МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 275–280.

УДК 519.8

© *М. С. Никольский*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОРРЕКТНОСТИ МИНИМАКСА

В теории игр и теории исследования операций часто появляется минимакс от функции $f(x,\, y)$, зависящей от двух векторных переменных x, y. Изучению свойств минимакса (или максимина) посвящено много работ. Минимакс можно трактовать как наименьший гарантированный результат для минимизирующего игрока (минимизирующей оперирующей стороны). При изучении минимаксных задач определенный интерес представляют различные вопросы о корректности. Одному из таких вопросов посвящена настоящая статья. В ней векторы x, y принадлежат компактам P, Q из соответствующих евклидовых пространств R^k, R^l, а функция $f(x,\, y)$ непрерывна на произведении пространств $R^k \times R^l$. В статье рассматривается вопрос о зависимости минимакса от малых изменений компактов P, Q в метрике Хаусдорфа. Обосновывается непрерывность зависимости минимакса от малых вариаций множеств P, Q.

Ключевые слова: теория игр, исследование операций, минимакс, метрика Хаусдорфа, корректность.

DOI: 10.35634/vm230206

Рассматривается скалярная функция $f(x,\, y)$, определенная и непрерывная на $R^k \times R^l$, где $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$. Символом R^m $(m \geqslant 1)$ условимся обозначать m-мерное арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные столбцы из m чисел. Скалярное произведение $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ и длина вектора $|\cdot|$ в R^m задаются традиционным образом.

При данных непустых компактах $P \subset R^k$, $Q \subset R^l$ определен минимакс $\gamma(P,\, Q)$ вида:

$$\gamma(P,\, Q) = \min_{x \in P} \max_{y \in Q} f(x,\, y). \tag{1}$$

Отметим, что для непрерывной на $R^k \times R^l$ функции $f(x,\, y)$ функция $\max\limits_{y \in Q} f(x,\, y)$ непрерывна на R^k и поэтому величина $\gamma(P,\, Q)$ (см. (1) определена корректно. В игровых задачах двух лиц, когда один игрок стремится к минимизации функции $f(x,\, y)$ (платежа) за счет выбора $x \in P$, но он не знает выбора $y \in Q$ вторым игроком, величина $\gamma(P,\, Q)$ характеризует экстремальные возможности этого игрока (см., например, [1–3]). Аналогично в задачах управления вектором $x \in P$ при наличии неизвестных возмущений $y \in Q$, когда управляющий вектором $x \in P$ субъект стремится к минимизации функции $f(x,\, y)$, величина $\gamma(P,\, Q)$ также характеризует его экстремальные возможности (наименьший гарантированный результат). Такого рода задачи управления в условиях неопределенности иногда называют игрой с Природой (см., например, [4]).

Отметим, что в литературе также появляется величина

$$\hat{\gamma}(P,\, Q) = \max_{x \in P} \min_{y \in Q} a(x,\, y), \tag{2}$$

где функция $a(x,\, y)$ определена и непрерывна на $R^k \times R^l$. Она возникает, например, когда игрок (оперирующая сторона) стремится к максимизации функции выигрыша $a(x,\, y)$ по $x \in P$, не зная выбора вектора $y \in Q$. В этом случае можно положить в (2) $a(x,\, y) = -b(x,\, y)$, и мы приходим к равенству

$$\hat{\gamma}(P,\, Q) = -\min_{x \in P} \max_{y \in Q} b(x,\, y).$$

Из сказанного следует, что вместо функции $\hat{\gamma}(P,\, Q)$ можно изучать свойства функции $\min\limits_{x\in P}\max\limits_{y\in Q} b(x,\, y)$.

Отметим, что в монографиях [5–7] и статье [8], в частности, излагаются численные методы вычисления $\gamma(P,\, Q)$.

Условимся обозначать множества непустых компактов $P \subset R^k$, $Q \subset R^l$ через U, V соответственно. Множество пар $\Omega = (P,\, Q)$, где $P \in U$, $Q \in V$, обозначим через W. Заметим, что величина $\gamma(\Omega) = \gamma(P,\, Q)$ при $\Omega \in W$ в общем случае существенно зависит от Ω. Интересно изучить вопрос о непрерывности функции $\gamma(\Omega)$ в произвольной точке $\Omega_0 \in W$ относительно метрики

$$h_1(\Omega_1,\, \Omega_2) = h(P_1,\, P_2) + h(Q_1,\, Q_2), \tag{3}$$

где $h(\cdot,\cdot)$ означает расстояние Хаусдорфа между соответствующими компактами (см., например, [9]). Если удастся обосновать такую непрерывность, то это обстоятельство можно трактовать как некоторого рода корректность минимакса (1) при малых отклонениях пары множеств $\Omega = (P,\, Q) \in W$ в метрике (3) от номинальной пары $\Omega_0 = (P_0,\, Q_0) \in W$. Такого рода отклонения возникают, например, при неточной информации о возможностях игроков (оперирующих сторон).

Фиксируем точку $\Omega_0 = (P_0,\, Q_0) \in W$ и будем изучать поведение функции $\gamma(\Omega) = \gamma(P,\, Q)$ при малых отклонениях Ω от Ω_0 в метрике h_1 (см. (3)). Мы ограничим наши рассмотрения точками $\Omega = (P,\, Q)$, для которых выполняются неравенства

$$h(P,\, P_0) \leqslant 1, \qquad h(Q,\, Q_0) \leqslant 1. \tag{4}$$

Из определения расстояния Хаусдорфа (см. [9]) и из (4) вытекают включения $P \subset P_0 + s$, $Q \subset Q_0 + \sigma$, где

$$s = \{x \in R^k\colon |x| \leqslant 1\}, \qquad \sigma = \{y \in R^l\colon |y| \leqslant 1\}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что для точек x, y рассматриваемых компактов P, Q выполняются неравенства

$$|x| \leqslant c_1, \qquad |y| \leqslant c_2, \tag{6}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — достаточно большие константы.

Произвольным $x \in R^k$ и $Q \in V$ сопоставим величину

$$g(x,\, Q) = \max_{y\in Q} f(x,\, y). \tag{7}$$

Теорема 1. *При $|x| \leqslant c_1$ и $Q \in V$, удовлетворяющих неравенству $h(Q,\, Q_0) \leqslant 1$, функция $g(x,\, Q)$ непрерывна по совокупности переменных $(x,\, Q)$ в метрике*

$$\alpha((x_1,\, Q_1),\, (x_2,\, Q_2)) = |x_1 - x_2| + h(Q_1,\, Q_2). \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $z = (x,\, y)$, где $x \in R^k$, $y \in R^l$. На множестве пар $z = (x,\, y)$ можно ввести скалярное произведение вида:

$$\langle z_1,\, z_1\rangle = \langle x_1,\, x_2\rangle + \langle y_1,\, y_2\rangle,$$

где $z_1 = (x_1,\, y_1)$, $z_2 = (x_2,\, y_2)$, и длину

$$|z| = \langle z,\, z\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Условимся обозначать евклидово пространство пар $z = (x,\, y)$ через R, а через $f(z)$ — функцию $f(x,\, y)$. Обозначим далее (см. (6))

$$M = \{z \in R\colon |x| \leqslant c_1,\ \ |y| \leqslant c_2\}. \tag{9}$$

Модулем непрерывности $m(\delta)$ непрерывной на M функции $f(z)$ при $\delta \geqslant 0$ назовем величину

$$m(\delta) = \max_{z_1,\, z_2} |f(z_1) - f(z_2)|,$$

где $z_1 \in M$, $z_2 \in M$, $|z_1 - z_1| \leqslant \delta$.

Используя равномерную непрерывность функции $f(z)$ на множестве M (см. (9)), можно доказать, что функция $m(\delta)$ непрерывна при $\delta \geqslant 0$, растет монотонно вместе с δ и $m(0) = 0$. В дальнейшем мы используем, что $m(\delta)$ стремится к нулю при $\delta \to 0+$.

Фиксируем вектор $\xi \in R^k$ и компакт $\tilde{Q} \in V$, причем $|\xi| \leqslant c_1$, $h(\tilde{Q},\, Q_0) \leqslant 1$. Рассмотрим разность

$$\Delta = g(x,\, Q) - g(\xi,\, \tilde{Q}),$$

где $|x| \leqslant c_1$, $h(Q,\, Q_0) \leqslant 1$. Из определения функции $g(x,\, Q)$ (см. (7)) вытекает, что при соответствующих максимизаторах $y(x,\, Q) \in Q$, $y(\xi,\, \tilde{Q}) \in \tilde{Q}$ имеют место равенства

$$g(x,\, Q) = f(x,\, y(x,\, Q)), \qquad g(\xi,\, \tilde{Q}) = f(\xi,\, h(\xi,\, \tilde{Q})). \tag{10}$$

Итак,

$$g(x,\, Q) - g(\xi,\, \tilde{Q}) = f(x,\, y(x,\, Q)) - f(\xi,\, y(\xi,\, \tilde{Q})). \tag{11}$$

Из определения расстояния Хаусдорфа (см., например, [9]) следует, что (см. (5))

$$Q \subset \tilde{Q} + h(Q,\, \tilde{Q})\sigma.$$

Отсюда вытекает, что справедливо равенство

$$y(x,\, Q) = \hat{y} + h(Q,\, \tilde{Q})e, \tag{12}$$

где $\hat{y}$ — некоторый вектор из $\tilde{Q}$, а e — некоторый вектор из σ. Используя соотношение (12) и модуль непрерывности $m(\delta)$, приходим к неравенству

$$f(x,\, y(x,\, Q)) \leqslant f(x,\, \hat{y}) + m(h(Q,\, \tilde{Q})). \tag{13}$$

Из (10) и включения $\hat{y} \in \tilde{Q}$ вытекает неравенство

$$f(\xi,\, \hat{y}) \leqslant f(\xi,\, y(\xi,\, \tilde{Q})). \tag{14}$$

Теперь из соотношений (11)–(14) получаем неравенства

$$g(x,\, Q) - g(\xi,\, \tilde{Q}) \leqslant f(x,\, \hat{y}) + m(h(Q,\, \tilde{Q})) - f(\xi,\, \hat{y}) \leqslant m(|x - \xi|) + m(h(Q,\, \tilde{Q})). \tag{15}$$

Рассуждая аналогичным образом с очевидными изменениями, получим оценку

$$g(\xi,\, \tilde{Q}) - g(x,\, Q) \leqslant m(|x - \xi|) + m(h(Q,\, \tilde{Q})). \tag{16}$$

Из (15), (16) вытекает неравенство

$$|g(x,\, Q) - g(\xi,\, \tilde{Q})| \leqslant m(|x - \xi|) + m(h(Q,\, \tilde{Q})). \tag{17}$$

Из свойств модуля непрерывности $m(\delta)$ следует, что при $|x-\xi|$, стремящемся к нулю, функция $m(|x-\xi|)$ стремится к нулю. Аналогично, при $h(Q,\,\tilde{Q})$ стремящемся к нулю, $m(h(Q,\,\tilde{Q}))$ стремится к нулю. Отсюда и из неравенства (17) вытекает, что функция $g(x,\,Q)$ непрерывна в точке $(\xi,\,\tilde{Q})$ по совокупности переменных $(x,\,Q)$ при $|x|\leqslant c_1$, $h(Q,\,Q_0)\leqslant 1$ в метрике α (см. (8)). Так как пара $(\xi,\,\tilde{Q})$ — произвольная пара из множества пар $|\xi|\leqslant c_1$, $h(\tilde{Q},\,Q_0)\leqslant 1$, то из сказанного вытекает утверждение теоремы 1. □

Замечание 1. Отметим, что неравенство (17) справедливо при произвольных x, ξ, удовлетворяющих неравенствам $|x|\leqslant c_1$, $|\xi|\leqslant c_1$, и произвольных Q, $\tilde{Q}$, удовлетворяющих неравенствам $h(Q,\,Q_0)\leqslant 1$, $h(\tilde{Q},\,Q_0)\leqslant 1$. Этим фактом мы воспользуемся при доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. *В произвольной точке $\Omega_0=(P_0,\,Q_0)\in W$ функция $\gamma(P,\,Q)$ (см. (1)) непрерывна относительно метрики $h_1(\cdot,\cdot)$ (см. (3)).*

Доказательство. Для величины $\gamma(P,\,Q)$ справедливо равенство (см. (1), (7))

$$\gamma(P,\,Q)=\min_{x\in P} g(x,\,Q). \tag{18}$$

Рассмотрим разность

$$\Delta_1=\gamma(P,\,Q)-\gamma(P_0,\,Q_0) \tag{19}$$

при $h(P,\,P_0)\leqslant 1$, $h(Q,\,Q_0)\leqslant 1$. Используя формулу (18) и непрерывность функции $g(x,\,Q)$ (см. теорему 1), разность Δ_1 можно записать в виде

$$\Delta_1=g(x(Q),\,Q)-g(x(Q_0),\,Q_0),$$

где $x(Q)$ — минимизатор функции $g(x,\,Q)$ по $x\in P$, $x(Q_0)$ — минимизатор функции $g(x,\,Q_0)$ по $x\in P_0$. Из определения метрики Хаусдорфа (см. [9]) вытекает, что (см. (5)) $P_0\subset P+h(P,\,P_0)s$. Отсюда следует, что

$$x(Q_0)=\hat{x}+h(P,\,P_0)e, \tag{20}$$

где $\hat{x}$ — некоторый вектор из P, а e — некоторый вектор из s. Используя равенство (20), можно получить неравенство

$$|\hat{x}-x(Q_0)|\leqslant h(P,\,P_0). \tag{21}$$

Далее, так как

$$g(x(Q),\,Q)=\min_{x\in P} g(x,\,Q),$$

то

$$g(\hat{x},\,Q)\geqslant g(x(Q),\,Q). \tag{22}$$

Из сказанного вытекает, что (см. (17), (19)–(22))

$$\Delta_1\leqslant g(\hat{x},\,Q)-g(x(Q_0),\,Q_0)\leqslant m(h(P,\,P_0))+m(h(Q,\,Q_0)). \tag{23}$$

Аналогичным образом с очевидными изменениями обосновываем неравенство

$$-\Delta_1\leqslant m(h(P,\,P_0))+m(h(Q,\,Q_0)). \tag{24}$$

Из соотношений (19), (23), (24) получаем неравенство

$$|\gamma(P, Q) - \gamma(P_0, Q_0)| \leqslant m(h(P, P_0)) + m(h(Q, Q_0)). \tag{25}$$

При $h(P, P_0) \to 0$, $h(Q, Q_0) \to 0$, в силу свойств модуля непрерывности, $m(h(P, P_0)) \to 0$, $m(h(Q, Q_0)) \to 0$. Поэтому из неравенства (25) следует искомая непрерывность функции $\gamma(P, Q)$ в точке (P_0, Q_0). Так как точка (P_0, Q_0) — произвольная точка из W, то функция $\gamma(P, Q)$ оказывается непрерывной на W относительно метрики $h_1(\cdot,\cdot)$ (см. (3)). □

Замечание 2. Неравенство (25) обосновано только при $h(P, P_0) \leqslant 1$, $h(Q, Q_0) \leqslant 1$. Если предположить, что функция $f(z)$ удовлетворяет на R условию Липшица вида

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant l|z_1 - z_2|,$$

где z_1, z_2 — произвольные векторы из R, а l — неотрицательная константа, то модуль непрерывности $m(\delta)$ при $\delta \geqslant 0$ можно оценить сверху величиной $l\delta$, и тогда при произвольных (P, Q), (P_0, Q_0) из W можно обосновать оценку

$$|\gamma(P, Q) - \gamma(P_0, Q_0)| \leqslant l(h(P, P_0) + h(Q, Q_0)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
2. Васин А. А., Морозов В. В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. М.: 2003.
3. Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е. Оценка рисков и гарантии в конфликтах. М.: Юрайт, 2023.
4. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
5. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
6. Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения. М.: Сов. Радио, 1970.
7. Федоров В. В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
8. Дудов С. И. О задаче фиксированных допусков // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37. № 8. С. 937–944. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf2031
9. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высшая школа, 2001.

Поступила в редакцию 09.02.2023

Принята к публикации 10.04.2023

Никольский Михаил Сергеевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 117966, Россия, г. Москва, ул. Губкина, 8.
E-mail: mni@mi-ras.ru

Цитирование: М. С. Никольский. Об одной задаче корректности минимакса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 275–280.

M. S. Nikol'skii

On one correctness problem for minimax

Keywords: game theory, operations research, minimax, Hausdorff metric, correctness.

MSC2020: 90C47

DOI: 10.35634/vm230206

In game theory and operations research theory, a minimax often appears for a function $f(x,\, y)$ that depends on two vector variables x, y. Many works have been devoted to the study of the properties of minimax (or maximin). A minimax can be interpreted as the smallest guaranteed result for the minimizing player (the minimizing operator). In the study of minimax problems, various correctness issues are of some interest. This paper is devoted to one of these issues. In it, vectors x, y belong to compacts P, Q of corresponding Euclidean spaces R^k, R^l, and function $f(x,\, y)$ is continuous on product of spaces $R^k \times R^l$. The paper considers the dependence of minimax on small changes of compacts P, Q in the Hausdorff metric. The continuity of the dependence of minimax on small variations of compacts P, Q is proved.

REFERENCES

1. Petrosyan L. A., Zenkevich N. A., Shevkoplyas E. V. *Teoriya igr* (Game theory), Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2012.
2. Vasin A. A., Morozov V. V. *Vvedenie v teoriyu igr s prilozheniyami v ekonomike* (Introduction to the game theory with applications in economy), Moscow: 2003.
3. Zhukovskii V. I., Salukvadze M. E. *Otsenka riskov i garantii v konfliktakh* (Estimation of risks and guarantees in conflicts), Moscow: Yurait, 2023.
4. Germeier Yu. B. *Vvedenie v teoriyu issledovaniya operatsii* (Introduction to the theory of operations research), Moscow: Nauka, 1971.
5. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimax* (Introduction to the theory of minimax), Moscow: Nauka, 1972.
6. Danskin J. M. *The theory of max-min and its application to weapons allocation problems*, Berlin–Heidelberg: Springer, 1967. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46092-0
7. Fedorov V. V. *Chislennye metody maksimina* (Calculation methods of maximin), Moscow: Nauka, 1979.
8. Dudov S. I. A fixed-tolerance problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, vol. 37, no. 8, pp. 906–912. https://zbmath.org/0947.49021
9. Blagodatskikh V. I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie. Lineinaya teoriya* (Introduction to the optimal control. Linear theory). Moscow: Vysshaya Shkola, 2001.

Received 09.02.2023

Accepted 10.04.2023

Mikhail Sergeevich Nikol'skii, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina, 8, Moscow, 117966, Russia.
E-mail: mni@mi-ras.ru

Citation: M. S. Nikol'skii. On one correctness problem for minimax, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 275–280.