МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 312–328.

УДК 517.956

© *А. К. Уринов, Д. А. Усмонов*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ И НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

В данной статье для одного уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области, в прямоугольной области сформулирована и исследована нелокальная начально-граничная задача. С помощью применения метода разделения переменных получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Построена функция Грина последней задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, откуда следует существование собственных значений и система собственных функций спектральной задачи. Доказана теорема разложения заданной функции в равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций. С помощью найденного интегрального уравнения и теоремы Мерсера доказана равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Установлен порядок коэффициентов Фурье. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение смешанного типа, спектральная задача, функция Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье, метод разделения переменных.

DOI: 10.35634/vm230209

§ 1. Введение. Постановка задачи

Известно, что проблема разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа исследуется более ста лет. Несмотря на это в настоящее время интерес к этой проблеме не утихает, а интенсивно развивается быстрыми темпами в различных направлениях. Если в начале исследователи рассматривали краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа в областях, ограниченных так называемым «нормальным контуром» и характеристиками рассматриваемого уравнения, и близким к ним областям, то в последнее время возрос интерес к постановке и исследованию краевых задач в прямоугольных областях. К настоящему времени вышли из печати многочисленные работы, которые посвящены изучению этой проблемы для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов. Например, в [1,2] доказана корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольных областях, обладающих специальными свойствами. Эта задача в прямоугольной области для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с младшими членами изучена в [3] и найдены условия разрешимости задачи. В [4–8] в прямоугольной области исследована задача Дирихле, а в [9] — задача Келдыша для эллиптико–гиперболических уравнений второго порядка с вырождением на линии изменения типа. Задачи типа Дирихле в прямоугольнике для невырождающихся уравнений смешанного типа высокого четного порядка изучены в [10, 11]. В [12] рассмотрена задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде, а в [13] — некорректная задача в параллелепипеде для системы уравнений смешанного типа. Краевые задачи в прямоугольных областях для уравнений параболо-гиперболического типа исследованы в [14–16]. Для уравнений смешанного типа, содержащих операторы дробного дифференцирования, краевые задачи в четырехугольнике сформулированы и исследованы в [17–26]. В частности, в [17, 18] рассмотрены нелокальные задачи для уравнений четвертого порядка с оператором Хилфера, а в [19] — для уравнения четвертого порядка с инволюцией, содержащего оператор Капуто и имеющего вырождение внутри прямоугольника. В [20–24] исследованы обратные задачи для уравнений смешанного типа второго порядка, а в [25] — прямая задача для уравнения высокого четного порядка с операторами Хилфера и Капуто. В [26] исследована однозначная разрешимость одной нелокальной задачи для уравнения высокого четного порядка с дробной производной Капуто, вырождающегося на одной из боковых сторон четырехугольника. В данной работе исследуем одну нелокальную задачу для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Капуто, вырождающегося внутри и на обеих боковых сторонах четырехугольника.

Рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка

$$0=\begin{cases} t^{\gamma}{}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u(x,t)+\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}, & (x,t)\in\Omega_1=\Omega\cap\{t>0\},\\ {}_{C}D_{t0}^{\delta_2}u(x,t)+\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}, & (x,t)\in\Omega_2=\Omega\cap\{t<0\},\end{cases} \tag{1.1}$$

в прямоугольнике $\Omega=\{(x,t)\mid 0<x<1;\ -a<t<b\}$, где $u(x,t)$ — неизвестная функция,

$$ {}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\delta_1)}\int_0^t\frac{(\partial/\partial z)u(x,z)}{(t-z)^{\delta_1}}\,dz,$$
$$ {}_{C}D_{t0}^{\delta_2}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\delta_2)}\int_t^0\frac{(\partial^2/\partial z^2)u(x,z)}{(z-t)^{\delta_2-1}}\,dz$$

— производные дробного порядка в смысле Капуто [27] от функции $u(x,t)$ по аргументу t, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [28], а a, b, α, β, γ, δ_1, δ_2 — заданные действительные числа, причем $a>0$, $b>0$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\delta_1<1$, $1<\delta_2<2$.

Очевидно, что уравнение (1.1) вдоль линий $x=0$, $x=1$ и $t=0$ вырождается.

Исследуем следующую краевую задачу для уравнения (1.1) в области Ω.

Задача $S_{p_1\,q_1}^{p_2\,q_2}$. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

(1) $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_x\in C(\bar{\Omega})$; $t^{\gamma}{}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u(x,t)\in C(\Omega_1)$, ${}_{C}D_{t0}^{\delta_2}u(x,t)\in C(\Omega_2)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2)$;

(2) в области $\Omega_1\cup\Omega_2$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1);

(3) на границе области Ω выполняются следующие краевые условия:

$$p_1u(0,t)=q_1u_x(0,t),\quad t\in[-a,b]; \tag{1.2}$$
$$p_2u(1,t)=q_2u_x(1,t),\quad t\in[-a,b]; \tag{1.3}$$
$$p_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]\Big|_{x=0}=q_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_x\Big|_{x=0},\quad t\in[-a,b]; \tag{1.4}$$
$$p_2\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]\Big|_{x=1}=q_2\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_x\Big|_{x=1},\quad t\in[-a,b]; \tag{1.5}$$
$$u(x,b)+\varphi(x)=u(x,-a),\quad x\in[0,1]; \tag{1.6}$$

(4) выполняются следующие условия склеивания:

$$u(x,+0)=u(x,-0),\quad x\in[0,1],\qquad \lim_{t\to+0}t^{\gamma}{}_{C}D_{0t}^{\delta_1}u(x,t)=u_t(x,-0),\quad x\in(0,1), \tag{1.7}$$

где $\varphi(x)$ — заданная непрерывная функция, p_1, q_1, p_2 и q_2 — заданные действительные числа, причем $p_1^2+q_1^2\neq 0$, $p_2^2+q_2^2\neq 0$.

Отметим, что (1.2), (1.3) при $q_1 = q_2 = 0$, $p_1 = p_2 = 0$ и $p_1 p_2 q_1 q_2 \neq 0$ являются соответственно первым, вторым и третьим краевыми условиями, заданными на боковых сторонах $x = 0$ и $x = 1$ прямоугольника Ω. Из структуры условий (1.4) и (1.5) следует, что они являются условиями типа (1.2) и (1.3) относительно неизвестной функции $x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x,t)$. Очевидно, что (1.6) является нелокальным условием, связывающим значения искомой функции, принимаемые в точках нижнего и верхнего оснований прямоугольника Ω.

§ 2. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к поставленной задаче возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]'' = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} v(x),\ v'(x),\ x^\alpha (1-x)^\beta v''(x),\ \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]' \in C[0,1]; \\ p_1 v(0) = q_1 v'(0),\ p_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]\big|_{x=0} = q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]'\Big|_{x=0}, \\ p_2 v(1) = q_2 v'(1),\ p_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]\big|_{x=1} = q_2 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x)\right]'\Big|_{x=1}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Если $\Delta_0 = p_1(q_2 - p_2) - q_1 p_2 \neq 0$, то задача (2.1), (2.2) имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, $\lambda_k \to +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x), \ldots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим обе части уравнения (2.1) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям дважды к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (2.2), имеем

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left[v''(x)\right]^2 dx = \lambda \int_0^1 v^2(x)\, dx.$$

Отсюда, при $v(x) \not\equiv 0$, следует $\lambda \geqslant 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует $v''(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда $v(x) = C_0 x + C_1$, $x \in (0,1)$, откуда, в силу условия $p_1 v(0) = q_1 v'(0)$, $p_2 v(1) = q_2 v'(1)$, $\Delta_0 \neq 0$, получим $v(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, задача (2.1), (2.2) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Существование собственных значений задачи (2.1), (2.2) докажем методом функций Грина. Здесь функция Грина $G(x,s)$ должна обладать следующими свойствами:

(1) $G(x,s)$, $G_x(x,s)$, $x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x,s)$ непрерывны для всех $x, s \in [0,1]$;

(2) в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$ существует непрерывная производная

$$\left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x,$$

а при $x = s$ имеет скачок 1, т. е.

$$\left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x\big|_{x=s+0} - \left[x^\alpha (1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x\big|_{x=s-0} = 1;$$

(3) в интервалах $(0,s)$ и $(s,1)$ функция $G(x,s)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению $MG(x,s)=0$;

(4) выполняются граничные условия

$$\begin{gathered}p_1G(0,s)=q_1G_x(0,s),\\ p_1\left[x^\alpha(1-x)^\beta G(x,s)\right]\Big|_{x=0}=q_1\left[x^\alpha(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=0},\quad s\in(0,1);\\ p_2G(1,s)=q_2G_x(1,s),\\ p_2\left[x^\alpha(1-x)^\beta G(x,s)\right]\Big|_{x=1}=q_2\left[x^\alpha(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=1},\quad s\in(0,1).\end{gathered}$$

Пользуясь представлениями общего решения уравнения $MG(x,s)=0$ в промежутках $(0,s)$ и $(s,1)$, нетрудно убедиться, что функция $G(x,s)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta_0}\Big[q_1p_2\int_0^s\frac{z(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}-p_1(p_2-q_2)\int_0^x\frac{z(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}+\\ \quad+q_1p_2s\int_0^x\frac{(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}-p_1(p_2-q_2)x\int_0^s\frac{(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}\Big]+g(x,s),\quad x<s;\\ \frac{1}{\Delta_0}\Big[q_1p_2\int_0^x\frac{z(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}-p_1(p_2-q_2)\int_0^s\frac{z(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}+\\ \quad+q_1p_2x\int_0^s\frac{(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}-p_1(p_2-q_2)s\int_0^x\frac{(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}\Big]+g(x,s),\quad s<x,\end{cases}\tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered}g(x,s)=\frac{p_1p_2}{\Delta_0}\left[s\int_0^x\frac{z(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}+x\int_0^s\frac{z(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}\right]-\\ -\frac{q_1(p_2-q_2)}{\Delta_0}\left[\int_0^x\frac{(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}+\int_0^s\frac{(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}\right]+g_1(x,s),\\ g_1(x,s)=\Delta_0^{-2}\left[p_1^2xs+p_1q_1(x+s)+q_1^2\right]\left[p_2q_2k_3-(p_2-q_2)q_2k_4-p_2^2k_1+p_2(p_2-q_2)k_2\right],\\ k_1=B(2-\alpha,2-\beta),\quad k_2=B(1-\alpha,2-\beta),\\ k_3=B(2-\alpha,1-\beta),\quad k_4=B(1-\alpha,1-\beta),\end{gathered}$$

$B(x,y)$ — бета-функция Эйлера [28].

Очевидно, что $G(x,s)=G(s,x)$. Методом, примененным в [29], легко убедиться, что задача (2.1), (2.2) эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром $G(x,s)$:

$$v(x)=\lambda\int_0^1G(x,s)v(s)\,ds.\tag{2.4}$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично и положительно (т. е. $\lambda>0$), то в силу эквивалентности уравнения (2.4) и задачи (2.1), (2.2), согласно теории интегральных уравнений [30], справедливо утверждение леммы 1. □

Лемма 2. *Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям:*

$$h(x),\ h'(x)\in C[0,1],\tag{2.5}$$

$$x^\alpha(1-x)^\beta h''(x),\ \left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\in C[0,1],\tag{2.6}$$

$$p_1h(0)=q_1h'(0),\quad p_2h(1)=q_2h'(1),\tag{2.7}$$

$$\begin{cases}p_1\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]\Big|_{x=0}=q_1\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\Big|_{x=0},\\ p_2\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]\Big|_{x=1}=q_2\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\Big|_{x=1},\end{cases}\tag{2.8}$$

$$Mh(x)\in L_2(0,1).$$

Тогда ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ *в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций* $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (2.1), (2.2).

Доказательство. В силу свойства функций $G(x,s)$ и $h(x)$ справедливы равенства

$$\int_0^1 G(x,s)Mh(s)\,ds = \int_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)\right]''ds = \left[s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)\right]' G(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1} -$$
$$- s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)G_s(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1} + s^\alpha(1-s)^\beta h'(s)G_{ss}(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1} -$$
$$- h(s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta G_{ss}(x,s)\right]_s\Big|_{s=0}^{s=x-0} - h(s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta G_{ss}(x,s)\right]_s\Big|_{s=x+0}^{s=1} +$$
$$+ \int_0^1 h(s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta G_{ss}(x,s)\right]_{ss}ds = h(x).$$

Следовательно,

$$h(x) = \int_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)\right]''ds,$$

т. е. $h(x)$ есть функция, представимая через ядро $G(x,s)$.

Кроме этого, в силу непрерывности функции $G(x,s)$ в $\{(x,s)\mid 0\leqslant x,s\leqslant 1\}$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 G^2(x,s)\,ds = A(x) \leqslant C_2 = \mathrm{const} < +\infty.$$

Тогда, согласно теореме Гильберта–Шмидта [30], справедливо утверждение леммы 2. □

§ 3. Вспомогательные леммы

В этом пункте предполагается, что $\Delta_0 \neq 0$ и под λ_k и $v_k(x)$, $k\in N$, понимаются собственные значения и собственные функции задачи (2.1), (2.2), а под h_k — коэффициент Фурье заданной функции $h(x)$ по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, т. е. $h_k = \int_0^1 h(x)v_k(x)\,dx$, $k\in N$.

Лемма 3 (О сходимости билинейных рядов). *Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте* $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[v_k^{(\mu)}(x)\right]^2/\lambda_k, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[x^\alpha(1-x)^\beta v_k''(x)\right]^{(\mu)}\right\}^2/\lambda_k^2, \qquad \mu=\overline{0,1}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как ядро $G(x,s)$ интегрального уравнения (2.4) симметрично, положительно (т. е. $\lambda>0$) и непрерывно в $\{(x,s)\mid 0\leqslant x,s\leqslant 1\}$, то на основании теоремы Мерсера [30] это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G(x,s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)v_k(s)}{\lambda_k}$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что $G(x,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant C_3 = \mathrm{const} < +\infty$, т. е. первый ряд в (3.1) равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

В силу (2.4) и (2.1), имеют место равенства

$$v_k'(x) = \lambda_k\int_0^1 G_x(x,s)v_k(s)\,ds = \int_0^1 G_x(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta v_k''(s)\right]''ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям два раза, а затем принимая во внимание условия $p_1 v_k(0) = q_1 v_k'(0)$, $p_2 v_k(1) = q_2 v_k'(1)$ и $p_1 G_x(x,0) = q_1 G_{xs}(x,0)$, $p_2 G_x(x,1) = q_2 G_{xs}(x,1)$, получим

$$v_k'(x) = \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta G_{xss}(x,s) v_k''(s)\, ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{v_k'(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2} G_{xss}(x,s) \left\{ \frac{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2} v_k''(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right\} ds. \tag{3.2}$$

Далее, с помощью правила интегрирования по частям и равенств (2.1), (2.2), находим

$$\begin{gathered} \int_0^1 \frac{s^\alpha (1-s)^\beta v_k''(s) v_l''(s)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}}\, ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \Big[s^\alpha (1-s)^\beta v_k''(s) v_l'(s) \Big|_0^1 - \\ - \left[s^\alpha (1-s)^\beta v_k''(s) \right]' v_l(s) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\left[s^\alpha (1-s)^\beta v_k''(s) \right]'' v_l(s)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}}\, ds = \\ = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \int_0^1 v_k(s) v_l(s)\, ds = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Следовательно, $\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2} v_k''(s)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система.

Из (3.2), в силу (3.3), следует, что $v_k'(x)/\sqrt{\lambda_k}$ есть коэффициент Фурье функции $s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2} G_{xss}(x,s)$ по системе $\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2} v_k''(s)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [30], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k'(x)]^2}{\lambda_k} \leqslant \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta \left[G_{xss}(x,s) \right]^2 ds. \tag{3.4}$$

Пользуясь формулой (2.3), нетрудно убедиться, что интеграл в (3.4) равномерно ограничен. Поэтому ряд в (3.4), т. е. второй ряд в (3.1) сходится равномерно.

Аналогично доказывается сходимость остальных рядов. Лемма 3 доказана. □

Ниже докажем ряд лемм о порядке коэффициентов Фурье.

Лемма 4. *Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (2.5), (2.7),*

$$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} h''(x) \in L_2(0,1),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k h_k^2 \leqslant \int_0^1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x) \right]^2 dx, \tag{3.5}$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. Из формулы для коэффициента h_k, в силу уравнения (2.1), следует равенство

$$\lambda_k^{1/2} h_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 h(x) v_k(x)\, dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 h(x) \left[x^\alpha (1-x)^\beta v_k''(x) \right]'' dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям два раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} h_k = \int_0^1 \left[x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} h''(x)\right]\left[\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} v_k''(x)\right] dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} h_k$ есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} h''(x)$ по ортонормированной системе функций $\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} v_k''(x)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [30], справедливо неравенство (3.5). Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 h_k^2 \leqslant \int_0^1 [Mh(x)]^2\, dx, \tag{3.6}$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. Из формулы для коэффициента h_k, в силу уравнений (2.1) и (2.4), справедливо равенство

$$\lambda_k h_k = \lambda_k \int_0^1 h(x) v_k(x)\, dx = \int_0^1 h(x) M v_k(x)\, dx = \int_0^1 h(x)\left[x^\alpha (1-x)^\beta v_k''(x)\right]''\, dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k h_k = \int_0^1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x)\right]'' v_k(x)\, dx = \lambda_k h_k = \int_0^1 [Mh(x)]\, v_k(x)\, dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k h_k$ есть коэффициент Фурье функции $Mh(x)$ по ортонормированной системе функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (3.6). Лемма 5 доказана. □

Аналогично леммам 4 и 5, доказываются следующие леммы.

Лемма 6. *Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (2.5)–(2.8), а функция $Mh(x)$ удовлетворяет условиям (2.5), (2.7) и $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\,[Mh(x)]'' \in L_2(0,1)$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \leqslant \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left\{[Mh(x)]''\right\}^2 dx,$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Лемма 7. *Если функции $h(x)$, $Mh(x)$ удовлетворяют условиям (2.5)–(2.8), а функция $M^2h(x)$ удовлетворяет условиям (2.5), (2.7) и $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\,[M^2h(x)]'' \in L_2(0,1)$, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^5 h_k^2 \leqslant \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left\{\left[M^2 h(x)\right]''\right\}^2 dx,$$

в частности, ряд в левой части сходится, где $M^2h(x) = M\,[Mh(x)]$.

§ 4. Существование, единственность и устойчивость решения задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$

Решение задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ формально ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x), \tag{4.1}$$

где $v_k(x)$, $k\in N$, — собственные функции задачи (2.1), (2.2), а $u_k(t)$, $k\in N$, — неизвестные функции, которые подлежат определению.

Подставив (4.1) в (1.1), (1.6) и (1.7), относительно $u_k(t)$, $k\in N$, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} t^{\gamma}\,{}_CD_{0t}^{\delta_1}u_k(t)=-\lambda_k u_k(t), & t>0,\\ {}_CD_{t0}^{\delta_2}u_k(t)=-\lambda_k u_k(t), & t<0; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} u_k(b)+\varphi_k=u_k(-a),\\ u_k(+0)=u_k(-0),\\ \lim\limits_{t\to+0}t^{\gamma}\,{}_CD_{0t}^{\delta_1}u_k(t)=u_k'(-0), \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)v_k(x)\,dx$.

Если $0\leqslant\gamma<\delta_1$, то в силу $0<\delta_1<1$, $1<\delta_2<2$ общее решение уравнения (4.2) определяется в виде [27]

$$u_k(t)=\begin{cases} A_kE_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma}\right], & t>0,\\ B_kE_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right]-tY_kE_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right], & t<0, \end{cases} \tag{4.4}$$

где A_k, B_k, Y_k — произвольные постоянные, а $E_{\xi,\eta}(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\xi n+\eta)}$ — функция Миттаг–Леффлера, а $E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma}\right]$ — функция Килбаса–Сайго, $E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,\gamma/\delta_1}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, $c_0=1$, $c_n=\prod\limits_{j=0}^{n-1}\Gamma(\delta_1j-\gamma j-\gamma+1)/\Gamma(\delta_1j-\gamma j+\delta_1-\gamma+1)$.

Далее, удовлетворяя функцию (4.4) условиям (4.3), для нахождения постоянных A_k, B_k, Y_k получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_k-B_k=0,\\ \lambda_kA_k-Y_k=0,\\ B_kE_{\delta_2,1}\left[-\lambda_ka^{\delta_2}\right]+aY_kE_{\delta_2,2}\left[-\lambda_ka^{\delta_2}\right]-A_kE_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_kb^{\delta_1-\gamma}\right]=\varphi_k. \end{cases} \tag{4.5}$$

Данная система имеет единственное решение

$$A_k=\frac{\varphi_k}{\Delta(k)},\quad B_k=\frac{\varphi_k}{\Delta(k)},\quad Y_k=\frac{\lambda_k\varphi_k}{\Delta(k)}$$

при условии, что для всех $k=1,2,3,\dots$ имеет место неравенство

$$\Delta(k)=E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_ka^{\delta_2}\right]+a\lambda_kE_{\delta_2,2}\left[-\lambda_ka^{\delta_2}\right]-E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_kb^{\delta_1-\gamma}\right]\neq0. \tag{4.6}$$

Подставляя найденные A_k, B_k и Y_k в (4.4), определяем $u_k(t)$ в следующем виде:

$$u_k(t)=\begin{cases} \frac{\varphi_k}{\Delta(k)}E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,-\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_kt^{\delta_1-\gamma}\right], & t>0,\\ \frac{\varphi_k}{\Delta(k)}E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right]+\frac{\lambda_k\varphi_k}{\Delta(k)}(-t)E_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right], & t<0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.1), находим формальное решение задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$:

$$u(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi_k}{\Delta(k)}E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,-\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k t^{\delta_1-\gamma}\right]v_k(x), & (x,t)\in\Omega_1,\\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi_k}{\Delta(k)}\left\{E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right]-t\lambda_k E_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k(-t)^{\delta_2}\right]\right\}v_k(x), & (x,t)\in\Omega_2.\end{cases} \tag{4.8}$$

Используя асимптотические разложения функции $E_{\xi,\eta}(z)$ и $E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,-\gamma/\delta_1}(z)$ при $\lambda_k\to+\infty$ [31], имеем

$$E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k a^{\delta_2}\right]=\frac{1}{\lambda_k a^{\delta_2}\Gamma(1-\delta_2)}+O\left(\lambda_k^{-2}\right),$$
$$E_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k a^{\delta_2}\right]=\frac{1}{\lambda_k a^{\delta_2}\Gamma(2-\delta_2)}+O\left(\lambda_k^{-2}\right),$$
$$E_{\delta_1,1-\gamma/\delta_1,-\gamma/\delta_1}\left[-\lambda_k b^{\delta_1-\gamma}\right]=\frac{1}{\lambda_k b^{\delta_1-\gamma}\Gamma(1-\delta_1)}+O\left(\lambda_k^{-2}\right).$$

Учитывая это, из равенства (4.6) получим

$$\lim_{k\to+\infty}\Delta(k)=\frac{1}{a^{\delta_2-1}\Gamma(2-\delta_2)}.$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого натурального k_0, справедливо неравенство $|\Delta(k)|>0$.

Теорема 1. *Если $\Delta_0\neq 0$, $0\leqslant\gamma<\delta_1$ и $\Delta(k)\neq 0$ для всех $k=1,2,3,\ldots$, а функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 7, то сумма ряда (4.8) определяет единственное решение задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства существования решения достаточно доказать, что ряд (4.8) и ряды, соответствующие функциям

$$u_x(x,t),\quad x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t),\quad \left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x,$$

сходятся равномерно в $\bar\Omega$, а ряды $t^\gamma_C D_{0t}^{\delta_1}u(x,t)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$ сходятся равномерно на любом компакте $D_1\subset\Omega_1$ и ряды ${}_C D_{0t}^{\delta_2}u(x,t)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$ сходятся равномерно на любом компакте $D_2\subset\Omega_2$.

Сначала рассмотрим ряд (4.8). Так как

$$|u_k(t)|\leqslant\begin{cases}C_4|\varphi_k|, & t>0,\\ C_5(|\varphi_k|+\lambda_k|\varphi_k|), & t<0,\end{cases} \tag{4.9}$$

где C_4 и C_5 — некоторые положительные числа, то справедливы неравенства

$$|u(x,t)|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)|\,|v_k(x)|\leqslant\begin{cases}C_4\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k|\,|v_k(x)|, & t<0,\\ C_5\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(|\varphi_k|+\lambda_k|\varphi_k|)|v_k(x)|, & t<0.\end{cases} \tag{4.10}$$

На основании неравенства Коши–Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k|\,|v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k|\varphi_k|\,|v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\lambda_k^{3/2}\varphi_k\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3\varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Первые ряды, стоящие в правой части, сходятся в силу лемм 4 и 3, а вторые ряды сходятся равномерно по x на $[0,1]$, в силу лемм 6 и 3. Следовательно, ряды, стоящие в левой части, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Отсюда и из (4.10) следует, что ряд (4.8) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим ряд, соответствующий функции $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$. В силу (4.9), из (4.8) следует неравенство

$$\left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}\right]_{xx}\right| \leqslant \begin{cases} C_4 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| \left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta v_k''(x)\right]''\right|, & t>0,\\ C_5 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_k| + \lambda_k|\varphi_k|) \left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta v_k''(x)\right]''\right|, & t<0. \end{cases}$$

Отсюда, на основании уравнения (2.1), на любом компакте $D_j \subset \Omega_j$, $j=\overline{1,2}$, имеем

$$\left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}\right]_{xx}\right| \leqslant \begin{cases} C_5 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k|\varphi_k|\,|v_k(x)|, & t>0,\\ C_6 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k|\varphi_k| + \lambda_k^2|\varphi_k|)\,|v_k(x)|, & t<0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^2\varphi_k v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^{5/2}\varphi_k| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^5\varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Здесь первый ряд, стоящий в правой части, сходится в силу леммы 7, а второй ряд сходится равномерно по x на $[0,1]$ в силу леммы 3. Тогда равномерно по x на $[0,1]$ сходится ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (4.11) сходится абсолютно и равномерно на компакте D_j, $j=\overline{1,2}$. Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Пусть $\Delta(k) \neq 0$ для всех $k \in N$, функция $u(x,t)$ есть решение задачи $S_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ с однородными условиями (1.2)–(1.5) и $u(x,b)=u(x,-a)$, $x\in[0,1]$. Рассмотрим его коэффициенты Фурье по системе собственных функций задачи (2.1), (2.2):

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)v_k(x)\,dx.$$

Тогда, в силу формулы (4.4) и $\varphi_k=0$, $k=1,2,3,\ldots$, имеем $u_k(t)=0$, $k\in N$.

Согласно свойствам функции Грина и теореме Мерсера, имеют место следующие равенства:

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta u_{ss}(s,t)\right]_{ss} ds =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(s)}{\lambda_k}\left[s^\alpha(1-s)^\beta u_{ss}(s,t)\right]_{ss} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\lambda_k}\int_0^1 v_k(s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta u_{ss}(s,t)\right]_{ss} ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $u(s,t)$, $v_k(x)$ и уравнение (2.1), получим

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)}{\lambda_k} \int_0^1 u(s,t) \left[s^\alpha (1-s)^\beta v_k''(s)\right]'' \, ds =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \int_0^1 u(s,t) v_k(s) \, ds = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(x) = 0,$$

поскольку $u_k(t) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$. Отсюда следует единственность решения задачи $S_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$. Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Если $\Delta(k) = 0$ при некоторых значениях $k = k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, то из (4.5) следует, что для разрешимости задачи $S_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ должны выполняться следующие условия ортогональности:

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) \, dx = 0, \quad k = k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n.$$

В этом случае решение задачи $S_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1 - 1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} + \ldots + \sum_{k=k_n+1}^{+\infty} \right) u_k(t) v_k(x) + \sum_n \widetilde{C}_n u_n(x,t),$$

где в последней сумме n принимает значения $k = k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, а $\widetilde{C}_n$ — произвольные постоянные,

$$u_n(x,t) = \begin{cases} E_{\delta_1, 1-\gamma/\delta_1, -\gamma/\delta_1} \left[-\lambda_k t^{\delta_1 - \gamma}\right] v_k(x), & t > 0, \\ \left(E_{\delta_2,1}\left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2}\right] - \lambda_k t E_{\delta_2,2}\left[-\lambda_k (-t)^{\delta_2}\right]\right) v_k(x), & t < 0, \end{cases} \quad k = k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n.$$

Пусть

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} = \sup_{[0,1]} |f(x)|, \qquad \|V(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{\overline{\Omega}} |V(x,t)|,$$
$$\|f(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 r(x) \left[f(x)\right]^2 \, dx\right]^{1/2}, \quad r(x) = x^\alpha (1-x)^\beta.$$

Очевидно, что справедливо неравенство

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant \|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega_1})} + \|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega_2})}. \tag{4.12}$$

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи $S_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ справедлива следующая оценка:*

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_0 \left\{ \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\left[M\varphi(x)\right]''\|_{L_{2,r}(0,1)} \right\}, \quad C_0 = \text{const} > 0. \tag{4.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.9), (3.5), (4.8) и неравенства Коши–Буняковского, справедливы следующие неравенства:

$$|u(x,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)|\,|v_k(x)| \leqslant$$

$$le \begin{cases} C_4 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k|\,|v_k(x)|, & t \geqslant 0, \\ C_5 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_k| + \lambda_k |\varphi_k|) |v_k(x)|, & t \leqslant 0, \end{cases} = \begin{cases} C_4 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|, & t \geqslant 0, \\ C_5 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\lambda_k}|\varphi_k| + \lambda_k^{3/2}|\varphi_k|\right) \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|, & t \leqslant 0, \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_4 \left[\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}, & t \geqslant 0, \\ C_5 \left[\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} + C_5 \left[\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}, & t \leqslant 0, \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_4 \left[G(x,x) \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left[\varphi''(x)\right]^2 dx\right]^{1/2}, & t \geqslant 0, \\ C_5 \sqrt{G(x,x)} \sum\limits_{j=0}^{1} \left[\int_0^1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta \left\{M^j \varphi(x)\right\}''\right]^2 dx\right]^{1/2}, & t \leqslant 0, \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_6 \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}, & t \geqslant 0, \\ C_7 \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_7 \left\|[M\varphi(x)]''\right\|_{L_{2,r}(0,1)}, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

где C_6 и C_7 — некоторые положительные числа, т. е.

$$|u(x,t)| \leqslant \begin{cases} C_6 \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}, & t \geqslant 0, \\ C_7 \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_7 \|\,[M\varphi(x)]''\,\|_{L_{2,r}(0,1)}, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Если учесть неравенство (4.12) и положить $C_0 = \sup\{C_6, C_7\}$, то из последнего сразу следует неравенство (4.13). Теорема 2 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахания Н. Н. Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа // Тр. АН Груз. ССР. 1963. Т. 3. С. 69–80.
2. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1963. Vol. 61. Issue 1. P. 371–377. https://doi.org/10.1007/BF02410656
3. Хачев М. М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 137–143. https://www.mathnet.ru/rus/de2658
4. Сохадзе Р. И. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 1. С. 150–156. https://www.mathnet.ru/rus/de4178
5. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Известия высших учебных заведений. Математика. 2007. № 4. С. 45–53. https://www.mathnet.ru/rus/ivm1382
6. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 565–568. https://doi.org/10.1134/S0374064118040131
7. Хайруллин Р. С. Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 8. С. 1139–1151. https://doi.org/10.1134/S0374064119080119

8. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Математические заметки. 2015. Т. 98. Вып. 3. С. 393–406. https://doi.org/10.4213/mzm9135
9. Сафина Р. М. Задача Келдыша для уравнения смешанного типа второго рода с оператором Бесселя // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1354–1366. https://doi.org/10.1134/S0374064115100106
10. Иргашев Б. Ю. Об условиях разрешимости краевых задач для уравнения высокого порядка с разрывными коэффициентами // Математические заметки. 2022. Т. 111. Вып. 2. С. 219–232. https://doi.org/10.4213/mzm13164
11. Irgashev B. Yu. On a boundary value problem for a high order mixed type equation // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 899–912. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.066
12. Каримов К. Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 31–48. https://doi.org/10.35634/vm200103
13. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К. Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 647–660. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.043
14. Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного парабoло-гиперболического уравнения // Математические заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415–435. https://doi.org/10.4213/mzm11521
15. Сидоров С. Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного парабoло-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 12. С. 55–65. https://www.mathnet.ru/rus/ivm9062
16. Сидоров С. Н. Обратные задачи для уравнения смешанного парабoло-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 144–157. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.007
17. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator // Ural Mathematical Journal. 2020. Vol. 6. Issue 1. P. 153–167. https://doi.org/10.15826/umj.2020.1.013
18. Kadirkulov B. J., Jalilov M. A. On a nonlocal problem for a fourth-order mixed-type equation with the Hilfer operator // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. 2021. Vol. 104. Issue 4. P. 89–102. https://doi.org/10.31489/2021m4/89-102
19. Jalilov M. A. On a problem for a nonlocal mixed type equation of fractional order with degeneration // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. Issue 15. P. 3652–3660. https://doi.org/10.1134/S1995080222030118
20. Feng Pengbin, Karimov E. T. Inverse source problems for time-fractional mixed parabolic-hyperbolic-type equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2015. Vol. 23. Issue 4. P. 339–353. https://doi.org/10.1515/jiip-2014-0022
21. Karimov E., Al-Salti N., Kerbal S. An inverse source non-local problem for a mixed type equation with a Caputo fractional differential operator // East Asian Journal of Applied Mathematics. 2017. Vol. 7. Issue 2. P. 417–438. https://doi.org/10.4208/eajam.051216.280217a
22. Yuldashev T. K., Karimov E. T. Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters // Axioms. 2020. Vol. 9. Issue 4. 121. https://doi.org/10.3390/axioms9040121
23. Karimov E., Ruzhansky M., Toshtemirov B. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022. Vol. 46. Issue 1. P. 54–70. https://doi.org/10.1002/mma.8491

24. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral redefinition conditions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. Issue 3. P. 649–662. https://doi.org/10.1134/S1995080221030227
25. Иргашев Б. Ю. Об одной задаче с условиями сопряжения для уравнения четного порядка с дробной производной в смысле Капуто // Математические заметки. 2022. Т. 112. Вып. 2. С. 218–226. https://doi.org/10.4213/mzm13184
26. Иргашев Б. Ю. Краевая задача с условиями сопряжения для вырождающегося уравнения с дробной производной Капуто // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. № 4. С. 27–36. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-4-27-36
27. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
29. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
30. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.
31. Boudabsa L., Simon T. Some properties of the Kilbas–Saigo function // Mathematics. 2021. Vol. 9. Issue 3. 217. https://doi.org/10.3390/math9030217

Поступила в редакцию 29.12.2022

Принята к публикации 22.03.2023

Уринов Ахмаджон Кушакович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, Узбекистан, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19;
ведущий научный сотрудник, Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 46.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
E-mail: urinovak@mail.ru

Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли, исследователь, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, Узбекистан, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3574-075X
E-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

Цитирование: А. К. Уринов, Д. А. Усмонов. Об одной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, вырождающегося внутри и на границе области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 312–328.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'YUTERNYE NAUKI

MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 2. Pp. 312–328.

A. K. Urinov, D. A. Usmonov

On one problem for a fourth-order mixed-type equation that degenerates inside and on the boundary of a domain

Keywords: degenerate mixed-type equations, spectral problem, Green's function, integral equation, Fourier series, method of separation of variables.

MSC2020: 35G15

DOI: 10.35634/vm230209

In the article, a nonlocal boundary value problem has been investigated for a fourth-order mixed-type equation degenerating inside and on the boundary of a domain. Applying the method of separation of variables to the problem under study, the spectral problem for an ordinary differential equation is obtained. The Green function of the last problem is constructed, with the help of which it is equivalently reduced to the Fredholm integral equation of the second kind with a symmetric kernel, which implies the existence of eigenvalues and the system of eigenfunctions for the spectral problem. The theorem of expansion of a given function into a uniformly convergent series with respect to the system of eigenfunctions is proved. Using the found integral equation and Mercer's theorem, a uniform convergence of some bilinear series depending on the found eigenfunctions is proved. The order of the Fourier coefficients is established. The solution of the problem under study is written as the sum of the Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. An estimate for the problem's solution is obtained, from which its continuous dependence on the given functions follows.

REFERENCES

1. Vakhaniya N. N. A special problem for an equation of mixed type, *Trudy Akademii Nauk Gruzinskoi SSR*, 1963, vol. 3. pp. 69–80 (in Russian). https://zbmath.org/03261145
2. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1963, vol. 61, issue 1, pp. 371–377. https://doi.org/10.1007/BF02410656
3. Khachev M. M. The Dirichlet problem for a certain equation of mixed type, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 137–143 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de2658
4. Sokhadze R. I. The first boundary value problem for an equation of mixed type with weighted glueing conditions along a line of parabolic degeneration, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 150–156 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/de4178
5. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain, *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, issue 4, pp. 42–50. https://doi.org/10.3103/S1066369X07040068
6. Khairullin R. S. Dirichlet problem for a mixed type equation of the second kind in exceptional cases, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 4, pp. 562–565. https://doi.org/10.1134/S0012266118040134
7. Khairullin R. S. Problem with a periodicity condition for an equation of the mixed type with strong degeneration, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, issue 8, pp. 1105–1117. https://doi.org/10.1134/S0012266119080111
8. Sabitova Yu. K. Boundary-value problem with nonlocal integral condition for mixed-type equations with degeneracy on the transition line, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 98, issue 3, pp. 454–465. https://doi.org/10.1134/S0001434615090114
9. Safina R. M. Keldysh problem for a mixed-type equation of the second kind with the Bessel operator, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 10, pp. 1347–1359. https://doi.org/10.1134/S0012266115100109
10. Irgashev B. Yu. On the conditions for the solvability of boundary-value problems for higher-order equations with discontinuous coefficients, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 111, issue 2, pp. 217–229. https://doi.org/10.1134/S0001434622010254

11. Irgashev B. Yu. On a boundary value problem for a high order mixed type equation, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2020, vol. 17, pp. 899–912. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.066
12. Karimov K. T. Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 31–48. https://doi.org/10.35634/vm200103
13. Fayazov K. S., Khudayberganov Ya. K. Ill-posed boundary value problem for mixed type system equations with two degenerate lines, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2020, vol. 17, pp. 647–660 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.043
14. Sabitov K. B. Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, issue 3, pp. 378–395. https://doi.org/10.1134/S0001434617090085
15. Sidorov S. N. Nonlocal problems for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with power degeneration, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, issue 12, pp. 46–55. https://doi.org/10.3103/S1066369X15120051
16. Sidorov S. N. Inverse problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 144–157 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.007
17. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator, *Ural Mathematical Journal*, 2020, vol. 6, issue 1, pp. 153–167. https://doi.org/10.15826/umj.2020.1.013
18. Kadirkulov B. J., Jalilov M. A. On a nonlocal problem for a fourth-order mixed-type equation with the Hilfer operator, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, 2021, vol. 104, issue 4, pp. 89–102. https://doi.org/10.31489/2021m4/89-102
19. Jalilov M. A. On a problem for a nonlocal mixed-type equation of fractional order with degeneration, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, issue 15, pp. 3652–3660. https://doi.org/10.1134/S1995080222030118
20. Feng Pengbin, Karimov E. T. Inverse source problems for time-fractional mixed parabolic-hyperbolic-type equations, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2015, vol. 23, issue 4, pp. 339–353. https://doi.org/10.1515/jiip-2014-0022
21. Karimov E., Al-Salti N., Kerbal S. An inverse source non-local problem for a mixed type equation with a Caputo fractional differential operator, *East Asian Journal of Applied Mathematics*, 2017, vol. 7, issue 2, pp. 417–438. https://doi.org/10.4208/eajam.051216.280217a
22. Yuldashev T. K., Karimov E. T. Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters, *Axioms*, 2020, vol. 9, issue 4, 121. https://doi.org/10.3390/axioms9040121
23. Karimov E., Ruzhansky M., Toshtemirov B. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, vol. 46, issue 1, pp. 54–70. https://doi.org/10.1002/mma.8491
24. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral redefinition conditions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, issue 3, pp. 649–662. https://doi.org/10.1134/S1995080221030227
25. Irgashev B. Yu. On a problem with conjugation conditions for an equation of even order involving a Caputo fractional derivative, *Mathematical Notes*, 2022, vol. 112, issue 2, pp. 215–222. https://doi.org/10.1134/S0001434622070252
26. Irgashev B. Yu. A boundary value problem with conjugation conditions for a degenerate equation with the Caputo fractional derivative, *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, issue 4, pp. 24–31. https://doi.org/10.3103/S1066369X2204003X
27. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006.

28. Bateman H. *Higher transcendental functions. Vol. 1*, New York: McGraw-Hill, 1953.
29. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Fizmatlit, 1969.
30. Mikhlin S. G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam* (Lectures on linear integral equations), Moscow: Fizmatlit, 1959.
31. Boudabsa L., Simon T. Some properties of the Kilbas–Saigo function, *Mathematics*, 2021, vol. 9, issue 3, 217. https://doi.org/10.3390/math9030217

Received 29.12.2022

Accepted 22.03.2023

Akhmadjon Kushakovich Urinov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, ul. Murabbiylar, 19, Fergana, 150100, Uzbekistan;
Leading Researcher, Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. Universiteteskaya, 46, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
E-mail: urinovak@mail.ru

Doniyor Abdumutolib ugli Usmonov, Researcher, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, ul. Murabbiylar, 19, Fergana, 150100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3574-075X
E-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

Citation: A. K. Urinov, D. A. Usmonov. On one problem for a fourth-order mixed-type equation that degenerates inside and on the boundary of a domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 312–328.