ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 281–292.

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров*

ДВУКРАТНАЯ ПОИМКА СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей двух убегающих, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad u_i, v \in V.$$

Предполагается, что убегающие используют одно и то же управление. Преследователи используют контрстратегии на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений V — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начало координат. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий.

DOI: 10.35634/vm230207

Введение

Работы Р. Айзекса [1] заложили основы теории дифференциальных игр преследования–уклонения двух лиц, которые к настоящему времени представляют собой фундаментальную содержательную теорию, в которой предложены различные подходы для анализа конфликтных ситуаций [2–8]. Развитием данной теории стало изучение задачи преследования группой преследователей и задачи уклонения от группы преследователей одного убегающего [9–14]. Естественным обобщением данных задач группового преследования является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна.

В работах [15–18] получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия поимки хотя бы одного убегающего при условии, что участники обладают равными возможностями, а все убегающие используют одно и то же управление.

Задача о многократной поимке одного убегающего рассматривалась, в частности, в работах [19–21], причем в [19] — в дискретной постановке.

В работах [22–24] представлены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия многократной поимки заданного числа убегающих при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Задача об оптимальной по времени поимке группы убегающих группой преследователей на плоскости в случае простого движения рассмотрена в [25]. Мультиагентный подход к исследованию задачи преследования группой преследователей группы убегающих рассмотрен в [26].

Достаточные условия поимки двух убегающих в нелинейных дифференциальных играх получены в [27]. В работах [28, 29] получены достаточные условия поимки двух жестко скоординированых убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх и в линейной задаче группового преследования с простой матрицей.

Задача о преследовании двух скоординированных убегающих, в которой целью группы преследователей являлась поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями или поимка двух убегающих рассматривалась в работах [30].

Задача о многократной поимке заданного числа убегающих при условии, что убегающие используют одно и то же управление, рассматривалась в работах [31, 32] на основе сведения исходной задачи к задаче о многократной поимке одного убегающего в некоторой вспомогательной игре.

В данной работе рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух жестко скоординированных убегающих. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями. Получены достаточные условия поимки. Предложен конструктивный способ построения стратегий преследователей, отличный от способа, изложенного в [31, 32].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n+2)$ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$, x_i, y_j, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $V = \{v \mid \|v\| \leqslant 1\}$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I$, $j = 1, 2$. Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Измеримая функция $v \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$. Предысторией $v_t(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ в момент t назовем сужение функции v на отрезок $[0, t]$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.

Определение 1.2. В игре $\Gamma(n+2)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$, найдутся номера $l, m \in I$ $(m \neq l)$, $j \in \{1, 2\}$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_0]$ такие, что $z_{lj}(\tau_1) = 0$, $z_{mj}(\tau_2) = 0$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Определение 2.1 (см. [33]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Обозначим через $\operatorname{Int} X$ и $\operatorname{co} X$, соответственно, внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 2.1 (см. [33]). *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ таковы, что*

1) для всех $l \in J_0 = \{1, \ldots, m-2\}$ выполнено

$$\operatorname{Intco}\{a_i, i \in J_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co}\{b_1, b_2\} \neq \varnothing;$$

2) $a_{m-1}, a_m \in \{z \mid z = tb_1 + (1-t)b_2,\ t < 0\}$.

Тогда для любого $q \in J = \{1, \ldots, m\}$ справедливо включение

$$b_2 \in \operatorname{Intco}\{a_i, i \in J, i \neq q\}.$$

Доказательство. Пусть $q \in J$. Обозначим

$$Z_q = \operatorname{Intco}\{a_i, i \in J, i \neq q\} \cap \operatorname{co}\{b_1, b_2\}.$$

В силу условия леммы $Z_q \neq \varnothing$. Если $b_2 \in Z_q$, то все доказано.

Пусть $b_2 \notin Z_q$ и $q \in J_0 \cup \{m-1\}$. Возьмем $z \in Z_q$. Тогда

$$z = \alpha b_1 + (1-\alpha) b_2, \quad \alpha \in (0; 1],$$
$$a_m = tb_1 + (1-t)b_2, \quad t < 0.$$

Отсюда

$$\alpha a_m - tz = (\alpha - t) b_2$$

и поэтому

$$b_2 = \frac{\alpha}{\alpha - t} a_m + \frac{(-t)}{\alpha - t} z = \mu a_m + (1-\mu) z, \quad \mu \in (0; 1).$$

Кроме того,

$$z = \sum_{i \in J, i \neq q} \beta_i a_i, \text{ где } \beta_i \geqslant 0, \sum_{i \in J, i \neq q} \beta_i = 1.$$

Значит

$$b_2 = \mu a_m + (1-\mu) \sum_{i \in J, i \neq q} \beta_i a_i.$$

Следовательно, $b_2 \in \operatorname{Intco}\{a_i, i \in J, i \neq q\}$.

Случай $q = m$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. □

Введем следующие обозначения.

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad \Omega(J) = \{(i_1, i_2) \big| i_1, i_2, \in J, i_1 \neq i_2\},$$

где J — конечное множество натуральных чисел.

Лемма 2.2. *Пусть $a_1, \ldots, a_m, c \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для любого $l \in J_0 = \{1, \ldots, m-2\}$ векторы $\{a_i, i \in J_0, i \neq l, c\}$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$. Тогда для любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ существует $\hat{\mu} > 0$ такое, что для всех $\mu > \hat{\mu}$ справедливо неравенство*

$$\delta(\mu) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(w_i, v) > 0,$$

где $J = \{1, \ldots, m\}$, $\Omega^0(J) = \Omega(J_0) \cup \{(m-1, m)\}$,

$$w_i = \begin{cases} a_i, \ i \in J_0, \\ a_{m-1} + \mu c, \ i = m-1, \\ a_m + \mu c, \ i = m. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существуют векторы $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ такие, что для каждого $\hat{\mu} > 0$ найдется $\mu > \hat{\mu}$ для которого $\delta(\mu) = 0$. Из определения $\delta(\mu)$ следует, что существует $v_\mu \in V$ такой, что для всех $\Lambda \in \Omega^0(J)$ выполнено

$$\min_{i \in \Lambda} \lambda(w_i, v_\mu) = 0, \text{ причем } \|v_\mu\| = 1.$$

Из последнего соотношения следует, что существуют $J(\mu) \subset J_0$, $|J(\mu)| = m-3$ и $j(\mu) \in \{m-1, m\}$ такие, что

$$\lambda(w_i, v_\mu) = 0 \text{ для всех } i \in J(\mu) \cup \{j(\mu)\}.$$

Пусть $\hat{\mu} = 1$. Тогда найдутся $\mu_1 > \hat{\mu}$, $v_1 \in V$, $J(\mu_1), j(\mu_1)$, для которых

$$(w_i, v_1) \leqslant 0 \ \text{ для всех } i \in J(\mu_1) \cup \{j(\mu_1)\}, \text{ при этом } \|v_1\| = 1.$$

Для $\hat{\mu} = \mu_1 + 1$ найдутся $\mu_2 > \mu_1 + 1$, $v_2 \in V$, $J(\mu_2)$, $j(\mu_2)$, для которых

$$(w_i, v_2) \leqslant 0 \ \text{ для всех } i \in J(\mu_2) \cup \{j(\mu_2)\}, \text{ при этом } \|v_2\| = 1.$$

Продолжая этот процесс дальше, получим, что существуют последовательности μ_s, $\lim\limits_{s \to +\infty} \mu_s = +\infty$, $v_s \in V$, $J(\mu_s)$, $j(\mu_s)$, для которых

$$(w_i, v_s) \leqslant 0 \ \text{ для всех } i \in J(\mu_s) \cup \{j(\mu_s)\}, \text{ при этом } \|v_s\| = 1.$$

Следовательно, существует подпоследовательность μ_{s_j}, $\lim\limits_{s_j \to +\infty} \mu_{s_j} = +\infty$, для которой найдутся подпоследовательность $\{v_{s_j}\}$, множество $J^0 \subset J_0$, $|J^0| = m-3$, индекс $j_0 \in \{m-1, m\}$ такие, что для всех j справедливы неравенства

$$(w_i, v_{s_j}) \leqslant 0 \text{ для всех } i \in J^0 \cup \{j_0\}, \text{ при этом } \|v_{s_j}\| = 1.$$

Из последовательности $\{v_{s_j}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\overline{v}_q\}$, сходящуюся к $v_0 \in V$, при этом $\|v_0\| = 1$. Имеем

$$(a_i, \overline{v}_q) \leqslant 0 \ \text{ для всех } i \in J^0, \ \left(\frac{a_{j_0}}{\mu_q} + c, \overline{v}_q\right) \leqslant 0.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу при $q \to +\infty$, получим

$$(a_i, v_0) \leqslant 0 \text{ для всех } i \in J^0, \ (c, v_0) \leqslant 0.$$

Поэтому, в силу теоремы 2.1 набор векторов $\{a_i, i \in J^0, c\}$ не образует положительного базиса, что противоречит условию леммы. Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$ *таковы, что*

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v) > 0,$$

где $\Omega^0(J) = \Omega(J_0) \cup \{m-1, m\}$, $J_0 = \{1, \ldots, m-2\}$. *Тогда существует момент* $T_0 > 0$ *такой, что для любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдутся* $\Lambda = (\alpha, \beta) \in \Omega^0(J)$, *момент* $\tau \in [0; T_0]$ *такие, что*

$$\int_0^\tau \lambda(a_\alpha, v(s))\, ds \geqslant 1, \quad \int_0^\tau \lambda(a_\beta, v(s))\, ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Тогда имеем

$$\max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^t \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant \max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \int_0^t \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds. \tag{2.1}$$

Для любых неотрицательных чисел $\gamma_\Lambda (\Lambda \in \Omega^0(J))$ имеет место неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \gamma_\Lambda \geqslant \frac{1}{N} \sum_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \gamma_\lambda, \text{ где } N = (n-2)(n-3)/2 + 1.$$

Поэтому

$$\max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \int_0^t \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant \frac{1}{N} \int_0^t \sum_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{N} \int_0^t \max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds.$$

Из определения δ следует, что неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j v) \geqslant \delta > 0$$

справедливо для всех $v \in V$. Следовательно, из (2.1) получаем

$$\max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^t \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant \frac{\delta t}{N}.$$

Из последнего неравенства следует, что при $T > N/\delta$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega^0(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^t \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant 1,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. □

§ 3. Достаточные условия поимки

Теорема 3.1. *Пусть существует множество* $I_0 \subset I$, $|I_0| = n-2$, *такое, что для каждого* $l \in I_0$

$$\operatorname{Intco}\{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Из условия (3.1) следует [34], что для всех $l \in I_0$ набор векторов $\{x_i^0 - y_1^0, x_i^0 - y_2^0, i \in I_0, i \neq l\}$ образует положительный базис в $\mathbb{R}^k$. Обозначим $c = y_1^0 - y_2^0$. Так как

$$x_i^0 - y_2^0 = x_i^0 - y_1^0 + c,$$

то для всех $l \in I_0$ положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор $\{z_{i1}^0, i \in I_0, i \neq l, c\}$. Считаем, что $I_0 = \{1, \ldots, n-2\}$. Из леммы 2.2 следует, что существует число $\mu > 0$ такое,

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega^0(I)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(w_j^0, v) > 0,$$

где

$$w_i^0 = \begin{cases} z_{i1}^0, & \text{если } i \in I_0, \\ z_{n-12}^0 + \mu c, & \text{если } i = n-1, \\ z_{n2}^0 + \mu c, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Из леммы 2.3 следует, что число

$$T_0 = \min\{T > 0 \big| \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega^0(I)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^T \lambda(w_j^0, v(s))\, ds \geqslant 1\}$$

конечно. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \lambda(w_i^0, v(s))\, ds.$$

Из леммы 2.3 следует, что существуют номера $l, m \in I$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_0]$ такие, что

$$h_l(\tau_1) = 0, \quad h_m(\tau_2) = 0. \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем считать, что если $h_q(\tau) = 0$ при некоторых $q \in I$, $\tau \in [0, T_0)$, то $\lambda(w_q^0, v(s)) = 0$ для всех $s \in [\tau, T_0]$. Тогда из условия (3.2) получаем, что существует $\Lambda = \{\alpha, \beta\} \in \Omega^0(I)$, для которого

$$h_\alpha(T_0) = 0, \quad h_\beta(T_0) = 0. \tag{3.3}$$

Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, на отрезке $[0; T_0]$, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(w_i^0, v(t)) w_i^0.$$

Тогда из системы (1.3) следует, что для всех $t \in [0, T_0]$

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_i(t), \; i \in I_0,$$
$$z_{n-1,2}(t) = z_{n-1,2}^0 - \int_0^t \lambda(w_{n-1}^0, v(s))\, ds w_{n-1}^0 = z_{n-1,2}^0 h_{n-1}(t) - \mu c(1 - h_{n-1}(t)),$$
$$z_{n2}(t) = z_{n2}^0 h_n(t) - \mu c(1 - h_n(t)).$$

Из условия (3.3) и определения управлений преследователей P_i, $i \in I$, вытекает, что возможны следующие варианты.

1. $\Lambda = \{\alpha, \beta\} \in \Omega^0(I)$, для которого выполнены соотношения (3.3), такой что $\Lambda \in \Omega(I_0)$. В этом случае преследователи P_α, P_β осуществляют в момент T_0 поимку убегающего E_1, что означает, что в игре $\Gamma(n+2)$ происходит двукратная поимка.

2. Условие (3.3) выполнено для $\Lambda = \{n-1, n\}$. Тогда

$$z_{n-1,2}(T_0) = -\mu c, \quad z_{n2}(T_0) = -\mu c. \tag{3.4}$$

Докажем, что в данном случае для каждого $l \in I_0$ выполнено включение

$$\mathrm{Intco}\,\{x_i(T_0), i \in I_0, i \neq l\} \cap \mathrm{co}\,\{y_1(T_0), y_2(T_0)\} \neq \varnothing. \tag{3.5}$$

Пусть $l \in I_0$. Имеем

$$z_{i1}(T_0) = z_{i1}^0 h_i(T_0), \quad z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c = z_{i1}^0 h_i(T_0) + z_{i2}^0 - z_{i1}^0.$$

Поэтому

$$z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, \quad z_{i2}^0 = z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}.$$

Из условия теоремы следует, что набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \in I_0, i \neq l\}$ образует положительный базис в $\mathbb{R}^k$. Следовательно, положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образуют векторы

$$\left\{\frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}, i \in I_0, i \neq l\right\}.$$

Из условия $h_i(T_0) \in (0, 1]$ для всех $i \in I_0$, $i \neq l$, получаем, что положительный базис в $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i1}(T_0), z_{i2}(T_0), i \in I_0, i \neq l\}.$$

Из последнего соотношения, в силу [34], получаем справедливость (3.5).

Из равенств (3.4) получаем

$$x_{n-1}(T_0) - y_2(T_0) = -\mu(y_1(T_0) - y_2(T_0)).$$

Отсюда

$$x_{n-1}(T_0) = -\mu y_1(T_0) + (1 + \mu) y_2(T_0).$$

Аналогично, $x_n(T_0) = -\mu y_1(T_0) + (1 + \mu) y_2(T_0)$. Используя лемму 2.1 получаем, что для любого $q \in I$ справедливо включение

$$y_2(T_0) \in \mathrm{Intco}\,\{x_i(T_0), i \in I, i \neq q\}.$$

Принимая момент T_0 за начальный и используя результаты работы [35] получим, что найдутся преследователи P_q, P_r, $q \neq r$, осуществляющие поимку убегающего E_2. Теорема доказана. $\square$

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Том 2. М.: Наука, 1988.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Friedman A. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1971.
5. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975.
6. Нарманов А. Я., Щелчков К. А. Задача уклонения в нелинейной дифференциальной игре с дискретным управлением // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 75–85. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
7. Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 3–12. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-01
8. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit-evasion game in convex polygonal environments // Systems and Control Letters. 2019. Vol. 125. P. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
9. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
10. Черноусько Ф. Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
11. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
12. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
13. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009.
14. Kumkov S. S., Menec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. No. 4. P. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
15. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. Т. 4. С. 3–6.
16. Petrov N. N., Vagin D. A. A problem of group pursuit with phase constraints // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2002. Vol. 66. Issue 2. P. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
17. Мачтакова А. И. Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 45–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04
18. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2012. Vol. 51. P. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
19. Bopardikar S. D., Suri S. k-Capture in multiagent pursuit evasion, or the lion and the gyenas // Theoretical Computer Science. 2014. Vol. 522. P. 13–23. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.12.001
20. Sakharov D. V. Multiple capture in Pontryagin's almost periodic example // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. Vol. 56. No. 4. P. 576–583. https://doi.org/10.1134/S1064230717040141
21. Petrov N. N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives and phase restrictions // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 11. Article 1171. https://doi.org/10.3390/math9111171
22. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
23. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 182. No. 1. P. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7

24. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restriction on timescales // Dynamic Games and Applications. 2022. Vol. 12. No. 2. P. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
25. Makkapati V. R., Tsiotras P. Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit-evasion problems // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 4. P. 1168–1187. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00319-x
26. Qadir M. Z., Piao S., Jiang H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders // Journal of Supercomputing. 2020. Vol. 76. P. 3416–3426. https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3
27. Григоренко Н. Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054. http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v282/i5/p1051
28. Виноградова М. Н. О поимке двух убегающих в одной нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 12–20. https://doi.org/10.20537/vm150102
29. Виноградова М. Н., Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48. http://mi.mathnet.ru/rus/timm/v19/i1/p41
30. Петров Н. Н. Об одной задаче простого преследования двух жестко скоординированных убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 59. С. 55–66. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-59-05
31. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. No. 3. C. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
32. Благодатских А. И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
33. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. http://mi.mathnet.ru/rus/de/v4/i4/p606
34. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2001. Vol. 40. No. 5. P. 749–753. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13370431
35. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218

Поступила в редакцию 10.02.2023

Принята к публикации 20.04.2023

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, профессор, лаборатория математической теории управления, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Цитирование: Н. Н. Петров. Двукратная поимка скоординированных убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 281–292.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 2. Pp. 281–292.

N. N. Petrov

Two-time capture of coordinated evaders in a simple pursuit problem

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader.

MSC2020: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/vm230207

In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit of two evaders by a group of pursuers described by a system of the form

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

is considered. It is assumed that all evaders use the same control. The pursuers use counterstrategies based on information about the initial positions and control history of the evaders. The set of admissible controls V is a unit ball centered at zero, target sets are the origin of coordinates. The goal of the pursuers' group is to capture at least one evader by two pursuers. In terms of initial positions and game parameters a sufficient condition for the capture is obtained. In the study, the method of resolving functions is used as a basic one, which allows obtaining sufficient conditions for the solvability of the approach problem in some guaranteed time.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-01483-23-00, project FEWS-2020-0010.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. Pontryagin L. S. *Selected scientific works. Vol. 2*, Moscow: Nauka, 1988.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Positional differential games*, Moscow: Nauka, 1974.
4. Friedman A. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1971.
5. Hajek O. *Pursuit games*, New York: Academic Press, 1975.
6. Narmanov A. Ya., Shchelchkov K. A. The evasion problem in a nonlinear differential game with discrete control, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 75–85 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
7. Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 3–12. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-01
8. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments, *Systems and Control Letters*, 2019, vol. 125, pp. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
9. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://doi.org/10.1007/BF01070036
10. Chernous'ko F. L. One problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 1, pp. 11–20. https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90105-2
11. Chikrii A. A. Conflict-controlled processes. Boston–London–Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
12. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990 (in Russian).
13. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
14. Kumkov S. S., Menec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, no. 4, pp. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z

15. Satimov N., Mamatov M. S. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between the group of pursuers and evaders, *Doklady Akademii Nauk Uzbekskoi SSR*, 1983, vol. 4, pp. 3–6 (in Russian).
16. Petrov N. N., Vagin D. A. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
17. Machtakova A. I. Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 45–54 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04
18. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
19. Bopardikar S. D., Suri S. k-Capture in multiagent pursuit evasion, or the lion and the gyenas, *Theoretical Computer Science*, 2014, vol. 522, pp. 13–23. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.12.001
20. Sakharov D. V. Multiple capture in Pontryagin's almost periodic example, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56, no. 4, pp. 576–583. https://doi.org/10.1134/S1064230717040141
21. Petrov N. N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives and phase restrictions, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 11, article 1171. https://doi.org/10.3390/math9111171
22. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
23. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 182, no. 1, pp. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
24. Petrov N. N. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of simple pursuit with phase restriction on timescales, *Dynamic Games and Applications*, 2022, vol. 12, no. 2, pp. 632–642. https://doi.org/10.1007/s13235-021-00387-y
25. Makkapati V. R., Tsiotras P. Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit-evasion problems, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 4, pp. 1168–1187. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00319-x
26. Qadir M. Z., Piao S., Jiang H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders, *Journal of Supercomputing*, 2020, vol. 76, pp. 3416–3426. https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3
27. Grigorenko N. L. Pursuit of two evaders by several controlled objects, *Sov. Math., Dokl.*, 1985, vol. 31, pp. 550–553. https://zbmath.org/?q=an:0592.90110
28. Vinogradova M. N. On the capture of two evaders in a non-stationary pursuit-evasion problem with phase restritions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 12–20 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm150102
29. Vinogradova M. N., Petrov N. N., Solov'eva N. A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/timm897
30. Petrov N. N. On one simple pursuit problem of two rigidly coordinated evaders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 59, pp. 55–66 (in Russian). https://doi.org/10.35634/2226-3594-2022-59-05
31. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 594–613. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00300-8
32. Blagodatskikh A. I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 46–57 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160104

33. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de328
34. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13370431
35. Petrov N. N., Solov'eva N. A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218

Received 10.02.2023

Accepted 20.04.2023

Nikolai Nikandrovich Petrov, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Professor, Laboratory of Mathematical Control Theory, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Citation: N. N. Petrov. Two-time capture of coordinated evaders in a simple pursuit problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 281–292.