МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 225–239.

УДК 517.957

© *А. А. Косов, Э. И. Семенов, В. В. Тирских*

О МНОГОМЕРНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Изучается многомерный случай нелинейной системы реакции–диффузии, моделируемый системой двух уравнений параболического типа со степенными нелинейностями. Такого рода системы можно применять для моделирования процесса распространения в пространстве взаимодействующих распределенных формаций роботов двух типов. Такие уравнения описывают также процессы нелинейной диффузии в реагирующих двухкомпонентных сплошных средах. Предложен оригинальный вариант метода редукции, сводящий построение зависимости точного решения от пространственных переменных к решению уравнения Гельмгольца, а зависимости от времени — к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Построен ряд примеров многопараметрических семейств точных решений, задаваемых элементарными функциями.

Ключевые слова: система реакции–диффузии, редукция, точные решения.

DOI: 10.35634/vm230203

Введение

Рассматривается параболическая система двух квазилинейных уравнений реакции–диффузии с объемными источниками (стоками)

$$u_t = \nabla \cdot \left(u^\lambda \nabla u\right) + \alpha u^{1-\lambda} v^\mu + \left(\sigma_1 u^\lambda - k_1\right) u, \quad v_t = \nabla \cdot \left(v^\mu \nabla v\right) + \beta u^\lambda v^{1-\mu} + \left(\sigma_2 v^\mu - k_2\right) v. \quad (1)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных, $u = u(\mathbf{x}, t)$, $v = v(\mathbf{x}, t)$ — искомые функции, $t \geqslant 0$ — время, ∇ — оператор градиента по пространственным переменным; $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ — вещественные параметры нелинейности среды; $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, σ_1, σ_2, $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ — вещественные постоянные коэффициенты. Такого рода системы описывают процессы нелинейной диффузии в реагирующих двухкомпонентных сплошных средах [1–5]. При этом $u(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t)$ трактуются как концентрации двух взаимодействующих друг с другом компонент некоторой смеси веществ, первые слагаемые в правых частях (1) описывают диффузию, вторые — реакции взаимодействия, а третьи — распад компонент, скорость которого может зависеть (при $\sigma_i \neq 0$) от их концентраций.

При моделировании распространения в пространстве формаций мобильных роботов с распределенными характеристиками используются аналогичные (1) подходы к описанию диффузионных процессов [6]. В [7] была предложена модель освоения трехмерного пространства распределенными формациями взаимодействующих роботов двух типов, представляющая собой частный случай системы (1). При этом $u(\mathbf{x}, t)$, $v(\mathbf{x}, t)$ трактуются как плотности (количества в единице объема) роботов в пространстве. Как отмечается в обзоре [8], в последнее время уравнения с частными производными стали применяться для моделирования движения формаций взаимодействующих роботов в роевой робототехнике, при этом основная трудность состоит в том, что “analytical solutions of PDEs are available only for a small number of special cases”. Поэтому развитие методов построения точных решений будет полезно при построении и исследовании моделей распространения формаций с распределенными характеристиками в роевой робототехнике.

Системы, аналогичные (1), также используются в математической биологии для моделирования взаимодействия двух биологических видов, при этом в зависимости от знаков коэффициентов α и β охватываются случаи взаимодействия типа хищник–жертва, полной конкуренции или кооперативного сотрудничества [9–14].

В [15] рассматривается система

$$\begin{aligned} U_t &= (U^{\alpha_1} U_x)_x + U\,(a_1 + b_1 U^{\alpha_1}) + U^{1-\alpha_1}\,(h_1 + c_1 V^{\alpha_2}), \\ V_t &= (V^{\alpha_2} V_x)_x + V\,(a_2 + b_2 V^{\alpha_2}) + V^{1-\alpha_2}\,(h_2 + c_2 U^{\alpha_1}). \end{aligned} \tag{2}$$

При $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = \mu$, $a_1 = -k_1$, $b_1 = \sigma_1$, $b_2 = \sigma_2$, $h_1 = 0$, $a_2 = -k_2$, $h_2 = 0$, $c_1 = \alpha$, $c_2 = \beta$ и переобозначении $U = u$, $V = v$ система (2) перейдет в систему (1) для случая одной пространственной переменной. Таким образом, система (1) в одномерном случае уже рассматривалась в [15], а здесь мы будем изучать эту систему для неисследованного ранее многомерного случая. Также отметим, что ранее авторами в [16] рассматривался частный случай системы (1) при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ и $k_1 = k_2 = 0$, для которой строились точные решения в виде обобщенного разделения переменных [17–20],

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi_1(t)\Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)\Big]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad v(\mathbf{x}, t) = \psi_2(t)\Big[W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)\Big]^{\frac{1}{\mu}},$$

с функцией $W(\mathbf{x})$ вида

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{B}, \mathbf{x}) + C, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где ненулевая числовая симметрическая матрица A размера $n \times n$, постоянный вектор $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ и константа $C \in \mathbb{R}$ подлежат определению. Выбор скалярной функции $W(\mathbf{x})$ в виде (3) обусловлен тем фактом, что она является одновременно многомерной и простейшей нелинейной по пространственным переменным. Кроме того, отметим, что функция (3) позволяет строить анизотропные по пространственным переменным точные решения. Важность анизотропных решений уравнения нелинейной диффузии со степенной нелинейностью отмечается в [21], так как анизотропность решений может порождать особенности, не встречающиеся в случаях наличия симметрии.

Основные результаты

В данной статье займемся построением точных многомерных решений нелинейной системы параболических уравнений вида

$$u_t = \nabla\cdot\left(u^\lambda \nabla u\right) + \alpha u^{1-\lambda} v^\lambda + \sigma u^{1+\lambda} - k_1 u, \quad v_t = \nabla\cdot\left(v^\lambda \nabla v\right) + \beta u^\lambda v^{1-\lambda} + \sigma v^{1+\lambda} - k_2 v, \tag{4}$$

которая является частным случаем системы уравнений (1) при $\mu = \lambda$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

§ 1. Редукция к уравнениям Гельмгольца и Лапласа

Для системы (4) справедливы утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $\lambda \neq -1$. Тогда нелинейная система уравнений (4) имеет частное точное решение вида*

$$u(\mathbf{x}, t) = [\psi_1(t)]^{\frac{1}{\lambda}}\,[\Omega(\mathbf{x})]^{\frac{1}{1+\lambda}}, \quad v(\mathbf{x}, t) = [\psi_2(t)]^{\frac{1}{\lambda}}\,[\Omega(\mathbf{x})]^{\frac{1}{1+\lambda}}, \tag{5}$$

где $\Omega(\mathbf{x})$ *удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению Гельмгольца*

$$\Delta\Omega = -(1+\lambda)\sigma\Omega, \tag{6}$$

а функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ *определяются из системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -k_1\lambda\psi_1 + \alpha\lambda\psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \beta\lambda\psi_1 - k_2\lambda\psi_2. \tag{7}$$

Доказательство. Для удобства, решение (5) запишем как

$$u(\mathbf{x},t) = \Big[\psi_1(t)P(\mathbf{x})\Big]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad v(\mathbf{x},t) = \Big[\psi_2(t)P(\mathbf{x})\Big]^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{8}$$

где $P = \Omega^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$, $\lambda \neq -1$. После подстановки функций (8) в систему уравнений (4) и несложных преобразований получим соотношения

$$\left(\frac{d\psi_1}{dt} + k_1\lambda\psi_1 - \alpha\lambda\psi_2\right)P = \psi_1^2\left(P\Delta P + \frac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2\right), \tag{9}$$

$$\left(\frac{d\psi_2}{dt} - \beta\lambda\psi_1 + k_2\lambda\psi_2\right)P = \psi_2^2\left(P\Delta P + \frac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2\right). \tag{10}$$

Отсюда, полагая выполненным равенство

$$P\Delta P + \frac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2 = 0, \tag{11}$$

получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами (7). В свою очередь, (11) заменой $P = \Omega^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$ сводится к уравнению (6), что и доказывает справедливость утверждения. □

Утверждение 2. *Пусть* $\lambda = -1$. *Тогда нелинейная система уравнений* (4) *имеет частное точное решение вида*

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{\exp(\Omega(\mathbf{x}))}{\psi_1(t)}, \quad v(\mathbf{x},t) = \frac{\exp(\Omega(\mathbf{x}))}{\psi_2(t)},$$

где $\Omega(\mathbf{x})$ *удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению* $\Delta\Omega = -\sigma$, *а функции* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ *определяются из системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами* (7).

При $\sigma = 0$ из утверждений 1, 2 следует, что точные решения нелинейной системы (4) будут выражаться через произвольную гармоническую функцию, так как в этом случае функция $\Omega(\mathbf{x})$ будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\Omega = 0$. Общее решение системы линейных ОДУ (7), в зависимости от условий на коэффициенты, будет приведено в примере 4.

Замечание 1. Так как в утверждении 1 одной из целей было провести редукцию исследуемого уравнения к линейному уравнению Гельмгольца, то в равенствах (9), (10) мы потребовали выполнение равенства (11). Если отказаться от этого требования, то соотношения (9), (10) можно записать как

$$\frac{\dfrac{d\psi_1}{dt} + k_1\lambda\psi_1 - \alpha\lambda\psi_2}{\psi_1^2} = \frac{P\Delta P + \dfrac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2}{P},$$

$$\frac{\dfrac{d\psi_2}{dt} - \beta\lambda\psi_1 + k_2\lambda\psi_2}{\psi_2^2} = \frac{P\Delta P + \dfrac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2}{P}.$$

Полагая выполненными равенства

$$\frac{d\psi_1}{dt} + k_1\lambda\psi_1 - \alpha\lambda\psi_2 = \varpi\psi_1^2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} - \beta\lambda\psi_1 + k_2\lambda\psi_2 = \varpi\psi_2^2, \tag{12}$$

$$P\Delta P + \frac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2 = \varpi P, \tag{13}$$

из доказательства утверждения 1 мы придем к справедливости следующего результата.

Утверждение 3. *Система нелинейных параболических уравнений* (4) *имеет точное решение* (8)*, в котором* $\psi_1(t)$*,* $\psi_2(t)$ *определяются из нелинейной системы двух* ОДУ (12)*, а функция* $P(\mathbf{x})$ *удовлетворяет уравнению* (13)*.*

Решение (8) относится к решениям в виде обобщенного разделения переменных [17–20]. В данной статье отыскивать решения системы ОДУ (12) и уравнения (13) мы не будем — это предмет дальнейшего исследования.

§ 2. Решения с использованием функции (3)

Перейдем к построению точных многомерных, анизотропных по пространственным переменным, решений системы уравнений (4) с использованием анзаца (3). Как будет ясно из схемы построения, для этого удобно использовать уравнение (11). Уравнение в частных производных (11) является стационарным аналогом уравнения типа нелинейной теплопроводности с объемным источником (стоком)

$$P_t = P\Delta P + \frac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 + \lambda\sigma P^2,$$

которое заменой $P = w^\lambda$ преобразуется к обычному уравнению нелинейной теплопроводности с объемным источником (стоком) $w_t = \nabla \cdot \Big(w^\lambda \nabla w\Big) + \sigma w^{1+\lambda}$ в дивергентной форме. Отметим, что в работах [22, 23] конструкция (3) успешно использовалась для построения многомерных решений системы эллиптических уравнений с экспоненциальной нелинейностью и уравнения нелинейной теплопроводности со степенной нелинейностью. При построении точных решений нелинейной системы (4) с использованием функции (3) мы рассмотрим два случая $\sigma = 0$ и $\sigma \neq 0$.

Случай $\sigma = 0$.

Пусть $\sigma = 0$, тогда исходная исследуемая система примет вид

$$u_t = \nabla \cdot \Big(u^\lambda \nabla u\Big) + \alpha u^{1-\lambda} v^\lambda - k_1 u, \quad v_t = \nabla \cdot \Big(v^\lambda \nabla v\Big) + \beta u^\lambda v^{1-\lambda} - k_2 v. \tag{14}$$

Пусть $\sigma = 0$, тогда уравнение (11) упростится и примет вид

$$P\Delta P + \frac{1}{\lambda}|\nabla P|^2 = 0. \tag{15}$$

Лемма 1. *Пусть симметрическая матрица A, вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют алгебраической системе*

$$A\,\mathrm{tr}\,A + \frac{2}{\lambda}A^2 = 0, \quad \mathbf{B}\,\mathrm{tr}\,A + \frac{2}{\lambda}A\mathbf{B} = 0, \quad C\mathrm{tr}\,A + \frac{1}{\lambda}|\mathbf{B}|^2 = 0, \tag{16}$$

где $\mathrm{tr}\,A$ — след матрицы A. Тогда функция $W(\mathbf{x})$, задаваемая формулой (3), является точным решением уравнения (15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по условию леммы матрица A является симметрической, то непосредственным вычислением легко показать, что имеют место равенства

$$|\nabla W(\mathbf{x})|^2 = (A^2\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B},\mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2, \quad \Delta W(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\,A. \tag{17}$$

После подстановки функции $P(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})$ в уравнение (15), с учетом формул (17) приходим к равенству

$$\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right)\mathrm{tr}\,A + \frac{1}{\lambda}\left(A^2\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(A\mathbf{B},\mathbf{x}) + |\mathbf{B}|^2\right) = 0.$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях $\mathbf{x}$ получим систему алгебраических уравнений (16), что и требовалось доказать. □

Алгебраическая система уравнений (16) при $\lambda = -2/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, имеет частное решение $A = aE$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $C = 0$, где E — единичная матрица размера $n \times n$, $a \neq 0$ — произвольный параметр. Данное частное решение алгебраической системы приводит к радиально-симметричному решению системы (14).

Лемма 1 легко обобщается на случай $P(\mathbf{x}) = F(W(\mathbf{x}))$, где $W(\mathbf{x})$ также определяется формулой (3), а функция $F(W(\mathbf{x}))$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка вида

$$W\left(F(W)\frac{d^2F(W)}{dW^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{dF(W)}{dW}\right)^2\right) - \delta F(W)\frac{dF(W)}{dW} = 0, \quad \delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Интегрируя это уравнение в зависимости от значений параметров δ и λ, получим, что решениями уравнения (15) являются следующие функции:

$$\begin{aligned}
&P(\mathbf{x}) = \left(C_1W^{\delta+1}(\mathbf{x}) + C_2\right)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, && \delta \neq -1,\ \lambda \neq -1,\\
&P(\mathbf{x}) = \exp\left(C_1W^{\delta+1}(\mathbf{x}) + C_2\right), && \delta \neq -1,\ \lambda = -1,\\
&P(\mathbf{x}) = (C_1\ln W(\mathbf{x}) + C_2)^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, && \delta = -1,\ \lambda \neq -1,\\
&P(\mathbf{x}) = C_1\,(W(\mathbf{x}))^{C_2}, && \delta = -1,\ \lambda = -1,
\end{aligned}$$

где $C_1 \neq 0$, C_2 — произвольные постоянные, а $W(\mathbf{x})$ определяется формулой (3). При этом симметрическая матрица A, вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют алгебраической системе

$$A\,\mathrm{tr}\,A + 2\delta A^2 = 0, \quad \mathbf{B}\,\mathrm{tr}\,A + 2\delta A\mathbf{B} = 0, \quad C\mathrm{tr}\,A + \delta|\mathbf{B}|^2 = 0. \tag{18}$$

Легко видеть, что системы уравнений (16) и (18) совпадают при $\delta = 1/\lambda$.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $\lambda \neq -1$. Тогда система уравнений (14) имеет частные точные, анизотропные по пространственным переменным, решения

$$u(x,y,z,t) = \Big[\psi_1(t)P_i(x,y,z)\Big]^{1/\lambda}, \qquad v(x,y,z,t) = \Big[\psi_2(t)P_i(x,y,z)\Big]^{1/\lambda}, \quad i = 1,2,$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (7), а функции $P_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$, имеют вид

$$P_i(x,y,z) = \Big[C_1 \ln\left(W_i(x,y,z)\right) + C_2\Big]^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \quad i = 1,2,$$

$$W_1(x,y,z) = \frac{a^2}{2c}x^2 + \frac{c}{2}y^2 + \frac{a^2+c^2}{2c}z^2 + axy + \frac{ab}{c}x + by + \frac{b^2}{2c},$$

$$W_2(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2c}{a^2+b^2}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{a^2c}{a^2+b^2}\right)y^2 + \frac{c}{2}z^2 - \frac{abc}{a^2+b^2}xy +$$
$$+ axz + byz + \frac{(a^2+b^2)d_1 - bcd_2}{ac}x + d_2y + d_1z + \frac{((a^2+b^2)d_1 - bcd_2)^2 + (d_1^2+d_2^2)a^2c^2}{2a^2c(a^2+b^2+c^2)}.$$

Здесь a, $c \neq 0$, b, d_1, d_2 $C_1 \neq 0$, C_2 — произвольные постоянные. Отметим, что $W_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$, получены из решения алгебраической системы (18) с параметром $\delta = -1$ и, как видно, функции $W_i(x, y, z)$ не являются гармоническими.

Утверждение 1 обеспечивает точное решение системы (14) в виде разделяющихся переменных (8) для любой функции $\Omega(\mathbf{x})$, удовлетворяющей уравнению (6). Однако, если использовать функцию $W(\mathbf{x})$, определяемую формулой (3), то можно получить решение в виде обобщенного разделения переменных. Так справедливо утверждение.

Утверждение 4. *Нелинейная система уравнений* (14) *имеет частное точное решение*

$$u(\mathbf{x},t) = \Big[\psi_1(t)W(\mathbf{x}) + \varphi_1(t)\Big]^{\frac{1}{\lambda}}, \qquad v(\mathbf{x},t) = \Big[\psi_2(t)W(\mathbf{x}) + \varphi_2(t)\Big]^{\frac{1}{\lambda}},$$

с функцией $W(\mathbf{x})$ вида (3)*, где симметрическая матрица A, вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют алгебраической системе* (16)*, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами* (7)*, а функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определяются из системы линейных ОДУ вида*

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = (\psi_1 \mathrm{tr}\, A - k_1\lambda)\,\varphi_1 + \alpha\lambda\varphi_2, \qquad \frac{d\varphi_2}{dt} = \beta\lambda\varphi_1 + (\psi_2 \mathrm{tr}\, A - k_2\lambda)\,\varphi_2. \tag{19}$$

Доказательство. Заменой $u^\lambda = R$, $v^\lambda = Q$ систему уравнений (14) преобразуем к виду

$$R_t = R\Delta R + \frac{1}{\lambda}|\nabla R|^2 - k_1\lambda R + \alpha\lambda Q, \tag{20}$$

$$Q_t = Q\Delta Q + \frac{1}{\lambda}|\nabla Q|^2 - k_2\lambda Q + \beta\lambda R. \tag{21}$$

Пусть симметрическая матрица A, вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют алгебраической системе (16), тогда в силу леммы 1 функции

$$R(\mathbf{x},t) = \psi_1(t)\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right) + \varphi_1(t),$$

$$Q(\mathbf{x},t) = \psi_2(t)\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + (\mathbf{B},\mathbf{x}) + C\right) + \varphi_2(t),$$

обращают уравнение (15) в тождество. При этом система уравнений (20), (21) упростится и примет вид $R_t = -k_1\lambda R + \alpha\lambda Q$, $Q_t = -k_2\lambda Q + \beta\lambda R$. Поскольку эта система является линейной, то для указанных функций $R(\mathbf{x}, t)$, $Q(\mathbf{x}, t)$ она распадается на две системы линейных ОДУ для определения функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ вида (7) и функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ вида (19). Утверждение доказано. □

Пример 2. Пусть $n = 3$ и $\lambda = -1$. Тогда нелинейная система уравнений (14) имеет точные решения

$$u_i(x,y,z,t) = \frac{1}{\psi_1(t)W_i(x,y,z) + \varphi_{1i}(t)}, \qquad v_i(x,y,z,t) = \frac{1}{\psi_2(t)W_i(x,y,z) + \varphi_{2i}(t)},$$

где функции $W_i(x,y,z)$, $i = 1,2$, приведены в примере 1, а $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (7), а функции $\varphi_{1i}(t)$, $\varphi_{2i}(t)$ определяются из системы линейных ОДУ (19), в которой необходимо, соответственно, положить $\operatorname{tr} A_i = \dfrac{2(a^2 + (i-1)b^2 + c^2)}{c}$, $i = 1,2$.

Случай $\sigma \neq 0$.

Утверждение 5. *Пусть $\lambda = -1$. Тогда нелинейная система уравнений (4) имеет частное точное решение*

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\psi_1(t)} \exp\left(-\frac{\sigma}{\operatorname{tr} A} W(\mathbf{x})\right), \qquad v(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\psi_2(t)} \exp\left(-\frac{\sigma}{\operatorname{tr} A} W(\mathbf{x})\right),$$

где $W(\mathbf{x})$ задается формулой (3), в которой симметрическая матрица A с ненулевым следом, вектор $\mathbf{B}$ и константа C являются произвольными, а функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (7).

Доказательство. В доказательстве утверждения 1 было показано, что точное решение системы (4) для любого параметра λ представимо формулой (8), в которой функция $P(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению (11), а $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (7). Пусть $P(\mathbf{x}) = F(W(\mathbf{x}))$, где $F(W)$ пока произвольная функция аргумента W, а $W(\mathbf{x})$ задается формулой (3). После подстановки функции $F(W)$ в уравнение (11) и элементарных преобразований придем к соотношению

$$\left[F(W)\frac{d^2F(W)}{dW^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{dF(W)}{dW}\right)^2\right] |\nabla W|^2 + F(W)\frac{dF(W)}{dW} \operatorname{tr} A + \lambda\sigma F^2(W) = 0. \tag{22}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в случае $\lambda = -1$ и $\operatorname{tr} A \neq 0$ функция $F(W) = \exp\left(\dfrac{\sigma}{\operatorname{tr} A} W\right)$ обращает равенство (22) в тождество для произвольной функции $W(\mathbf{x})$, что и требовалось доказать. □

Перед тем как сформулировать результат для многомерных точных решений нелинейной системы (4) с использованием конструкции (3) в случае $\lambda \neq -1$, предварительно докажем следующий результат.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \neq -1$, функция $W(\mathbf{x})$ задается формулой (3), в которой симметрическая матрица A с условием $\operatorname{tr} A \neq 0$, вектор $\mathbf{B}$ и константа C удовлетворяют алгебраической системе (18). Тогда нелинейное уравнение в частных производных (11) имеет точное многомерное решение*

$$P(\mathbf{x}) = W^{\varrho}(\mathbf{x}) \left[C_1 J_\nu\left(\Theta\sqrt{W(\mathbf{x})}\right) + C_2 Y_\nu\left(\Theta\sqrt{W(\mathbf{x})}\right)\right]^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \tag{23}$$

где J_ν, Y_ν — функции Бесселя, соответственно, первого и второго рода, C_1, C_2 — произвольные постоянные, такие что $C_1C_2 \neq 0$ и приняты обозначения

$$\nu = -\delta - 1, \qquad \varrho = \frac{\lambda(\delta+1)}{2(1+\lambda)}, \qquad \Theta = 2\sqrt{-\frac{\delta(1+\lambda)\sigma}{\operatorname{tr} A}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отыскивая решение уравнения (11) в виде $P(\mathbf{x}) = F(W(\mathbf{x}))$, где $W(\mathbf{x})$ задается формулой (3), мы придем к равенству (22). Заметим, что если функция $F(W)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ второго порядка

$$F(W)\frac{d^2F(W)}{dW^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{dF(W)}{dW}\right)^2 - \frac{\delta}{W}F(W)\frac{dF(W)}{dW} - \frac{\delta\lambda\sigma}{W\operatorname{tr}A}F^2(W) = 0, \tag{24}$$

то равенство (22) примет вид

$$\delta|\nabla W|^2 + W\operatorname{tr}A = 0. \tag{25}$$

Соотношение (25) с учетом вида функции $W(\mathbf{x})$ эквивалентно алгебраической системе уравнений (18). ОДУ (24) заменой $F(W) = [y(W)]^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$ [24] сводится к линейному ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2y(W)}{dW^2} - \frac{\delta}{W}\frac{dy(W)}{dW} - \frac{\delta(1+\lambda)\sigma}{W\operatorname{tr}A}y(W) = 0,$$

общее решение которого выражается через бесселевы функции. Возвращаясь к функции $F(W)$, окончательно получим решение (23). Лемма доказана. □

С учетом этой леммы нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 6. *Нелинейная система уравнений* (4) *в случае* $\lambda \neq -1$ *имеет частное точное, анизотропное по пространственным переменным, решение* (8)*, где* $\psi_1(t)$*,* $\psi_2(t)$ *удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами* (7)*, а функция имеет вид* (23)*, в которой* $W(\mathbf{x})$ *задается формулой* (3)*, при этом симметрическая матрица* A *с условием* $\operatorname{tr}A \neq 0$*, вектор* $\mathbf{B}$ *и константа* C *удовлетворяют алгебраической системе* (18)*.*

Пример 3. Пусть $n = 3$, $\lambda \neq -1$. Тогда система уравнений (4) имеет частное точное, анизотропное по пространственным переменным, решение

$$u(x,y,z,t) = \Big[\psi_1(t)P_i(x,y,z)\Big]^{1/\lambda}, \qquad v(x,y,z,t) = \Big[\psi_2(t)P_i(x,y,z)\Big]^{1/\lambda}, \quad i = \overline{1,3},$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (7), а функции $P_i(x,y,z)$, $i = \overline{1,3}$, представляются формулами

$$P_i(x,y,z) = \left[C_1J_0\left(\Theta_i\sqrt{W_i(x,y,z)}\right) + C_2Y_0\left(\Theta_i\sqrt{W_i(x,y,z)}\right)\right]^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}, \quad i = 1,2,$$

где $\Theta_1 = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{c(1+\lambda)\sigma}{a^2+c^2}}$, $\Theta_2 = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{c(1+\lambda)\sigma}{a^2+b^2+c^2}}$, а функции $W_i(x,y,z)$, $i = 1,2$, приведены в примере 1,

$$P_3(x,y,z) = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\Theta_3^2}\right)^{1/4}\left(C_1\sin\Theta_3\sqrt{W_3(x,y,z)} + C_2\cos\Theta_3\sqrt{W_3(x,y,z)}\right)\right]^{\frac{\lambda}{1+\lambda}},$$

$$W_3(x,y,z) = (ax+by+cz+d)^2, \quad \Theta_2 = \sqrt{\frac{c(1+\lambda)\sigma}{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

Здесь J_0, Y_0 — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, a, $c \neq 0$, b, d, C_1, C_2 — произвольные постоянные такие, что $C_1C_2 \neq 0$.

Отметим, что функция $W_3(x, y, z)$, приведенная в примере 3, получена путем решения алгебраической системы (18) с параметром $\delta = -1/2$.

В дополнение приведем решение линейной системы ОДУ (7) для функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, а также другие многомерные точные решения уравнения (11), отличные от построенных выше.

Пример 4. Система линейных ОДУ (7) в зависимости от условий на коэффициенты имеет следующие общие решения.

(1) Пусть $k_1 + k_2 \neq 0$ и $K = (k_1 - k_2)^2 + 4\alpha\beta \neq 0$, тогда имеем

$$\psi_1(t) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(k_1 + k_2 - \sqrt{K}\right)\lambda t\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(k_1 + k_2 + \sqrt{K}\right)\lambda t\right),$$

$$\psi_2(t) = \frac{C_1}{2\alpha}\left(k_1 - k_2 + \sqrt{K}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(k_1 + k_2 - \sqrt{K}\right)\lambda t\right) -$$
$$- \frac{C_2}{2\alpha}\left(k_2 - k_1 + \sqrt{K}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(k_1 + k_2 + \sqrt{K}\right)\lambda t\right).$$

(2) Пусть $k_1 + k_2 \neq 0$, $k_1 - k_2 \neq 0$ и $K = (k_1 - k_2)^2 + 4\alpha\beta = 0$, тогда имеем

$$\psi_1(t) = \Big(C_1 + C_2 t\Big)\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left(k_1 + k_2\right)t\right),$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2\alpha\lambda}\Big(2C_2 + C_1(k_1 - k_2)\lambda + C_2(k_1 - k_2)\lambda t\Big)\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left(k_1 + k_2\right)t\right).$$

(3) Пусть $k_1 + k_2 = 0$, $\omega = k_1^2 + \alpha\beta < 0$, тогда получим периодическое по времени решение

$$\psi_1(t) = C_1 \sin\Big(\lambda\sqrt{-\omega}\, t\Big) + C_2 \cos\Big(\lambda\sqrt{-\omega}\, t\Big),$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\alpha}\Big(k_1 C_1 - C_2\sqrt{-\omega}\Big)\sin\Big(\lambda\sqrt{-\omega}\, t\Big) + \frac{1}{\alpha}\Big(k_1 C_2 + C_1\sqrt{-\omega}\Big)\cos\Big(\lambda\sqrt{-\omega}\, t\Big).$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Лемма 3. *Уравнение в частных производных* (11) *обладает точным решением вида* $P(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$, *где функции* $F_i(x_i)$ *удовлетворяют ОДУ второго порядка:*

$$F_i(x_i)\,\frac{d^2 F_i(x_i)}{dx_i^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{dF_i(x_i)}{dx_i}\right)^2 - \varepsilon_i F_i^2(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{26}$$

где ε_i *— константы разделения, такие что* $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = -\lambda\sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как уравнение (11) является однородным, то его решение в разделяющихся переменных будем отыскивать в виде: $P(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$. После подстановки этой функции в уравнение (11) приходим к равенству

$$P^2\left(\lambda\sigma + \sum_{i=1}^{n}\Omega_i\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Omega_i = \frac{1}{F_i(x_i)}\frac{d^2 F_i(x_i)}{dx_i^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{1}{F_i^2(x_i)}\left(\frac{dF_i(x_i)}{dx_i}\right)^2.$$

Чтобы разделить переменные в этом соотношении потребуем выполнение n равенств $\Omega_i = \varepsilon_i$ с условием $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = -\lambda\sigma$. Равенство $\Omega_i = \varepsilon_i$ для каждого $i = \overline{1,n}$ эквивалентно уравнению (26). Лемма доказана. $\square$

Пример 5. Пусть $n = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$, $\varepsilon_2 = -\lambda\sigma - \varepsilon^2$, $\gamma = \dfrac{\lambda}{1+\lambda} > 0$, $\lambda \neq -1$. Тогда из леммы 3 в этом случае получим решение уравнения (11) вида $P(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$, где

$$F_1(x_1) = \frac{1}{2^\gamma} \exp\left(-\sqrt{\gamma}\varepsilon x_1\right) \left[\frac{1}{\gamma\varepsilon^2}\left(C_1 \exp\left(\frac{2\varepsilon x_1}{\sqrt{\gamma}}\right) - C_2\right)^2\right]^{\gamma/2},$$

$$F_2(x_2) = \left[\frac{1}{\gamma\varrho^2}\left(C_4^2 + (C_3^2 - C_4^2)\sin^2\left(\frac{\varrho x_2}{\sqrt{\gamma}}\right) - 2C_3C_4 \sin\left(\frac{\varrho x_2}{\sqrt{\gamma}}\right)\cos\left(\frac{\varrho x_2}{\sqrt{\gamma}}\right)\right)\right]^{\gamma/2}.$$

При $\lambda = -1$ имеем решение уравнения (11) вида $P(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$, где

$$F_1(x_1) = \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{2}x_1^2 - C_1x_1 + C_2\right), \qquad F_2(x_2) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 - \sigma}{2}x_2^2 - C_3x_2 + C_4\right).$$

В случае $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 + \lambda\sigma = 0$ получим $F_1(x_1) = (C_1x_1 + C_2)^\gamma$, $F_2(x_2) = (C_3x_2 + C_4)^\gamma$. Здесь $\varrho = \sqrt{\lambda\sigma + \varepsilon^2}$, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В этом случае система уравнений (4) имеет частное точное, анизотропное по пространственным переменным, решение следующего вида

$$u(x_1, x_2, t) = \Big[\psi_1(t)F_1(x_1)F_2(x_2)\Big]^{1/\lambda}, \qquad v(x_1, x_2, t) = \Big[\psi_2(t)F_1(x_1)F_2(x_2)\Big]^{1/\lambda},$$

где функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ получены в примере 4, а $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ приведены выше.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-29-00819.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polyanin A. D., Kutepov A. M., Kazenin D. A., Vyazmin A. V. Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering. London: CRC Press, 2001. https://doi.org/10.1201/9781420024517
2. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
3. Журавлев В. М. Об одном классе моделей автоволн в активных средах с диффузией, допускающих точные решения // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1997. Т. 65. Вып. 3. С. 285–290.
4. Шмидт А. В. Точные решения систем уравнений типа реакция–диффузия // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3. № 4. С. 87–94.
5. Ma Luyi, Niu Hong-Tao, Wang Zhi-Cheng. Pyramidal traveling fronts in the Belousov–Zhabotinskii reaction–diffusion system in $\mathbb{R}^3$ // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. Vol. 2020. No. 112. P. 1–29.
6. Wei Jieqiang, Fridman E., Johansson K. H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 47–53. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.04.040
7. Kosov A. A., Semenov E. I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1847. No. 1. 012007. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1847/1/012007

8. Elamvazhuthi K., Berman S. Mean-field models in swarm robotics: a survey // Bioinspiration and Biomimetics. 2019. Vol. 15. No. 1. 015001. https://doi.org/10.1088/1748-3190/ab49a4
9. Álvarez–Caudevilla P., Du Yihong, Peng Rui. Qualitative analysis of a cooperative reaction–diffusion system in a spatiotemporally degenerate environment // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2014. Vol. 46. Issue 1. P. 499–531. https://doi.org/10.1137/13091628x
10. Rao Feng, Kang Yun. The complex dynamics of a diffusive prey–predator model with an Allee effect in prey // Ecological Complexity. 2016. Vol. 28. P. 123–144. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2016.07.001
11. Amorim P., Telch B., Villada L. M. A reaction–diffusion predator–prey model with pursuit, evasion, and nonlocal sensing // Mathematical Biosciences and Engineering. 2019. Vol. 16. Issue 5. P. 5114–5145. https://doi.org/10.3934/mbe.2019257
12. Chen Zhenglong, Li Shunjie, Zhang Xuebing. Analysis of a delayed reaction–diffusion predator–prey system with fear effect and anti–predator behaviour // Mathematics. 2022. Vol. 10. Issue 18. 3270. https://doi.org/10.3390/math10183270
13. Song Yingwei, Zhang Tie, Li Jinpeng. Dynamical behavior in a reaction–diffusion system with prey–taxis // Electronic Journal of Differential Equations. 2022. Vol. 2022. No. 37. P. 1–15.
14. Kuang Yang, Wang Kaifa. Coexistence and extinction in a data-based ratio-dependent model of an insect community // Mathematical Biosciences and Engineering. 2020. Vol. 17. Issue 4. P. 3274–3293. https://doi.org/10.3934/mbe.2020187
15. Cherniha R., King J. R. Non-linear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2005. Vol. 308. Issue 1. P. 11–35. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.034
16. Косов А. А., Семёнов Э. И. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы уравнений реакции–диффузии // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 108–122. https://doi.org/10.1134/S0374064118010090
17. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
18. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: Изд-во «ИПМех РАН», 2020.
19. Polyanin A. D., Zhurov A. I. Separation of variables and exact solutions to nonlinear PDEs. Chapman and Hall/CRC, 2021. https://doi.org/10.1201/9781003042297
20. Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Chapman and Hall/CRC, 2006. https://doi.org/10.1201/9781420011623
21. Awasthi P., Kumar M., Nec Yana. Effects of anisotropy in tridimensional diffusion: Flow patterns and transport efficiency // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2023. Vol. 83. Issue 2. P. 460–483. https://doi.org/10.1137/22M1476642
22. Косов А. А., Семенов Э. И. Анизотропные решения нелинейной кинетической модели эллиптического типа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2020. Т. 13. Вып. 4. С. 48–57. https://doi.org/10.14529/mmp200404
23. Косов А. А., Семенов Э. И. Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63. № 6. С. 1290–1307. https://www.mathnet.ru/rus/smj7732
24. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 03.02.2023

Принята к публикации 04.04.2023

Косов Александр Аркадьевич, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Семенов Эдуард Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945
E-mail: edwseiz@gmail.com

Тирских Владимир Викторович, к. ф.-м. н., доцент, Иркутский государственный университет путей сообщения, 664074, Россия, Иркутск, ул. Чернышевского, 15.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6673-7289
E-mail: tirskikh_vv@irgups.ru

Цитирование: А. А. Косов, Э. И. Семенов, В. В. Тирских. О многомерных точных решениях одной нелинейной системы реакции–диффузии // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 225–239.

A. A. Kosov, E. I. Semenov, V. V. Tirskikh

On multidimensional exact solutions of a nonlinear reaction–diffusion system

Keywords: reaction–diffusion system, reduction, exact solutions.

MSC2020: 35K57, 35K55, 35Q35

DOI: 10.35634/vm230203

We study a multidimensional case of a nonlinear reaction–diffusion system modeled by a system of two parabolic equations with power nonlinearities. Such systems can be used to simulate the process of propagation in space of interacting distributed formations of robots of two types. Such equations also describe the processes of nonlinear diffusion in reacting two-component continuous media. An original version of the reduction method is proposed, which reduces the construction of the dependence of the exact solution on spatial variables to the solution of the Helmholtz equation, and the dependence on time to the solution of a linear system of ordinary differential equations. A number of examples of multiparameter families of exact solutions given by elementary functions are constructed.

Funding. The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, project no. 22-29-00819.

REFERENCES

1. Polyanin A. D., Kutepov A. M., Kazenin D. A., Vyazmin A. V. *Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering*, London: CRC Press, 2001. https://doi.org/10.1201/9781420024517
2. Kaptsov O. V. *Metody integrirovaniya uravnenii s chastnymi proizvodnymi* (Integration methods for partial differential equations), Moscow: Fizmatlit, 2009.
3. Zhuravlev V. M. On a class of models of autowaves in active media with diffusion that admit exact solutions, *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*, 1997, vol. 65, no. 3, pp. 285–290 (in Russian).
4. Shmidt A. V. Exact solutions of systems of equations of the reaction–diffusion type, *Vychislitel'nye Tekhnologii*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 87–94 (in Russian).
5. Ma Luyi, Niu Hong-Tao, Wang Zhi-Cheng. Pyramidal traveling fronts in the Belousov–Zhabotinskii reaction–diffusion system in $\mathbb{R}^3$, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2020, vol. 2020, no. 112, pp. 1–29.
6. Wei Jieqiang, Fridman E., Johansson K. H. A PDE approach to deployment of mobile agents under leader relative position measurements, *Automatica*, 2019, vol. 106, pp. 47–53. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.04.040
7. Kosov A. A., Semenov E. I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1847, no. 1, 012007. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1847/1/012007
8. Elamvazhuthi K., Berman S. Mean-field models in swarm robotics: a survey, *Bioinspiration and Biomimetics*, 2019, vol. 15, no. 1, 015001. https://doi.org/10.1088/1748-3190/ab49a4
9. Álvarez–Caudevilla P., Du Yihong, Peng Rui. Qualitative analysis of a cooperative reaction–diffusion system in a spatiotemporally degenerate environment, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2014, vol. 46, issue 1, pp. 499–531. https://doi.org/10.1137/13091628x
10. Rao Feng, Kang Yun. The complex dynamics of a diffusive prey–predator model with an Allee effect in prey, *Ecological Complexity*, 2016, vol. 28, pp. 123–144. https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2016.07.001
11. Amorim P., Telch B., Villada L. M. A reaction–diffusion predator–prey model with pursuit, evasion, and nonlocal sensing, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, vol. 16, issue 5, pp. 5114–5145. https://doi.org/10.3934/mbe.2019257

12. Chen Zhenglong, Li Shunjie, Zhang Xuebing. Analysis of a delayed reaction–diffusion predator–prey system with fear effect and anti–predator behaviour, *Mathematics*, 2022, vol. 10, issue 18, 3270. https://doi.org/10.3390/math10183270
13. Song Yingwei, Zhang Tie, Li Jinpeng. Dynamical behavior in a reaction–diffusion system with prey–taxis, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2022, vol. 2022, no. 37, pp. 1–15.
14. Kuang Yang, Wang Kaifa. Coexistence and extinction in a data-based ratio-dependent model of an insect community, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2020, vol. 17, issue 4, pp. 3274–3293. https://doi.org/10.3934/mbe.2020187
15. Cherniha R., King J. R. Non-linear reaction–diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, vol. 308, issue 1, pp. 11–35. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.034
16. Kosov A. A., Semenov E. I. On exact multidimensional solutions of a nonlinear system of reaction–diffusion equations, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 1, pp. 106–120. https://doi.org/10.1134/S0012266118010093
17. Polyanin A. D. Zaitsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* (Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics), Moscow: Fizmatlit, 2005.
18. Polyanin A. D., Zhurov A. I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki* (Methods of separation of variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics), Moscow: Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 2020.
19. Polyanin A. D., Zhurov A. I. *Separation of variables and exact solutions to nonlinear PDEs*, Chapman and Hall/CRC, 2021. https://doi.org/10.1201/9781003042297
20. Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, Chapman and Hall/CRC, 2006. https://doi.org/10.1201/9781420011623
21. Awasthi P., Kumar M., Nec Yana. Effects of anisotropy in tridimensional diffusion: Flow patterns and transport efficiency, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2023, vol. 83, issue 2, pp. 460–483. https://doi.org/10.1137/22M1476642
22. Kosov A. A., Semenov E. I. Anisotropic solutions of a nonlinear kinetic model of elliptic type, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta. Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie*, 2020, vol. 13, issue 4, pp. 48–57 (in Russian). https://doi.org/10.14529/mmp200404
23. Kosov A. A., Semenov E. I. New exact solutions of the diffusion equation with power nonlinearity, *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, no. 6, pp. 1102–1116. https://doi.org/10.1134/S0037446622060106
24. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* (Handbook of ordinary differential equations), Moscow: Nauka, 1971.

Received 03.02.2023

Accepted 04.04.2023

Aleksandr Arkad'evich Kosov, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828
E-mail: kosov_idstu@mail.ru

Eduard Ivanovich Semenov, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), ul. Lermontova, 134, Irkutsk, 664033, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945
E-mail: edwseiz@gmail.com

Vladimir Viktorovich Tirskikh, Associate Professor, Irkutsk State Transport University, ul. Chernyshevskogo, 15, Irkutsk, 664074, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6673-7289
E-mail: tirskikh_vv@irgups.ru

Citation: A. A. Kosov, E. I. Semenov, V. V. Tirskikh. On multidimensional exact solutions of a nonlinear reaction–diffusion system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 225–239.