i = 0, 1, \ldots, 2^n-1$, — некоторый набор действительных чисел, Δ — оператор Лапласа.

Далее, для любой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ сопоставим «противоположную» ей точку $x^* = (-x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) \in \Omega$, где α_j, $j = 2, \ldots, n$, принимают одно из значений ± 1. Заметим, что точку x^* можно представить в виде $x^* = S_n^{j_n} \ldots S_2^{j_2} S_1^1 x$.

Обозначим

$$\partial\Omega_+ = \{x \in \partial\Omega \colon x_1 \geqslant 0\}, \quad \partial\Omega_- = \{x \in \partial\Omega \colon x_1 \leqslant 0\}, \quad I = \{x \in \partial\Omega \colon x_1 = 0\}.$$

Рассмотрим в области Ω следующую задачу.

Задача P**.** Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$L_n u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = g_0(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + (-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = g_1(x), \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{0.3}$$

где $k = 1$ или $k = 2$, ν — вектор нормали к сфере $\partial\Omega$, $f(x)$, $g_0(x)$ и $g_1(x)$ — заданные функции.

Очевидно, что необходимым условием существования решения из класса $C^1(\bar{\Omega})$ является выполнение условий согласования:

$$g_0(0,\tilde{x}) + (-1)^k g_0(0,\alpha\tilde{x}) = 0, \quad (0,\tilde{x}) \in I, \tag{0.4}$$

$$\frac{\partial g_0(0,\tilde{x})}{\partial x_j} + (-1)^k \frac{\partial g_0(0,\alpha\tilde{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (0,\tilde{x}) \in I, \tag{0.5}$$

$$g_1(0,\tilde{x}) - (-1)^k g_1(0,\alpha\tilde{x}) = 0, \quad (0,\tilde{x}) \in I. \tag{0.6}$$

В дальнейшем будем считать условия (0.4)–(0.6) выполненными.

Наряду с задачей P мы будем исследовать также следующую спектральную задачу.

Задача S**.** Необходимо найти функцию $u(x) \neq 0$ из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и число λ, удовлетворяющие условиям

$$L_n u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = (-1)^k u(x^*), \quad x \in \partial\Omega_+,$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = -(-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega_+,$$

где $k = 1$ или $k = 2$.

Отметим, что рассматриваемые нами дифференциальные уравнения относятся к классу уравнений, содержащих сдвиги аргументов. Причем, сдвиги аргументов осуществляются с помощью ортогональных преобразований. Такие уравнения широко применяются при описании различных моделей, например, при моделировании иммунных процессов [1], в моделях популяции [2,3], при моделировании динамики нелинейных оптических систем [4,5] и других. Заметим также, что в работе [6] описаны методы построения точных решений некоторых классов таких уравнений.

В рассматриваемых нами задачах граничные условия заданы в виде связи значений искомой функции в различных точках границы. Такие задачи принято называть нелокальными задачами типа Бицадзе–Самарского [7].

Краевые задачи с инволютивно преобразованными аргументами для классического уравнения Лапласа впервые изучены в работе D. Przeworska–Rolewicz [8]. В этой работе в двумерном случае исследованы нелокальные аналоги краевых задач Дирихле, Неймана и Робена. В дальнейшем аналогичные задачи в n-мерном случае для классического уравнения Пуассона были изучены в работе [9], а для нелокального аналога уравнения Пуассона — в работе [10]. Отметим также, что в работе [11] для уравнения Лапласа изучена нелокальная краевая задача, содержащая инволютивный сдвиг.

Краевые задачи с периодическими условиями в круговых областях в случае классического уравнения Пуассона впервые были изучены в работах [12,13], а для нелокального аналога уравнения Пуассона в случае $n = 2$ рассмотрены в работе [14]. В настоящей работе мы обобщаем результаты, полученные в [14], для общего n-мерного случая.

Заметим также, что некоторые обобщения нелокальных краевых задач с условиями типа Дирихле, Неймана и Робена, а также типа Самарского–Ионкина исследованы в работах [15–18].

Изложение статьи организовано следующим образом. Во введении приводятся постановки основных задач. В § 1 изложены вспомогательные утверждения относительно краевых задач с условиями Дирихле и Неймана для нелокального уравнения Пуассона. Приведены также свойства собственных функций задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа и их применения к краевым задачам с периодическими граничными условиями. В § 2 сначала доказывается теорема о единственности решения задачи P. Показано, что единственность решения задачи существенно зависит от коэффициентов оператора L_n. Далее, представим искомую функцию в виде суммы четной и нечетной части относительно отображений участвующих в граничных условиях задачи. Данное представление позволяет свести рассматриваемые задачи к двум вспомогательным задачам с условиями Дирихле и Неймана. С помощью теорем, изложенных в § 1, доказывается существование решений основных задач. Построены также явный вид функции Грина рассматриваемых задач. В § 3 изучены вопросы разрешимости спектральной задачи S. С помощью собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана построены собственные функции задачи S. Доказаны теоремы о полноте системы собственных функций задачи S. В конце статьи для случая $n = 2$ приведен пример о явном виде собственных функций и собственных значений основной задачи.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом пункте мы приведем некоторые известные утверждения о свойствах нелокального оператора Лапласа, о решениях основных краевых задач для нелокального уравнения Пуассона и о свойствах решений периодических краевых задач для уравнения Пуассона.

В работе [19] исследованы следующие задачи

$$L_n v(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad v(x)\big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_0(x), \tag{1.1}$$

$$L_n w(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial w(x)}{\partial r}\bigg|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_1(x). \tag{1.2}$$

При исследовании этих задач возникает матрица следующего вида

$$A_n = \big(a_{i,j}\big)_{i,j=0,\dots,2^n-1} = \big(a_{i\oplus j}\big)_{i,j=0,\dots,2^n-1}.$$

Здесь суммирование в нижнем индексе коэффициентов матрицы A_n понимается в следующем смысле: $i\oplus j \equiv (i)_2 \oplus (j)_2 = \big((i_n+j_n \bmod 2)\dots(i_1+j_1 \bmod 2)\big)_2$, $(i)_2 = (i_n \dots i_1)_2$ — запись индекса i в двоичной системе счисления.

Пусть S — ортогональная матрица и $I_S u(x) = u(Sx)$, $\Lambda u(x) = r\frac{\partial u(x)}{\partial r}$. В работе [9] доказано следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Оператор $I_S u(x) = u(Sx)$ и оператор Лапласа Δ коммутируют: $\Delta I_S u(x) = I_S \Delta u(x)$. Операторы $\Lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}(x)$ и I_S также коммутируют: $\Lambda I_{S_j} u(x) = I_{S_j} \Lambda u(x)$.*

Из этой леммы следует, что если $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω, то функция $u\big(S_n^{i_n}\dots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\big) \equiv I_{S_n^{i_n}\dots S_2^{i_2}S_1^{i_1}} u(x)$ также является гармонической в Ω и, следовательно, удовлетворяет уравнению $L_n u(x) = 0$, $x \in \Omega$.

Верно и обратное утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть* $\varepsilon_k = \sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i$, $k=0,1,\dots,2^n-1$, *и функция* $u(x)$ *удовлетворяет уравнению* $L_n u(x)=0$, $x\in\Omega$. *Тогда при выполнении условий* $\varepsilon_k\neq 0$, $k=0,1,\dots,2^n-1$, *функция* $u(x)$ *является гармонической в* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция является решением уравнения $L_n u(x)=0$, $x\in\Omega$. Обозначим $v(x)=\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}a_i u\big(S_n^{i_n}\dots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\big)$. Очевидно, что $\Delta v(x)=0$, $x\in\Omega$. Рассмотрим векторы

$$U(x)=\big(u(x),\dots,u\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x\big),\dots,u\big(S_n^1\dots S_1^1x\big)\big)^T,$$
$$V(x)=\big(v(x),\dots,v\big(S_n^{j_n}\dots S_1^{j_1}x\big),\dots,v\big(S_n^1\dots S_1^1x\big)\big)^T.$$

В работе [19] доказано, что $\det A_n=\prod\limits_{k=0}^{2^n-1}\varepsilon_k$ и между векторами $U(x)$ и $V(x)$ можно установить линейную зависимость, которая выражается в матричной форме

$$V(x)=A_nU(x). \tag{1.3}$$

Тогда при выполнении условий $\varepsilon_k\neq 0$, $k=0,1,\dots,2^n-1$, обратная к A_n матрица существует и имеет такую же структуру, как матрица A_n. Таким образом, при выполнении этих условий из (1.3) получаем равенство

$$U(x)=A_n^{-1}V(x).$$

В частности, функция $u(x)$ выражается через функцию $v(x)$ по формуле

$$u(x)=\sum_{i=0}^{2^n-1}b_i v\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x\big),$$

где коэффициенты b_j, $j=0,1,\dots,2^n-1$, являются элементами первой строки матрицы, обратной к матрице A_n. Теперь, если применим к функции $u(x)$ оператор Δ, то $\Delta u(x)=0$, $x\in\Omega$. Лемма доказана. □

Пример 1.1. Если $n=2$, то оператор L_2 имеет вид

$$L_2u(x)=a_{(00)_2}\Delta u\big(S_2^0S_1^0x\big)+a_{(01)_2}\Delta u\big(S_2^0S_1^1x\big)+a_{(10)_2}\Delta u\big(S_2^1S_1^0x\big)+a_{(11)_2}\Delta u\big(S_2^1S_1^1x\big)$$

или, что то же самое,

$$L_2u(x)=a_0\Delta u(x_1,x_2)+a_1\Delta u(-x_1,x_2)+a_2\Delta u(x_1,-x_2)+a_3\Delta u(-x_1,-x_2).$$

Соответствующая матрица A_2 представляется в виде

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{(00)_2\oplus(00)_2} & a_{(00)_2\oplus(01)_2} & a_{(00)_2\oplus(10)_2} & a_{(00)_2\oplus(11)_2}\\ a_{(01)_2\oplus(00)_2} & a_{(01)_2\oplus(01)_2} & a_{(01)_2\oplus(10)_2} & a_{(01)_2\oplus(11)_2}\\ a_{(10)_2\oplus(00)_2} & a_{(10)_2\oplus(01)_2} & a_{(10)_2\oplus(10)_2} & a_{(10)_2\oplus(11)_2}\\ a_{(11)_2\oplus(00)_2} & a_{(11)_2\oplus(01)_2} & a_{(11)_2\oplus(10)_2} & a_{(11)_2\oplus(11)_2}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0\end{pmatrix}.$$

В этом случае $\varepsilon_k=\sum\limits_{i=0}^{3}(-1)^{k\otimes i}a_i$, $k=0,1,2,3$, имеют вид

$$\begin{cases}\varepsilon_0\equiv\varepsilon_{(00)_2}=a_0+a_1+a_2+a_3,\\ \varepsilon_1\equiv\varepsilon_{(01)_2}=a_0-a_1+a_2-a_3,\\ \varepsilon_2\equiv\varepsilon_{(10)_2}=a_0+a_1-a_2-a_3,\\ \varepsilon_3\equiv\varepsilon_{(11)_2}=a_0-a_1-a_2+a_3.\end{cases}$$

Пусть $P(x,y)$ — ядро Пуассона, $G_D(x,y)$ и $G_N(x,y)$ — функции Грина классических задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Отметим, что в случае шара явный вид функции $G_D(x,y)$ приведен в учебниках по уравнениям математической физики (см., например, [20, с. 47]), а функция $G_N(x,y)$ построена в работе [21].

Приведем основные утверждения относительно задач (1.1) и (1.2), доказанные в работе [19].

Лемма 1.3. *Пусть $f(x) \in C^\delta(\bar\Omega)$, $\tilde g_0(x) \in C^{1+\delta}(\partial\Omega)$, $0<\delta<1$, коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i \neq 0$, $k=0,1,\dots,2^n-1$. Тогда решение задачи (1.1) существует, единственно и представляется в виде*

$$v(x)=\int\limits_{\Omega} G_S(x,y)f(y)\,dy+\int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\tilde g(y)\,dy,$$

где

$$G_S(x,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_D\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x,y\big),$$

а коэффициенты b_k, $k=0,1,\dots,2^n-1$, являются элементами первой строки матрицы, обратной к матрице A_n.

Лемма 1.4. *Пусть $f(x)\in C^\delta\big(\bar\Omega\big)$, $\tilde g_0(x)\in C^{1+\delta}\big(\partial\Omega\big)$, $0<\delta<1$, коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия $\varepsilon_k=\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i\neq 0$, $k=0,1,\dots,2^n-1$. Тогда для разрешимости задачи (1.2) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\Omega} f(y)\,dy+\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\right)\int\limits_{\partial\Omega}\tilde g(y)\,dS_y=0.$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$w(x)=\int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y)f(y)\,dy+\int\limits_{\partial\Omega} G_{N,S,n}(x,y)\tilde g_1(y)\,dS_y+C,$$

где

$$\begin{gathered} G_{N,S}(x,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i G_N\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}\big),\\ G_{N,S,n}(x,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k b_i G_N\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x, S_n^{k_n}\dots S_1^{k_1}y\big). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Пример 1.2. Пусть $x^*=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$, $H_m(x)$ — однородный гармонический полином степени m. Рассмотрим функцию $v(x)=\big(1-|x|^2\big)H_m(x)$. Очевидно, что $v(x)\Big|_{\partial\Omega}=0$. Кроме того,

$$\Delta v(x)=\Delta H_m(x)-\Delta\big(|x|^2H_m(x)\big)=-2(2m+n)H_m(x).$$

Отсюда

$$a_0\Delta v(x)+a_1\Delta v(x^*)=-2(2m+n)[a_0H_m(x)+a_1H_m(x^*)].$$

Теперь, если полином $H_m(x)$ обладает свойством $H_m(x) = H_m(x^*)$ и $a_0 + a_1 = 0$, то получаем, что функция $v(x) = \big(1 - |x|^2\big)H_m(x)$ является решением следующей однородной задачи

$$a_0\Delta v(x) + a_1\Delta v(x^*) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Из этого примера следует, что если коэффициенты оператора L_n такие, что выполняется условие $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k_n i_n + \ldots + k_1 i_1} a_i = 0$, то однородные задачи (1.1) и (1.2) могут иметь бесконечно много решений.

Пусть

$$f^{\pm}(x) = \frac{1}{2}[f(x) \pm f(x^*)], \quad \tilde{g}^{\pm}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \partial\Omega_+, \\ \pm g(x^*), & x \in \partial\Omega_-. \end{cases}$$

Следующее утверждение доказано в работе [22, лемма 3.1].

Лемма 1.5. *Для функций $f^{\pm}(x)$ и $\tilde{g}^{\pm}(x)$ справедливы следующие равенства:*

$$\int\limits_{\Omega} f^+(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{\Omega} f^-(x)\,dx = 0, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \tilde{g}^+(x)\,dS_x = \int\limits_{\partial\Omega_+} g(x)\,dS_x, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} \tilde{g}^-(x)\,dS_x = 0. \tag{1.6}$$

В дальнейшем при исследовании спектральной задачи S нам понадобятся некоторые свойства собственных функций краевых задач Дирихле и Неймана для классического оператора Лапласа.

Пусть $v_k^D(x)$ и μ_k^D являются собственными функциями и собственными значениями задачи Дирихле

$$-\Delta v(x) = \mu v(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.7}$$

а $v_k^N(x)$ и μ_k^N являются собственными функциями и собственными значениями задачи Неймана

$$-\Delta v(x) = \mu v(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.8}$$

В работе [12] доказано следующее утверждение.

Лемма 1.6. *Все собственные функции задачи Дирихле* (1.7) *и задачи Неймана* (1.8) *можно выбрать так, чтобы они обладали одним из свойств симметрии:*

$$v(x) + v(x^*) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.9}$$

или

$$v(x) - v(x^*) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.10}$$

Утверждения этой леммы были использованы для нахождения собственных функций и собственных значений следующей спектральной задачи

$$-\Delta u(x) = \mu u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.11}$$

$$u(x) - (-1)^k u(x^*) = 0, \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + (-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega_+, \tag{1.13}$$

где $k = 1$ или $k = 2$.

Теорема 1.1. *Пусть $k = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *система собственных функций задачи* (1.11)–(1.13) *состоит только из собственных функций задачи Дирихле* (1.7)*, обладающих свойством симметрии* (1.10)*, и из собственных функций краевой задачи Неймана* (1.8)*, обладающих свойством симметрии* (1.9)*;*

(2) *система собственных функций задачи* (1.11)–(1.13) *образует ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$.

Теорема 1.2. *Пусть $k = 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *система собственных функций задачи* (1.11)–(1.13) *состоит только из собственных функций задачи Дирихле* (1.7)*, обладающих свойством симметрии* (1.9)*, и из собственных функций краевой задачи Неймана* (1.8)*, обладающих свойством симметрии* (1.10)*;*

(2) *система собственных функций задачи* (1.11)–(1.13) *образует ортогональный базис в* $L_2(\Omega)$.

§ 2. Исследование задачи P

Сначала исследуем единственность решения задачи P. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия*

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{p\otimes i} a_i \neq 0, \quad p = 0, 1, \ldots, 2^n - 1,$$

и пусть решение задачи P существует. Тогда

(1) *если $k = 1$, то решение единственно;*

(2) *если $k = 2$, то решение единственно с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Пусть функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ является решением однородной задачи P. Так как $L_n u(x) = 0$, $x \in \Omega$, то по утверждению леммы 1.2 при выполнении условия $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k\otimes i} a_i \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, функция $u(x)$ является гармонической в Ω. Следовательно, $u(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}
\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\
u(x) - (-1)^k u(x^*) = 0, \quad x \in \partial\Omega_+, \\
\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + (-1)^k \frac{\partial u(x^*)}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega_+.
\end{gathered}$$

Теперь утверждение теоремы следует из результатов работы [13]. Теорема доказана. □

Далее переходим к исследованию существования решении задачи P. В случае $k = 1$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $k=1$, коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия* $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{k\otimes i}a_i\neq 0$, $k=0,1,\ldots,2^n-1$, *и пусть* $f(x)\in C^{\delta}(\bar\Omega)$, $g_0(x)\in C^{1+\delta}(\partial\Omega_+)$, $g_1(x)\in C^{\delta}(\partial\Omega_+)$, $0<\delta<1$. *Тогда решение задачи P существует, единственно и представляется в виде*

$$u(x)=\int\limits_{\Omega}G_{D,N,1}(x,y)f(y)\,dy+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[P(x,y)+P(x^*,y)\big]g_0(y)\,dS_y+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[G_{N,S,n}(x,y)-G_{N,S,n}(x^*,y)\big]g_1(y)\,dS_y, \tag{2.1}$$

где $G_{N,S,n}(x,y)$ определяется равенством (1.4), *а функция $G_{D,N,1}(x,y)$ имеет вид*

$$G_{D,N,1}(x,y)=\sum_{i=0}^{2^n-1}b_i\Big[G_D\big(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x,y\big)+G_D\big(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x,y^*\big)+ \\ +G_N\big(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x,y\big)-G_N\big(S_n^{i_n}\ldots S_1^{i_1}x,y^*\big)\Big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x)$ является решением задачи P в случае $k=1$. Введем следующие функции

$$v(x)=\frac{1}{2}\big[u(x)+u(x^*)\big],\quad w(x)=\frac{1}{2}\big[u(x)-u(x^*)\big].$$

Очевидно, что $u(x)=v(x)+w(x)$. Кроме того, функции $v(x)$ и $w(x)$ обладают свойствами $v(x)=v(x^*)$, $w(x)=-w(x^*)$.

По предположению функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (0.1), то есть

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta u\big(S_n^{i_n}\ldots S_2^{i_2}S_1^{1}x\big)=f(x),\quad x\in\Omega.$$

В силу утверждения леммы 1.1 операторы $I_{S_n^{j_n}\ldots S_2^{j_2}S_1^1}$ и Δ коммутируют. Тогда в точке $x^*=S_n^{j_n}\ldots S_2^{j_2}S_1^1x$ имеем

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta u\big(S_n^{i_n}\ldots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x^*\big)=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta I_{S_n^{j_n}\ldots S_2^{j_2}S_1^1}u\big(S_n^{i_n}\ldots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\big)= \\ =I_{S_n^{j_n}\ldots S_2^{j_2}S_1^1}\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\Delta u\big(S_n^{i_n}\ldots S_2^{i_2}S_1^{i_1}x\big)=f(x^*).$$

Отсюда для функций $v(x)$ и $w(x)$ получаем

$$L_nv(x)=\frac{1}{2}\big[L_nu(x)+L_nu(x^*)\big]=\frac{1}{2}\big[f(x)+f(x^*)\big]\equiv f^+(x),\quad x\in\Omega, \\ L_nw(x)=\frac{1}{2}\big[L_nu(x)-L_nu(x^*)\big]=\frac{1}{2}\big[f(x)-f(x^*)\big]\equiv f^-(x),\quad x\in\Omega.$$

Далее, если $x\in\partial\Omega_+$, то в силу условия (0.2) имеем

$$v(x)\Big|_{\partial\Omega_+}=\frac{1}{2}[u(x)+u(x^*)]\Big|_{\partial\Omega_+}=\frac{1}{2}g_0(x),$$

а если $x \in \partial\Omega_-$, то $x^* \in \partial\Omega_+$ и поэтому

$$v(x)\Big|_{x\in\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}[u(x)+u(x^*)]\Big|_{x\in\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}[u(x^*)+u(x)]\Big|_{x^*\in\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}g_0(x^*).$$

Аналогичным образом для функции $w(x)$ в силу условия (0.3) имеем

$$\frac{\partial w(x)}{\partial r}\bigg|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial r} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial r}\right]\bigg|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}g_1(x),$$

$$\frac{\partial w(x)}{\partial r}\bigg|_{x\in\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial r} - \frac{\partial u(x^*)}{\partial r}\right]\bigg|_{x\in\partial\Omega_-} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x^*)}{\partial r} + \frac{\partial u(x)}{\partial r}\right]\bigg|_{x^*\in\partial\Omega_+} = -\frac{1}{2}g_1(x^*).$$

Введем функции

$$\tilde g_0(x) = \begin{cases} g_0(x)/2, & x\in\partial\Omega_+,\\ g_0(x^*)/2, & x\in\partial\Omega_-,\end{cases} \qquad \tilde g_1(x) = \begin{cases} g_1(x)/2, & x\in\partial\Omega_+,\\ -g_1(x^*)/2, & x\in\partial\Omega_-.\end{cases}.$$

Тогда для функций $v(x)$ и $w(x)$ получаем следующие задачи:

$$L_n v(x) = f^+(x), \quad x\in\Omega, \quad v(x)\Big|_{\partial\Omega} = \tilde g_0(x), \tag{2.2}$$

$$L_n w(x) = f^-(x), \quad x\in\Omega, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial r}\bigg|_{\partial\Omega} = \tilde g_1(x). \tag{2.3}$$

Если функции $f(x)$, $g_0(x)$ и $g_1(x)$ обладают гладкостью, указанной в теореме 2.1, и выполняются условия согласования (0.4)–(0.6), то $f^\pm(x) \in C^\delta(\bar\Omega))$, $\tilde g_0(x) \in C^{1+\delta}(\partial\Omega)$ и $\tilde g_1(x) \in C^\delta(\partial\Omega)$. При этих данных по утверждению леммы 1.3 решение задачи (2.2) существует, единственно и представляется в виде

$$v(x) = \int\limits_\Omega G_S(x,y)f^+(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega_+} P(x,y)\tilde g(y)\,dS_y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega G_S(x,y)\big[f(y)+f(y^*)\big]\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} P(x,y)g_0(y)\,dS_y + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_-} P(x,y)g_0(y^*)\,dS_y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \big[G_S(x,y)+G_S(x,y^*)\big]f(y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[P(x,y)+P(x,y^*)\big]g_0(y)\,dS_y.$$

Аналогично, по утверждению леммы 1.4, для разрешимости задачи (2.3) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_\Omega f^-(y)\,dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right)\int\limits_{\partial\Omega}\tilde g_1(y)\,dS_y = 0. \tag{2.4}$$

Из равенств (1.5) и (1.6) для функций $f^-(y)$ и $\tilde g_1(y)$ получаем

$$\int\limits_\Omega f^-(y)\,dy = 0, \qquad \int\limits_{\partial\Omega}\tilde g_1(y)\,dS_y = 0,$$

то есть условие разрешимости (2.4) выполнено. Поэтому решение задачи (2.3) существует и единственно с точностью до постоянного слагаемого. Так как функция $w(x)$ обладает свойством $w(x^*) = -w(x)$, то это возможно только в случае $C \equiv 0$.

С учетом этих условий функция $w(x)$ представляется в виде

$$w(x) = \int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y) f^-(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} G_{N,S,n}(x,y)\tilde{g}_1(y)\,dS_y = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y)\big[f(y) - f(y^*)\big]\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} G_{N,S,n}(x,y) g_1(y)\,dS_y - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_-} G_{N,S,n}(x,y) g_1(y^*)\,dS_y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\big[G_{N,S}(x,y) - G_{N,S}(x,y^*)\big] f(y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[G_{N,S,n}(x,y) - G_{N,S,n}(x^*,y)\big] g_1(y)\,dS_y.$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы решение задач (2.2) и (2.3) существует и единственно. Построенная по этим решениям функция $u(x) = v(x) + w(x)$ удовлетворяет всем условиям задачи P при $k = 1$. Из представления функций $v(x)$ и $w(x)$ для $u(x)$ получаем

$$u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\big[G_S(x,y) + G_S(x,y^*)\big] f(y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[P(x,y) + P(x^*,y)\big] g_0(y)\,dS_y +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\big[G_{N,S}(x,y) - G_{N,S}(x,y^*)\big] f(y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[G_{N,S,n}(x,y) - G_{N,S,n}(x^*,y)\big] g_1(y)\,dS_y =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{2^n-1} b_i\Big[G_D\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x, y\big) + G_D\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x, y^*\big) +$$

$$+ G_N\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x, y\big) - G_N\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x, y^*\big)\Big] f(y)\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[P(x,y) + P(x^*,y)\big] g_0(y)\,dS_y + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+}\big[G_{N,S,n}(x,y) - G_{N,S,n}(x^*,y)\big] g_1(y)\,dS_y.$$

Отсюда получаем представление (2.1). Теорема доказана. □

Далее, исследуем существование решение задачи P в случае $k = 2$. В этом случае рассмотрим функции

$$v(x) = \frac{1}{2}[u(x) - u(x^*)], \qquad w(x) = \frac{1}{2}[u(x) + u(x^*)].$$

Тогда для них получаем следующие задачи

$$L_n v(x) = f^-(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x)\Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_0(x), \tag{2.5}$$

$$L_n w(x) = f^+(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial r}\Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}_1(x), \tag{2.6}$$

где функции $\tilde{g}_0(x)$ и $\tilde{g}_1(x)$ определяются равенствами

$$\tilde{g}_0(x) = \begin{cases} g_0(x)/2, & x \in \partial\Omega_+, \\ -g_0(x^*)/2, & x \in \partial\Omega_-, \end{cases} \qquad \tilde{g}_1(x) = \begin{cases} g_1(x)/2, & x \in \partial\Omega_+, \\ g_1(x^*)/2, & x \in \partial\Omega_-. \end{cases}$$

В этом случае по утверждению леммы 1.3 при выполнении условий $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{p\otimes i}a_i \neq 0$, $p = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, для достаточно гладких функций $f^{\pm}(x)$, $\tilde{g}_0(x)$ и $\tilde{g}_1(x)$ решение задачи (2.5) существует, единственно и представляется в виде

$$v(x) = \int\limits_{\Omega} G_S(x,y) f^-(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\tilde{g}_0(y)\, dS_y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} G_S(x,y)\big[f(y) - f(y^*)\big]\, dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} P(x,y) g_0(y)\, dS_y - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_-} P(x,y) g_0(y^*)\, dS_y =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \big[G_S(x,y) - G_S(x,y^*)\big] f(y)\, dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} \big[P(x,y) - P(x^*,y)\big] g_0(y)\, dS_y.$$

Аналогично, по утверждению леммы 1.4, для разрешимости задачи (2.6) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} f^+(y)\, dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right) \int\limits_{\partial\Omega} \tilde{g}_1(y)\, dS_y = 0. \tag{2.7}$$

Используя равенства (1.5) и (1.6), условие (2.7) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega} f(y)\, dy + \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\right) \int\limits_{\partial\Omega_+} g_1(y)\, dS_y = 0. \tag{2.8}$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$w(x) = \int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y) f^+(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega} G_{N,S,n}(x,y)\tilde{g}_1(y)\, dS_y + C =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} G_{N,S}(x,y)\big[f(y) + f(y^*)\big]\, dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} G_{N,S,n}(x,y) g_1(y)\, dS_y +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_-} G_{N,S,n}(x,y) g_1(y^*)\, dS_y + C = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \big[G_{N,S}(x,y) + G_{N,S}(x,y^*)\big] f(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} \big[G_{N,S,n}(x,y) + G_{N,S,n}(x^*,y)\big] g_1(y)\, dS_y + C.$$

Сформулируем основное утверждение относительно задачи P в случае $k = 2$.

Теорема 2.3. *Пусть $k = 2$, коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{p\otimes i} a_i \neq 0$, $p = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, и $f(x) \in C^\delta(\bar{\Omega})$, $g_0(x) \in C^{1+\delta}(\partial\Omega_+)$, $g_1(x) \in C^\delta(\partial\Omega_+)$, $0 < \delta < 1$. Тогда для разрешимости задачи P необходимо и достаточно выполнение условия (2.8). Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G_{D,N,2}(x,y) f(y)\, dy + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} \big[P(x,y) - P(x^*,y)\big] g_0(y)\, dS_y +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_+} \big[G_{N,S,n}(x,y) + G_{N,S,n}(x^*,y)\big] g_1(y)\, dS_y + C,$$

где $G_{N,S,n}(x,y)$ *определяется равенством* (1.4)*, а функция* $G_{D,N,2}(x,y)$ *имеет вид*

$$G_{D,N,2}(x,y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} b_i \Big[G_D\big(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y\big) - G_D\big(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y^*\big) + \\ + G_N\big(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y\big) + G_N\big(S_n^{i_n} \dots S_1^{i_1} x, y^*\big)\Big].$$

§ 3. Исследование спектральной задачи

В этом параграфе мы исследуем спектральную задачу S.

Пусть $k = 1$. Обозначим через $w_{m,0}(x)$, $m \geqslant 1$, собственные функции задачи (1.7) со свойством симметрии (1.10), а через $w_{m,1}(x)$, $m \geqslant 1$, собственные функции задачи (1.8) со свойством симметрии (1.9). Соответствующие им собственные значения обозначим через $\mu_{m,0}$ и $\mu_{m,1}$. По утверждению теоремы 1.1 система $\{w_{k,0}(x), w_{k,1}(x)\}$ образует совокупность собственных функций, а $\{\mu_{m,0}, \mu_{m,1}\}$ образует множество соответствующих им собственных значений задачи (1.11)–(1.13). Причем, система $\{w_{k,0}(x), w_{k,1}(x)\}$ образует ортогональный базис в $L_2(\Omega)$.

Пусть $p, q \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ и $p \otimes q = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n$, $p = (p_n \dots p_1)_2$, $q = (q_n \dots q_1)_2$. Введем следующие функции

$$u_{m,p,j}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} w_{m,j}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big), \quad j = 0, 1. \tag{3.1}$$

Сначала покажем, что функции $u_{m,p,0}(x)$ обладают свойством симметрии (1.10). Действительно, из условия $w_{m,0}(x) = w_{m,0}(x^*)$ следует $w_{m,0}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) = w_{m,0}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x^*\big)$. Тогда

$$u_{m,p,0}(x) - u_{m,p,0}(x^*) = \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} w_{m,0}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) - \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} w_{m,0}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x^*\big) = \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} \big[w_{m,0}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) - w_{m,0}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x^*\big)\big] = 0.$$

Следовательно $u_{m,p,0}(x) = u_{m,p,0}(x^*)$.

Аналогично показываем, что функция $u_{m,p,1}(x)$ обладает свойством симметрии (1.9), то есть $u_{m,p,1}(x) = -u_{m,p,1}(x^*)$. Отсюда получаем, что функции $u_{m,p,0}(x)$ и $u_{m,p,1}(x)$ удовлетворяют граничным условиям (0.2) и (0.3).

Далее, так как $-\Delta w_{m,j}(x) = \mu_{m,j} w_{m,j}(x)$, $j = 0, 1$, и $-\Delta\big(w_{m,j}(S_j x)\big) = \mu_{m,j} w_{m,j}(S_j x)$, $j = 0, 1$, то для любого $q \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ имеет место равенство

$$-\Delta w_{m,j}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) = \mu_{m,j} w_{m,j}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big), \quad x \in \Omega.$$

Тогда

$$-\Delta u_{m,p,j}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} (-\Delta) w_{m,j}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) = \\ = \frac{\mu_{m,j}}{2^n} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} w_{m,j}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) = \mu_{m,j} u_{m,p,j}(x). \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что функции $u_{m,p,0}(x)$ и $u_{m,p,1}(x)$ являются собственными функциями задачи (1.11)–(1.13) при $k=1$. Далее, из равенства (3.2) имеем

$$-\Delta u_{m,p,j}(S_1^1 x) = \frac{1}{2^n}\sum_{q=0}^{2^n-1}(-1)^{p\otimes q}(-\Delta)w_{m,j}\big(S_n^{q_n}\dots S_1^{q_1+1}x\big) = \\ = \frac{\mu_{m,j}}{2^n}\sum_{q=0}^{2^n-1}(-1)^{p_1q_1+p_1+p_2q_2+\ldots+p_nq_n}w_{m,j}\big(S_n^{q_n}\dots S_1^{q_1}x\big) = (-1)^{p_1}\mu_{m,j}u_{m,p,j}(x). \tag{3.3}$$

Из равенств (3.2) и (3.3) при $i_1=0$ или $i_1=1$ следует

$$-\Delta u_{m,p,j}(S_1^{i_1}x) = (-1)^{p_1 i_1}\mu_{m,j}u_{m,p,j}(x).$$

Отсюда в общем случае получаем

$$-\Delta u_{m,p,j}\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x\big) = (-1)^{p_n i_n+\ldots+p_1 i_1}\mu_{m,j}u_{m,p,j}(x) \equiv (-1)^{p\otimes i}\mu_{m,j}u_{m,p,j}(x).$$

Тогда, применяя к функции $u_{m,p,j}(x)$ оператор L_n, имеем

$$L_n u_{m,p,j}(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1}a_i(-\Delta)u_{m,p,j}\big(S_n^{i_n}\dots S_1^{i_1}x\big) = \mu_{m,j}\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{i\otimes p}a_i u_{m,p,j}(x) = \\ = \mu_{m,j}\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{i\otimes p}a_i\right)u_{m,p,j}(x) = \lambda_{m,p,j}u_{m,p,j}(x),$$

где

$$\lambda_{m,p,j} = \mu_{m,j}\varepsilon_p,\, \varepsilon_p = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1}(-1)^{i\otimes p}a_i\right).$$

Таким образом, мы показали, что функции $u_{m,p,j}(x)$, $j=0,1$, при всех $m\geqslant 1$, $p=0,1,\ldots,2^n-1$, удовлетворяют условиям

$$L_n u_{m,p,j}(x) = \lambda_{m,p,j}u_{m,p,j}(x), \quad x\in\Omega, \\ u_{m,p,j}(x)+u_{m,p,j}(x^*)\Big|_{\partial\Omega_+} = 0, \qquad \frac{\partial u_{m,p,j}(x)}{\partial r} - \frac{\partial u_{m,p,j}(x^*)}{\partial r}\Big|_{\partial\Omega_+} = 0.$$

Выполнение этих условий означает, что $u_{m,p,j}(x)$, $j=0,1$, при всех $m\geqslant 1$, $p=0,1,\ldots,$ $\ldots,2^n-1$, являются собственными функциями задачи S в случае $k=1$. Далее, покажем полноту системы (3.1). Предположим, что $g(x)\in L_2(\Omega)$ ортогональна всем функциям системы $\big\{u_{m,p,0}(x),u_{m,p,1}(x)\big\}$. Тогда

$$0 = (u_{m,p,j},g) = \int_\Omega u_{m,p,j}(x)\bar g(x)\,dx = \int_\Omega\left[\frac{1}{2^n}\sum_{q=0}^{2^n-1}(-1)^{\otimes q}w_{m,j}\big(S_n^{q_n}\dots S_1^{q_1}x\big)\right]\bar g(x)\,dx = \\ = \int_\Omega w_{m,j}(x)\left[\frac{1}{2^n}\sum_{q=0}^{2^n-1}(-1)^{p\otimes q}\bar g\big(S_n^{q_n}\dots S_1^{q_1}x\big)\right](x)\,dx, \quad j=0,1, \quad m\in N.$$

Так как система $\big\{w_{m,0}(x),w_{m,1}(x)\big\}_{m\in N}$ полна в $L_2(\Omega)$, то для почти всех $x\in\Omega$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2^n}\sum_{q=0}^{2^n-1}(-1)^{p\otimes q}\bar g\big(S_n^{q_n}\dots S_1^{q_1}x\big) = 0. \tag{3.4}$$

Просуммируем равенство (3.4) по всем $0 \leqslant p \leqslant 2^n - 1$:

$$0 = \sum_{p=0}^{2^n-1} \sum_{q=0}^{2^n-1} (-1)^{p \otimes q} \bar{g}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) = \sum_{q=0}^{2^n-1} \bar{g}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) \sum_{p=0}^{2^n-1} (-1)^{p_1 q_1 + \dots + p_n q_n}. \tag{3.5}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{p=0}^{2^n-1} (-1)^{p_1 q_1 + \dots + p_n q_n} = \sum_{p_n=0}^{1} (-1)^{p_1 q_1} \dots \sum_{p_1=0}^{1} (-1)^{p_n q_n}.$$

Так как

$$\sum_{p_1=0}^{1} (-1)^{p_1 q_1} = \begin{cases} 2, & q_1 = 0, \\ 0, & q_1 = 1, \end{cases}$$

то

$$\sum_{p=0}^{2^n-1} (-1)^{p_1 q_1 + \dots + p_n q_n} = \begin{cases} 2^n, & q = (q_1, \dots, q_n) = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{q=0}^{2^n-1} \bar{g}\big(S_n^{q_n} \dots S_1^{q_1} x\big) \sum_{k=0}^{2^l-1} (-1)^{p_1 q_1 + \dots + p_n q_n} = 2^n \bar{g}\big(S_n^0 \dots S_1^0 x\big) = 2^n \bar{g}(x),$$

а значит, подставляя найденное значение в (3.5), получим $g(x) = 0$. Следовательно, система $\big\{u_{m,p,0}(x), u_{m,p,1}(x)\big\}$ полна в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче S коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия $\varepsilon_p \neq 0$, $p = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, и $k = 1$. Кроме того, пусть $w_{m,0}(x)$, $m \geqslant 1$, — собственные функции задачи Дирихле (1.7) со свойством симметрии (1.10), и $w_{m,1}(x)$, $m \geqslant 1$, — собственные функции задачи Неймана (1.8) со свойством симметрии (1.9), а $\mu_{m,0}$ и $\mu_{m,1}$ — соответствующие им собственные значения. Тогда*

(1) *функции $u_{m,p,j}(x)$, $j = 0, 1$, из (3.1) являются собственными функциями задачи S, соответствующие им собственные значения определяются равенствами $\lambda_{m,p,j} = \mu_{m,j} \varepsilon_p$, $m \geqslant 1$, $p = 0, 1, \dots, 2^n - 1$;*

(2) *система $u_{m,p,j}(x)$, $j = 0, 1$, является полной в пространстве $L_2(\Omega)$.*

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть в задаче S коэффициенты оператора L_n такие, что выполняются условия $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{i \otimes p} a_i \neq 0$ и $k = 2$. Кроме того, пусть $w_{m,0}(x)$, $m \geqslant 1$, — собственные функции задачи Дирихле (1.7) со свойством симметрии (1.9), и $w_{m,1}(x)$, $m \geqslant 1$, — собственные функции задачи Неймана (1.8) со свойством симметрии (1.10), а $\mu_{m,0}$ и $\mu_{m,1}$ — соответствующие им собственные значения. Тогда*

(1) *функции $u_{m,p,j}(x)$, $j = 0, 1$, определяемые формулой (3.1), являются собственными функциями задачи S, соответствующие им собственные значения имеют вид $\lambda_{m,p,j} = \mu_{m,j} \varepsilon_p$, $m \geqslant 1$, $p = 0, 1, \dots, 2^n - 1$;*

(2) *система* $u_{m,p,j}(x)$, $j=0,1$, *является полной в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Пример 3.1. Пусть $n=2$, $k=1$, $x^*=(-x_1,-x_2)$. Тогда, как показано в работе [13], в полярной системе координат $x_1=r\cos\varphi, x_2=r\sin\varphi$ собственные функции задачи Дирихле (1.7) и задачи Неймана (1.8) задаются в виде

$$v^{(1)}_{m,s}(r,\varphi)=R_{m,s}(r)\cos m\varphi,\quad m=0,1,\ldots,$$
$$v^{(2)}_{m,s}(r,\varphi)=R_{m,s}(r)\sin m\varphi,\quad m=1,2,\ldots,\quad s=1,2,\ldots,$$

где $R_{m,s}(r)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\left|J'_m\left(\mu_s^{(m)}\right)\right|}J_m\left(\mu_s^{(m)}r\right)$, $J_m(t)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(i+m)!i!}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2i+m}$ — функция Бесселя.

Здесь через $\mu_s^{(m)}$ при $m=2j$ обозначены корни уравнения $J_m(t)=0$, а при $m=2j+1$ — корни уравнения $J'_m(t)=0$. Собственными значениями задачи будут $\mu_{m,s}=\left[\mu_s^{(m)}\right]^2$. Тогда собственные функции $u_{m,p,s}(x)$ и собственные значения $\lambda_{m,p,s}$ задачи S определяются равенствами:

$$u^{(1)}_{2m,0,s}(x)=R_{2m,s}(r)\cos 2m\varphi,\qquad \lambda_{2m,0,s}=\varepsilon_0\mu_{2m,s},$$
$$u^{(2)}_{2m+1,0,s}(x)=R_{2m+1,s}(r)\sin(2m+1)\varphi,\qquad \lambda_{2m+1,0,s}=\varepsilon_2\mu_{2m+1,s},$$
$$u^{(1)}_{2m+1,0,s}(x)=R_{2m,s}(r)\cos(2m+1)\varphi,\qquad \lambda_{2m+1,0,s}=\varepsilon_1\mu_{2m+1,s},$$
$$u^{(2)}_{2m,0,s}(x)=R_{2m,s}(r)\sin 2m\varphi,\qquad \lambda_{2m,0,s}=\varepsilon_3\mu_{2m+1,s}.$$

Финансирование. Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dushek O. Mathematical modeling in cellular immunology: T cell activation and parameter estimation: PhD thesis / University of British Columbia, 2008. http://hdl.handle.net/2429/2894
2. Nisbet R. M. Delay-differential equations for structured populations // Structured-population models in marine, terrestrial, and freshwater systems. Boston: Springer, 1997. P. 89–118. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5973-3_4
3. Srividhya J., Gopinathan M. S. A simple time delay model for eukaryotic cell cycle // Journal of Theoretical Biology. 2006. Vol. 241. Issue 3. P. 617–627. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.12.020
4. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: Физматлит, 2007. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15211459
5. Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики. М.: МАКС Пресс, 2008.
6. Косов А. А., Семенов Э. И. О многомерных точных решениях уравнения нелинейной диффузии типа пантографа с переменным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 359–374. https://doi.org/10.35634/vm240304
7. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740. https://www.mathnet.ru/rus/dan34529
8. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentationes Mathematicae. 1974. Vol. 17. No. 2. P. 451–457. http://eudml.org/doc/291423
9. Karachik V., Turmetov B. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. 2020. Vol. 50. No. 1. P. 67–88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942

10. Turmetov B. Kh., Karachik V. V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2023. Vol. 68. Issue 7. P. 1204–1218. https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021
11. Зарубин А. Н. Краевая задача с инволютивным сдвигом в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 10. С. 1423–1425. https://www.mathnet.ru/rus/de11166
12. Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball // Eurasian Mathematical Journal. 2012. Vol. 3. No. 1. P. 143–146. https://www.mathnet.ru/rus/emj80
13. Садыбеков М. А., Турметов Б. Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 2. С. 264–268. https://doi.org/10.1134/s0374064114020150
14. Turmetov B., Koshanova M., Muratbekova M. On periodic problems for the nonlocal Poisson equation in the circle // International Journal of Applied Mathematics. 2023. Vol. 36. No. 5. P. 735–746. https://doi.org/10.12732/ijam.v36i5.11
15. Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A. Direct and inverse problems for the Poisson equation with equality of flows on a part of the boundary // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol. 64. Issue 5. P. 777–791. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1517340
16. Sadybekov M., Dukenbayeva A. On boundary value problems of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2022. Vol. 67. Issue 2. P. 369–383. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1828377
17. Турметов Б. Х. Об одном обобщении задачи Робена для уравнения Лапласа // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1179–1187. https://doi.org/10.1134/S0374064119090024
18. Yessirkegenov N. Spectral properties of the generalized Samarskii–Ionkin type problems // Filomat. 2018. Vol. 32. Issue 3. P. 1019–1024. https://doi.org/10.2298/FIL1803019Y
19. Турметов Б. Х., Карачик В. В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 4. С. 651–667. https://doi.org/10.35634/vm210409
20. Evans L. C. Partial differential equations. AMS, 2010. https://doi.org/10.1090/gsm/019
21. Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B. Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. 2016. Vol. 61. Issue 1. P. 104–123. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402
22. Turmetov B., Karachik V. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions // Filomat. 2018. Vol. 32. Issue 3. P. 947–953. https://doi.org/10.2298/FIL1803947T

Поступила в редакцию 23.08.2024
Принята к публикации 04.01.2025

Турметов Батирхан Худайбергенович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математики, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, 161200, Казахстан, г. Туркестан, ул. Бекзата Саттарханова, 29;
Университет Альфраганус, 100190, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Юкори Каракамыш, 2 а.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7735-6484
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Цитирование: Б. Х. Турметов. О разрешимости некоторых краевых задач для нелокального уравнения Пуассона с периодическими условиями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 137–154.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 137–154.

B. Kh. Turmetov

On solvability of some boundary value problems for a nonlocal Poisson equation with periodic conditions

Keywords: involution, Poisson equation, periodic conditions, Dirichlet problem, Neumann problem, eigenfunctions, eigenvalues

MSC2020: 35J05, 35J25

DOI: 10.35634/vm250109

In the present paper, a nonlocal analog of the Laplace operator is introduced by means of involution-type mappings. New classes of boundary value problems are studied for the corresponding nonlocal analog of the Poisson equation in a unit sphere. In the problems under consideration, the boundary conditions are given in the form of a relation between the value of the unknown function in the upper hemisphere and the value in the lower hemisphere. The problems under study generalize the known periodic and antiperiodic boundary value problems for circular regions. The problems are solved by reducing them to two auxiliary problems with Dirichlet and Neumann boundary conditions for the nonlocal analog of the Poisson equation. Using known statements for the obtained auxiliary problems, we prove theorems on the existence and uniqueness of solutions of the main problems. Exact conditions for the solvability of the investigated problems are found, and integral representations of the solutions are obtained. Spectral issues related to periodic problems are also studied. Eigenfunctions and eigenvalues of these problems are found. The theorems on completeness of the system of eigenfunctions in the space L_2 are proved.

Funding. This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488086).

REFERENCES

1. Dushek O. *Mathematical modeling in cellular immunology: T cell activation and parameter estimation*, PhD Thesis, University of British Columbia, 2008. http://hdl.handle.net/2429/2894
2. Nisbet R. M. Delay-differential equations for structured populations, *Structured-population models in marine, terrestrial, and freshwater systems*, Boston: Springer, 1997, pp. 89–118. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5973-3_4
3. Srividhya J., Gopinathan M. S. A simple time delay model for eukaryotic cell cycle, *Journal of Theoretical Biology*, 2006, vol. 241, issue 3, pp. 617–627. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.12.020
4. Akhromeeva T. S., Kurdyumov S. P., Malinetskii G. G., Samarskii A. A. *Struktury i khaos v nelineinykh sredakh* (Structures and chaos in nonlinear media), Moscow: Fizmatlit, 2007. https://zbmath.org/1220.37020
5. Razgulin A. V. *Nelineinye modeli opticheskoi sinergetiki* (Nonlinear models of optical synergetics), Moscow: MAKS Press, 2008.
6. Kosov A. A., Semenov E. I. On multidimensional exact solutions of the nonlinear diffusion equation of the pantograph type with variable delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 3, pp. 359–374 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm240304
7. Bitsadze A. V., Samarskii A. A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1969, vol. 10, pp. 398–400. https://zbmath.org/0187.35501
8. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument, *Commentationes Mathematicae*, 1974, vol. 17, no. 2, pp. 451–457. http://eudml.org/doc/291423
9. Karachik V., Turmetov B. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2020, vol. 50, no. 1, pp. 67–88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942
10. Turmetov B. Kh., Karachik V. V. Solvability of nonlocal Dirichlet problem for generalized Helmholtz equation in a unit ball, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2023, vol. 68, issue 7, pp. 1204–1218. https://doi.org/10.1080/17476933.2022.2040021

11. Zarubin A. N. A boundary value problem with an involutive shift in the boundary condition, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 10, pp. 1503–1506. https://doi.org/10.1007/s10625-004-0019-8
12. Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball, *Eurasian Mathematical Journal*, 2012, vol. 3, no. 1, pp. 143–146. https://www.mathnet.ru/eng/emj80
13. Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk, *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 268–273. https://doi.org/10.1134/S0012266114020153
14. Turmetov B., Koshanova M., Muratbekova M. On periodic problems for the nonlocal Poisson equation in the circle, *International Journal of Applied Mathematics*, 2023, vol. 36, no. 5, pp. 735–746. https://doi.org/10.12732/ijam.v36i5.11
15. Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A. Direct and inverse problems for the Poisson equation with equality of flows on a part of the boundary, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, vol. 64, issue 5, pp. 777–791. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1517340
16. Sadybekov M., Dukenbayeva A. On boundary value problems of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2022, vol. 67, issue 2, pp. 369–383. https://doi.org/10.1080/17476933.2020.1828377
17. Turmetov B. Kh. Generalization of the Robin problem for the Laplace equation, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 9, pp. 1134–1142. https://doi.org/10.1134/S0012266119090027
18. Yessirkegenov N. Spectral properties of the generalized Samarskii–Ionkin type problems, *Filomat*, 2018, vol. 32, issue 3, pp. 1019–1024. https://doi.org/10.2298/FIL1803019Y
19. Turmetov B. Kh., Karachik V. V. On solvability of the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Poisson equation with multiple involution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 4, pp. 651–667 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm210409
20. Evans L. C. *Partial differential equations*, AMS, 2010. https://doi.org/10.1090/gsm/019
21. Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B. Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2016, vol. 61, issue 1, pp. 104–123. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402
22. Turmetov B., Karachik V. On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions, *Filomat*, 2018, vol. 32, issue 3, pp. 947–953. https://doi.org/10.2298/FIL1803947T

Received 23.08.2024
Accepted 04.01.2025

Batirkhan Khudaibergenovich Turmetov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, ul. Bekzata Sattarkhanova, 29, Turkistan, 161200, Kazakhstan;
Alfraganus University, ul. Yukori Karakamysh, 2 a, Tashkent, 100190, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7735-6484
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Citation: B. Kh. Turmetov. On solvability of some boundary value problems for a nonlocal Poisson equation with periodic conditions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 137–154.