МАТЕМАТИКА 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 155–166.

УДК 517.977

© *К. А. Щелчков*

ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОМЕХИ

Рассматривается задача стабилизации около нуля в условиях воздействия помехи и неточных данных в терминах дифференциальной игры преследования. Динамика описывается нелинейной автономной системой дифференциальных уравнений. Множество значений управлений преследователя является конечным, убегающего (помехи) — компакт. Целью управления, то есть целью преследователя, является приведение, в рамках конечного времени, траектории в любую наперед заданную окрестность некоторого шара с центром в нуле и ненулевым радиусом вне зависимости от действий помехи. Управление преследователя определяется в дискретные моменты времени на основании момента разбиения и значения из фазового пространства, которое равно сумме фазовых координат в момент разбиения и значения некоторой вспомогательной функции. Значение вспомогательной функции ограничено по норме наперед заданной величиной, которая считается известной преследователю. В работе получены условия соотношения параметров задачи и числа, которое ограничивает норму вспомогательной функции, позволяющие осуществить поимку в указанном смысле. Выигрышное управление строится конструктивно и использует фиксированный шаг разбиения временного интервала. Кроме того, получена оценка времени поимки.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейные динамические системы, управление, помеха, неточность..

DOI: 10.35634/vm250110

Введение

Рассматривается задача стабилизации около нуля в условиях воздействия помехи и неточных данных в терминах дифференциальной игры преследования. Помеха в настоящей работе рассматривается в качестве второго игрока в дифференциальной игре. Управление является кусочно-постоянным; для его определения не передается информация об управлении помехи, то есть задача приведения точно на заданное множество не разрешима в общем случае. Поэтому задачей управления (преследователя) является стабилизация траектории в любой наперед заданной окрестности заданного шара с центром в начале координат. Информация для конструирования управления передается неточно, из некоторой окрестности истинного значения, что коррелирует с реальными управляемыми системами, в которых происходит получение и обработка данных. Поэтому ставится задача о приведении в окрестность шара, а не в окрестность начала координат. Исследуется зависимость параметров задачи от радиуса целевого шара, позволяющая осуществить цель управления.

Дифференциальные игры двух лиц в настоящее представляют содержательную теорию широко и рассмотрены в различных постановках [1–7]. Были разработаны различные методы исследования и решения таких задач, как для получения качественных результатов, так и для построения управлений: метод Айзекса, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие. Однако построение стратегий для дифференциальных игр с нелинейной динамикой представляет особую трудность. Н. Н. Красовским и представителями его научной школы создана теория позиционных игр, в рамках которой был получен ряд фундаментальных качественных результатов. В основе данной школы лежит понятие максимального стабильного моста и правило экстремального прицеливания. Оказалось, что удобнее строить мосты, обладающие свойством стабильности, но не являющиеся максимальными. При этом для нелинейных систем построение таких мостов весьма затруднительно или даже невозможно. Построение приближений стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности в работах [8,9].

В работах [10–14] рассматривались задачи преследования с нелинейной динамикой. В [10] рассматривалась задачи сближения с целевым множеством в фиксированный момент времени, использовалась позиционная стратегия и понятие стабильности. В [11] исследовалась задача о сближении группы преследователей, посредством использования контрстратегий с интегральными ограничениями на управления, с одним убегающим на конечном интервале времени. В [12] исследовался нелинейный пример Л. С. Понтрягина, получены достаточные условия разрешимости задачи. В [13] получены достаточные условия разрешимости задачи преследования на конечном интервале с использованием позиционных стратегий. В [14] получены достаточные условия поимки с использованием контрстратегии, исследована оптимальность времени поимки для некоторого случая на плоскости.

В работах [15–17] рассматривались задачи управления с неопределенностью и приведен обзор литературы, посвященный таким задачам. В работе [15] рассматривается управляемая система на конечном промежутке времени, содержащая неопределенный постоянный параметр. Под множеством разрешимости понимаются только те начальные позиции системы, для каждой из которых при любом допустимом значении параметра существует управление, приводящее систему на заданное целевое множество. В работе [16] рассмотрена задача коррекции движения линейной управляемой системы при детерминированных возмущениях, стесненных совместными интегральными ограничениями. В работе [17] рассматривается задача коррекции управления; она заключается в согласовании двух систем координат, имеющих общее происхождение, основной системы (корабля) и зависимой системы (например, ракеты), которая стартует с основной. Задача рассматривается при неполной информации о координатах состояния.

Настоящая работа является продолжением исследования [18].

§ 1. Постановка задачи, основные обозначения и определения

В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u,v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия; $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f\colon \mathbb{R}^k \times U \times V \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $u \in U$ непрерывна по совокупности переменных x, v и липшицева по x с константой L, не зависящей от v, то есть

$$\|f(x_1,u_i,v) - f(x_2,u_i,v)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v \in V, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой.

Под разбиением σ промежутка $[0,T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\eta = T$.

Введем следующие обозначения: $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x; $O_\varepsilon(x)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x; $\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение векторов a, b; $\wedge$ — логическое «И» (конъюнкция).

Пусть $\beta > 0$, $D_\beta(0) \subset \mathbb{R}^k$, $\psi\colon [0,\infty) \to D_\beta(0)$.

Определение 1.1. *Кусочно-постоянной ψ-неточной стратегией W* преследователя P на промежутке $[0,T]$ называется пара (σ, W_σ), где σ — разбиение промежутка $[0,T]$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r = 0,1,\ldots,\eta-1$, ставящих в соответствие величинам $\big(\tau_r, x(\tau_r)+\psi(\tau_r)\big)$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v\colon [0,\infty) \to V$. Считаем, что игрокам известны динамика системы, то есть функция f, множества U, V, константа Липшица L, числа β и $\delta \geqslant 0$.

Определение 1.2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит δ-неточная ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная ψ-неточная стратегия W преследователя P на промежутке $[0,T]$ такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \delta + \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0,T]$.

Целью преследователя является осуществление δ-неточной ε-поимки для заданного δ. Цель убегающего — воспрепятствовать этому.

Отметим, что для любых $u \in U$, измеримой функции $v\colon [0,\infty) \to V$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^k$ справедливо неравенство $\|f(x,u,v(t))\| \leqslant L\|x\| + B$ для некоторого $B \geqslant 0$ (см. [18]). То есть для любого $T > 0$ и любого разбиения σ промежутка $[0,T]$, в силу определения 1.1, на каждом интервале разбиения выполняются условия Каратеодори существования, единственности и продолжимости вправо решения задачи Коши. Таким образом, постановка задачи корректна.

Справедлива следующая теорема о поимке.

Теорема 1.1 (см. [18]). *Пусть*

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \big\langle f(0,u,v), p \big\rangle > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка. Кроме того, преследователю для построении стратегии достаточно использовать разбиение вре́менного интервала с фиксированным шагом.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{\alpha} = \min_{\xi\in D_{\varepsilon_0}(0)} \min_{p\in\mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u\in U} \min_{v\in V} \big\langle f(\xi,u,v), p \big\rangle, \qquad D = \max_{\xi\in D_{\varepsilon_0}(0),\, u\in U,\, v\in V} \|f(\xi,u,v)\|, \tag{1.1}$$

где ε_0 — из теоремы 1.1. Отметим, что $\overline{\alpha} > 0$ (см. [18])

§ 2. Теорема о δ-неточной ε-поимке

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и заданы числа $\delta, \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$ и начальное положение x_0, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\begin{gathered} 0 < \mu < 1, \quad 0 \leqslant \delta < \varepsilon_0, \quad 0 < \alpha < \overline{\alpha}, \\ 0 < \beta \leqslant \min\left\{ \frac{\overline{\alpha}-\alpha}{L}, \frac{\mu\alpha\delta}{2(\alpha+D)} \right\}, \quad \delta < \|x_0\| \leqslant \varepsilon_0 - \beta. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Тогда в игре $\Gamma(x_0)$ происходит δ-неточная ε-поимка для произвольного отображения $\psi\colon [0,\infty) \to D_\beta(0)$. Кроме того, преследователю для построении стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\beta < \varepsilon_0 - \delta$. Так как, если $\beta \geqslant \varepsilon_0 - \delta$, то $\|x_0\| \leqslant \delta$, что противоречит (2.1).

1^0. Данном пункте будет введен ряд величин, получены некоторые отношения и определен шаг разбиения временного интервала.

Зафиксируем $\hat{\varepsilon} > 0$. Будем строить стратегию преследователя для приведения траектории во множество $O_{\delta+\hat{\varepsilon}}(0)$. Без ограничения общности считаем, что $\delta + \hat{\varepsilon} \leqslant \varepsilon_0 - \beta$, так как в противном случае для любого начального положения x_0, удовлетворяющего (2.1), выполнено включение $x_0 \in O_{\delta+\hat{\varepsilon}}(0)$, что означает, что в игре $\Gamma(x_0)$ происходит поимка.

Обозначим

$$h = \frac{\alpha(1-\mu)}{L}. \tag{2.2}$$

Зафиксируем произвольные $y \in D_{\varepsilon_0-\beta}(0)$, $z \in D_\beta(y)$, $\hat{z} \in D_h(y)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\hat{u} \in U$, со следующими ограничениями: $\|y\| \geqslant \delta + \hat{\varepsilon}$; $\|p\| = 1$; найдется $\hat{v} \in V$, для которого справедливо следующее равенство:

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V}\big\langle f(z,u,v),p\big\rangle = \big\langle f(z,\hat{u},\hat{v}),p\big\rangle.$$

Отметим, что $\beta < \delta$ и $z \in D_{\varepsilon_0}(0)$ в силу (2.1). Таким образом $z \neq 0$.

Оценим следующее скалярное произведение, используя (1.1) и (2.1), для произвольного $v \in V$:

$$\big\langle f(y,\hat{u},v),p\big\rangle = \big\langle f(z,\hat{u},v),p\big\rangle + \big\langle f(y,\hat{u},v) - f(z,\hat{u},v),p\big\rangle \geqslant \overline{\alpha} - L\beta \geqslant \alpha.$$

Следовательно, если $p = -z/\|z\|$, то справедливо неравенство

$$\big\langle f(y,\hat{u},v),z\big\rangle \leqslant -\alpha\|z\|.$$

Используя последнее неравенство, (1.1) и (2.1), оценим следующее скалярное произведение

$$\begin{gathered}\big\langle f(y,\hat{u},v),y\big\rangle = \big\langle f(y,\hat{u},v),z\big\rangle + \big\langle f(y,\hat{u},v),y-z\big\rangle \leqslant \\ \leqslant -\alpha\|z\| + D\beta \leqslant -\alpha\|y\| + \beta(\alpha+D).\end{gathered} \tag{2.3}$$

Отметим, что

$$-\alpha\|y\| + \beta(\alpha+D) < -\alpha\delta + \frac{\mu\alpha\delta}{2} < 0.$$

Используя (2.2) и (2.3), оценим следующее скалярное произведение:

$$\begin{gathered}\big\langle f(\hat{z},\hat{u},v),y\big\rangle = \big\langle f(y,\hat{u},v),y\big\rangle + \big\langle f(\hat{z},\hat{u},v) - f(y,\hat{u},v),y\big\rangle \leqslant \\ \leqslant -\alpha\|y\| + \beta(\alpha+D) + Lh\|y\| = -\mu\alpha\|y\| + \beta(\alpha+D).\end{gathered} \tag{2.4}$$

Отметим, что

$$-\mu\alpha\|y\| + \beta(\alpha+D) < -\mu\alpha\delta + \frac{\mu\alpha\delta}{2} < 0.$$

Обозначим шаг разбиения временного интервала

$$\Delta = \min\left\{\frac{h}{D}, \frac{\beta}{D}, \frac{\mu\alpha(\delta+\hat{\varepsilon}) - 2\beta(\alpha+D)}{D^2}\right\}. \tag{2.5}$$

Покажем, что $\Delta > 0$, для чего достаточно оценить третий элемент в минимуме (2.5), используя (2.1):

$$\frac{\mu\alpha(\delta+\hat{\varepsilon})-2\beta(\alpha+D)}{D^2} \geqslant \frac{\mu\alpha(\delta+\hat{\varepsilon})-\mu\alpha\delta}{D^2} = \frac{\mu\alpha\hat{\varepsilon}}{D^2} > 0.$$

Пусть $t_1 \geqslant 0$, тогда, если $x(t_1) \in D_{\varepsilon_0-\beta}(0)$, то $x(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ и $x(t) \in D_h(x(t_1))$ для всех $t \in [t_1, t_1+\Delta]$. Докажем справедливость этих двух включений. Предположим противное: пусть $x(t_2) \notin D_{\varepsilon_0}(0)$ для некоторого $t_2 \in (t_1, t_1+\Delta]$. Тогда существует такое $\hat{t} \in (t_1, t_2]$, что $x(t) \in O_{\varepsilon_0}(0)$ для всех $t \in [t_1, \hat{t}\,)$ и $\|x(\hat{t}\,)\| = \varepsilon_0$. Следовательно, в силу (1.1), $\|x(\hat{t}\,) - x(t_1)\| \leqslant$ $\leqslant D(\hat{t}-t_1) < D\Delta \leqslant \beta$ для всех $t \in [t_1, \hat{t}]$, то есть $\|x(\hat{t}\,)\| < \varepsilon_0$, противоречие. Таким образом доказана справедливость первого включения. Так как справедливо первое включение, то $\|x(t)-x(t_1)\| \leqslant D(t-t_1) \leqslant D\Delta \leqslant h$ для всех $t \in [t_1, t_1+\Delta]$. Таким образом доказана справедливость второго включения.

$\mathbf{2^0}$. В данном пункте будет определено управление на заданном интервале разбиения и оценено приближение к целевому множеству за шаг разбиения.

Зафиксируем интервал разбиения $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geqslant 0$. Пусть $\delta + \hat{\varepsilon} \leqslant \|x(\tau_i)\| \leqslant \varepsilon_0 - \beta$. Так как шаг разбиения равен Δ, то есть $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta$, то $x(t) \in D_h(x(\tau_i))$, $x(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, что показано в конце пункта $\mathbf{1^0}$.

Обозначим $z_i = x(\tau_i) + \psi(\tau_i)$ (значение для построения управления). Так как, в силу (2.1), $\beta \leqslant \delta$, то $z_i \neq 0$. В качестве постоянного управления на данном интервале будем выбирать произвольное значение $\hat{u}_i \in U$, для которого найдется такое $\hat{v} \in V$, что справедливо следующее равенство

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V}\Big\langle f(z_i,u,v), -\frac{z_i}{\|z_i\|}\Big\rangle = \Big\langle f(z_i,\hat{u}_i,\hat{v}), -\frac{z_i}{\|z_i\|}\Big\rangle.$$

Таким образом справедливы неравенства (2.3) и (2.4), где $y = x(\tau_i)$, $z = z_i$, $\hat{u} = \hat{u}_i$, $\hat{z} = x(t)$, для каждого $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. То есть для произвольного $v \in V$ справедливо неравенство

$$\big\langle f(x(t),\hat{u}_i,v), x(\tau_i)\big\rangle \leqslant -\mu\alpha\|x(\tau_i)\| + \beta(\alpha+D).$$

Используя последнее неравенство и (2.5), оценим квадрат следующей нормы для произвольного $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 = \|x(\tau_i)\|^2 + \Big\|\int_{\tau_i}^t f(x(s),\hat{u}_i,v(s))\,ds\Big\|^2 + 2\int_{\tau_i}^t \big\langle f(x(s),\hat{u}_i,v(s)), x(\tau_i)\big\rangle\,ds \leqslant \\
\leqslant \|x(\tau_i)\|^2 + (t-\tau_i)^2D^2 - 2(t-\tau_i)(\mu\alpha\|x(\tau_i)\| - \beta(\alpha+D)) \leqslant \\
\leqslant \|x(\tau_i)\|^2 + (t-\tau_i)D^2\cdot\frac{\mu\alpha(\delta+\hat{\varepsilon})-2\beta(\alpha+D)}{D^2} - 2(t-\tau_i)(\mu\alpha\|x(\tau_i)\| - \beta(\alpha+D)) = \\
= \|x(\tau_i)\|^2 - (t-\tau_i)\mu\alpha\|x(\tau_i)\| - (t-\tau_i)\mu\alpha(\|x(\tau_i)\| - (\delta+\hat{\varepsilon})) \leqslant \\
\leqslant \|x(\tau_i)\|^2 - (t-\tau_i)\mu\alpha\|x(\tau_i)\| \leqslant \left(\|x(\tau_i)\| - \frac{(t-\tau_i)\mu\alpha}{2}\right)^2. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{\Delta\mu\alpha}{2}. \qquad (2.7)$$

Отметим, что в силу (2.6) справедливо неравенство $\|x(\tau_i)\| - \Delta\mu\alpha \geqslant 0$. Таким образом, в силу (2.6) и (2.7) справедливо следующее выражение:

$$\Big(\forall\, t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]\ \big(\|x(t)\| < \|x(\tau_i)\|\big)\Big) \wedge \Big(\|x(\tau_{i+1})\| \leqslant \|x(\tau_i)\| - \gamma\Big). \tag{2.8}$$

$\mathbf{3^0}$. В данном пункте получим оценку времени поимки.

Если $\|x_0\| < \delta + \hat{\varepsilon}$, то игра окончена. Иначе выбираем постоянное управление $\hat{u}_0$ на интервале $[0, \tau_1)$ в соответствии с пунктом $\mathbf{2^0}$ и, в силу (2.8), получаем выполнение неравенства $\|x(\tau_1)\| \leqslant \|x_0\| - \gamma$.

Если $\|x(\tau_1)\| < \delta + \hat{\varepsilon}$, то игра окончена. Иначе выбираем постоянное управление $\hat{u}_1$ на интервале $[\tau_1, \tau_2)$ в соответствии с пунктом $\mathbf{2^0}$ и получаем выполнение неравенства $\|x(\tau_2)\| \leqslant \|x(\tau_1)\| - \gamma \leqslant \|x_0\| - 2\gamma$. И так далее.

Предположим, что

$$\|x(\tau_\eta)\| < \delta + \hat{\varepsilon}, \quad \|x(\tau_i)\| \geqslant \delta + \hat{\varepsilon}, \quad i = 1, \ldots, \eta - 1. \tag{2.9}$$

Таким образом, $\|x(\tau_\eta)\| \leqslant \|x_0\| - \eta\gamma$. Тогда

$$\eta \leqslant \frac{\|x_0\| - (\delta + \hat{\varepsilon})}{\gamma} + 1. \tag{2.10}$$

Действительно, если

$$\eta > \frac{\|x_0\| - (\delta + \hat{\varepsilon})}{\gamma} + 1,$$

то для индекса

$$i_1 = \left[\frac{\|x_0\| - (\delta + \hat{\varepsilon})}{\gamma}\right] + 1,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, выполняется следующее неравенство в силу (2.9):

$$\|x(\tau_{i_1})\| \leqslant \|x_0\| - i_1\gamma \leqslant \|x_0\| - \left(\left[\frac{\|x_0\| - (\delta + \hat{\varepsilon})}{\gamma}\right] + 1\right)\Delta\gamma < \delta + \hat{\varepsilon}.$$

То есть $\|x(\tau_{i_1})\| < \delta + \hat{\varepsilon}$, противоречие.

$\mathbf{4^0}$. В данном пункте получим оценку времени поимки, не зависящую от $\hat{\varepsilon}$, тем самым доказывая требуемое.

Оценим τ_η используя (2.5), (2.7) и (2.10):

$$\tau_\eta = \eta\Delta \leqslant \left(\frac{\|x_0\| - (\delta + \hat{\varepsilon})}{\gamma} + 1\right)\Delta = \frac{\|x_0\| - (\delta + \hat{\varepsilon})}{\mu\alpha/2} + \Delta < \frac{\|x_0\| - \delta}{\mu\alpha/2} + \Delta \leqslant \frac{\|x_0\| - \delta}{\mu\alpha/2} + \frac{\beta}{D}.$$

Таким образом справедливо включение $x(\tau_\eta) \in O_{\delta+\hat{\varepsilon}}(0)$, где $\tau_\eta < T$ и

$$T = \frac{\|x_0\| - \delta}{\mu\alpha/2} + \frac{\beta}{D}$$

не зависит от $\hat{\varepsilon} > 0$. Теорема доказана. □

§ 3. Замечания

Замечание 3.1. Так как стратегия, построенная в доказательстве теоремы 2.1, гарантирует выполнение включения $x(t) \in D_{\varepsilon_0-\beta}(0)$ для всех $t \in [0, \tau_\eta]$ в силу (2.8), то в постановке задачи достаточно, чтобы функция f была локально липшицевой по x для каждого $u \in U$ с константами, не зависящими от v.

Замечание 3.2. Если

$$\frac{\overline{\alpha}-\alpha}{L} < \frac{\mu\alpha\delta}{2(\alpha+D)},$$

то, в силу (2.1), справедлива следующая оценка

$$\frac{\mu\alpha(\delta+\hat{\varepsilon})-2\beta(\alpha+D)}{D^2} > \frac{\mu\alpha\delta-2(\alpha+D)\left(\beta-\dfrac{\mu\alpha\delta}{2(\alpha+D)}+\dfrac{\mu\alpha\delta}{2(\alpha+D)}\right)}{D^2} >$$
$$> \frac{2(\alpha+D)\left(\dfrac{\mu\alpha\delta}{2(\alpha+D)}-\dfrac{\overline{\alpha}-\alpha}{L}\right)}{D^2} > 0.$$

Таким образом, можем выбрать такое Δ, которое не зависит от $\hat{\varepsilon}$:

$$\Delta = \min\left\{\frac{h}{D}, \frac{\beta}{D}, \frac{\mu\alpha\delta-2(\alpha+D)(\overline{\alpha}-\alpha)/L}{D^2}\right\}.$$

Замечание 3.3. Может быть использовано приближенно вычисленное $\overline{\alpha}$. То есть вместо $\overline{\alpha}$ используется положительное число $\overline{\alpha}_1 < \overline{\alpha}$. Относительно $\overline{\alpha}_1$ выбираются параметры в условии теоремы 2.1 и производятся все дальнейшие рассуждения. Таким образом постоянное управление $\hat{u}_i \in U$ на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ выбирается из следующего максимина

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V}\left\langle f(z_i,u,v), -\frac{z_i}{\|z_i\|}\right\rangle$$

приближенно. То есть выбирается произвольное $\hat{u}_i \in U$, для которого справедливо неравенство

$$\left\langle f(z_i,\hat{u}_i,v), -\frac{z_i}{\|z_i\|}\right\rangle \geqslant \overline{\alpha}_1$$

для всех $v \in V$.

Пример 3.1. Рассмотрим динамику в $\mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$\dot{x} = (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u, \qquad U = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}, \quad V = [-\varphi, \varphi],$$

где $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$. Здесь $A(\cdot)$ — матрица поворота на угол v, то есть

$$A = \begin{pmatrix}\cos(v) & -\sin(v)\\ \sin(v) & \cos(v)\end{pmatrix}.$$

Пусть $p = (\cos\theta, \sin\theta)$, Тогда

$$\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u_1, p\big\rangle =$$
$$= \min_{v\in V} \big((1+|x_1|+|x_2|)(\cos(v)\cos(\theta)+\sin(v)\sin(\theta))\big) =$$
$$\min_{v\in V} \big((1+|x_1|+|x_2|)\cos(\theta-v)\big).$$

Аналогично получаем следующие равенства

$$\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u_2, p\big\rangle = \min_{v\in V} \Big((1+|x_1|+|x_2|)\sin(\theta-v)\Big),$$
$$\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u_3, p\big\rangle = \min_{v\in V} \Big((1+|x_1|+|x_2|)\cos(\theta+v)\Big),$$
$$\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u_4, p\big\rangle = \min_{v\in V} \Big((1+|x_1|+|x_2|)\sin(\theta-v)\Big).$$

Отсюда, если $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$, то

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u, p\big\rangle = (1+|x_1|+|x_2|)\cos(\theta+\varphi).$$

Если $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$, то

$$\max_{u\in U}\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u, p\big\rangle = (1+|x_1|+|x_2|)\sin(\theta-\varphi) =$$
$$+ (1+|x_1|+|x_2|)\cos(\pi/2-\theta+\varphi).$$

И так далее. Таким образом для каждого $x \in \mathbb{R}^2$ справедливо следующее равенство:

$$\min_{p\in\mathbb{R}^k,\, \|p\|=1}\ \max_{u\in U}\min_{v\in V} \big\langle (1+|x_1|+|x_2|)A(v)u, p\big\rangle = (1+|x_1|+|x_2|)\cos(\pi/4+\varphi) > 0.$$

Следовательно условия теоремы 1.1 выполнены и ε-поимка происходит из любого начального положения $x_0 \in \mathbb{R}^2$, то есть можем выбрать произвольное $\varepsilon_0 > 0$.

Таким образом $\overline{\alpha} = \cos(\pi/4+\varphi)$, $D = \varepsilon_0(1+\sqrt{2})$, $L = 3$. Следовательно условие теоремы 2.1 выполнено, например, для следующих значений параметров:

$$\alpha = \frac{\cos(\pi/4+\varphi)}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{\varepsilon_0}{2},$$
$$\beta = \min\left\{\frac{\cos(\pi/4+\varphi)}{6}, \frac{\cos(\pi/4+\varphi)\varepsilon_0}{8\big(\cos(\pi/4+\varphi)+\varepsilon_0(1+\sqrt{2})\big)}\right\}.$$

Заключение

Рассмотрена задача стабилизации около нуля в условиях воздействия помехи и неточных данных в терминах дифференциальной игры преследования. Динамика описывается системой вида $\dot{x} = f(x,u,v)$. Найдено соотношение параметров задачи, то есть чисел $\delta, \alpha, \beta, \mu$ и начального положения x_0, которое позволяет осуществить приведение траектории в любую наперед заданную окрестность множества $D_\delta(0)$. При этом используется кусочно-постоянное управление, для определения которого в моменты разбиения передаются не сам фазовый вектор, а значение из $O_\beta(x(\tau_i))$. Параметры α и μ являются вспомогательными, однако они в некотором смысле характеризуют скорость поимки, то есть входят в полученную в явном виде оценку времени поимки. Кроме того показано, что при выполнении некоторого дополнительного условия шаг разбиения может быть выбран независимым от радиуса наперед заданной окрестности целевого шара. То есть, для фиксированного шага происходит приведение траектории в $O_{\delta+\hat{\varepsilon}}(0)$ для любого $\hat{\varepsilon} > 0$. Дополнительно показано, что при определенном приближенном вычислении значений управления на интервалах разбиения поимка также происходит. Рассмотрен пример нелинейной системы, для которой выполняются условия теоремы. Значения параметров предоставлены в явном виде, то есть множество систем, удовлетворяющих теореме 2.1, не пусто.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–71–01032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
2. Blaquière A., Gérard F., Leitmann G. Quantitative and qualitative differential games. New York: Academic Press, 1969.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29140877
4. Friedman A. Differential games. New York: Wiley-Interscience, 1971. https://zbmath.org/0229.90060
5. Hájek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. https://zbmath.org/0361.90084
6. Leitmann G. Cooperative and non-cooperative many player differential games. Vienna: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2914-2
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. Двуреченский П. Е., Иванов Г. Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 2. С. 224–255. https://doi.org/10.7868/S0044466914020057
9. Ушаков В. Н., Ершов А. А. К решению задач управления с фиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564. https://doi.org/10.20537/vm160409
10. Ушаков В. Н., Ершов А. А., Ушаков А. В., Матвийчук А. Р. Некоторые задачи сближения нелинейных управляемых систем в фиксированный момент времени // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 125–155. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-09
11. Salimi M., Ferrara M. Differential game of optimal pursuit of one evader by many pursuers // International Journal of Game Theory. 2019. Vol. 48. Issue 2. P. 481–490. https://doi.org/10.1007/s00182-018-0638-6
12. Никольский М. С. Одна нелинейная задача преследования // Кибернетика. 1973. № 2. С. 92–94. https://zbmath.org/0263.90049
13. Пшеничный Б. Н., Шишкина Н. Б. Достаточные условия конечности времени преследования // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 517–523.
14. Сатимов Н. К задаче преследования в нелинейных дифференциальных играх // Кибернетика. 1973. № 3. С. 88–93. https://zbmath.org/0325.90065
15. Ершов А. А., Ушаков В. Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. https://doi.org/10.4213/sm8761
16. Ананьев Б. И. О коррекции движения при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2010. Вып. 3. С. 3–15. https://www.mathnet.ru/rus/at786
17. Ananyev B. I. An application of motion correction methods to the alignment problem in navigation // Ural Mathematical Journal. 2016. Vol. 2. Issue 2. P. 16–26. https://doi.org/10.15826/umj.2016.2.002
18. Щелчков К. А. О задаче управления нелинейной системой посредством дискретного управления в условиях воздействия помехи // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 1. С. 126–134. https://doi.org/10.31857/S0374064124010106

Поступила в редакцию 11.01.2025
Принята к публикации 05.03.2025

Щелчков Кирилл Александрович, к. ф.-м. н., доцент, научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6811-2728
E-mail: incognitobox@mail.ru

Цитирование: К. А. Щелчков. Дискретное управление нелинейной системой с неточной информацией в условиях воздействия помехи // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35. Вып. 1. С. 155–166.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2025. Vol. 35. Issue 1. Pp. 155–166.

K. A. Shchelchkov

Discrete control of nonlinear system with uncertain information under disturbance conditions

Keywords: differential game, nonlinear dynamic systems, control, disturbance, uncertainty.

MSC2020: 49N70, 49N75

DOI: 10.35634/vm250110

The problem of stabilization around zero under disturbance and uncertain data in terms of differential pursuit game is considered. The dynamics are described by a nonlinear autonomous system of differential equations. The set of control values of the pursuer is finite, and that of the evader (interference) is compact. The goal of the control, that is, the goal of the pursuer, is to bring, within a finite time, the trajectory to any predetermined neighborhood of some ball centered at zero and a non-zero radius, regardless of the actions of the interference. The pursuer's control is determined at discrete moments of time on the basis of the partition moment and the value from the state space, which is equal to the sum of state coordinates at the partition moment and the value of some auxiliary function. The value of the auxiliary function is restricted by the norm by a predetermined value, which is considered to be known to the pursuer. In this paper, we obtain conditions for the relationship between the parameters of the problem and the number that limits the norm of the auxiliary function, allowing for capture in the specified sense. The winning control is constructed constructively and uses a fixed step of dividing the time interval. In addition, an estimate of the capture time is obtained.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation No. 23–71–01032.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965. https://zbmath.org/0125.38001
2. Blaquière A., Gérard F., Leitmann G. *Quantitative and qualitative differential games*, New York: Academic Press, 1969.
3. Krasovskii N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), Moscow: Nauka, 1970. https://zbmath.org/0246.90060
4. Friedman A. *Differential games*, New York: Wiley-Interscience, 1971. https://zbmath.org/0229.90060
5. Hájek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975. https://zbmath.org/0361.90084
6. Leitmann G. *Cooperative and non-cooperative many player differential games*, Vienna: Springer, 1974. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2914-2
7. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. https://www.springer.com/gp/book/9781461283188
8. Dvurechensky P. E., Ivanov G. E. Algorithms for computing Minkowski operators and their application in differential games, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, issue 2, pp. 235–264. https://doi.org/10.1134/S0965542514020055
9. Ushakov V. N., Ershov A. A. On the solution of control problems with fixed terminal time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160409
10. Ushakov V. N., Ershov A. A., Ushakov A. V., Matviychuk A. R. Some problems of target approach for nonlinear control system at a fixed time moment, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, vol. 62, pp. 125–155 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-62-09
11. Salimi M., Ferrara M. Differential game of optimal pursuit of one evader by many pursuers, *International Journal of Game Theory*, 2019, vol. 48, issue 2, pp. 481–490. https://doi.org/10.1007/s00182-018-0638-6

12. Nikol'skii M. S. A nonlinear tracking problem, *Cybernetics*, 1973, vol. 9, issue 2, pp. 293–296. https://doi.org/10.1007/BF01069085
13. Pshenichnyi B. N., Shishkina N. B. Sufficient conditions of finiteness of the pursuit time, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, vol. 49, issue 4, pp. 399–404. https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90043-7
14. Satimov N. Pursuit problems in nonlinear differential games, *Cybernetics*, 1973, vol. 9, issue 3, pp. 469–475. https://doi.org/10.1007/BF01069203
15. Ershov A. A., Ushakov V. N. An approach problem for a control system with an unknown parameter, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, issue 9, pp. 1312–1352. https://doi.org/10.1070/SM8761
16. Anan'ev B. I. Correction of motion under communication constraints, *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, issue 3, pp. 367–378. https://doi.org/10.1134/S000511791003001X
17. Ananyev B. I. An application of motion correction methods to the alignment problem in navigation, *Ural Mathematical Journal*, 2016, vol. 2, issue 2, pp. 16–26. https://doi.org/10.15826/umj.2016.2.002
18. Shchelchkov K. A. On the problem of controlling a nonlinear system by a discrete control under disturbance, *Differential Equations*, 2024, vol. 60, issue 1, pp. 127–135. https://doi.org/10.1134/S0012266124010105

Received 11.01.2025
Accepted 05.03.2025

Kirill Aleksandrovich Shchelchkov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher, Department of Differential Equations, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6811-2728
E-mail: incognitobox@mail.ru

Citation: K. A. Shchelchkov. Discrete control of nonlinear system with uncertain information under disturbance conditions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2025, vol. 35, issue 1, pp. 155–166.