МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 329–347.

УДК 517.977

© *В. Е. Хартовский*

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ НАБЛЮДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В статье для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с многими соизмеримыми запаздываниями проведено исследование задачи оценки решения по результатам наблюдаемого выхода. Исследуемый класс вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием включает в себя классы линейных систем запаздывающего и нейтрального типов, кроме того, к вполне регулярным системам сводится анализ непрерывно-дискретных систем.

Для линейных автономных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с многими соизмеримыми запаздываниями определено свойство асимптотической наблюдаемости, характеризующееся тем, что все решения, порождающие один и тот же выходной сигнал, неразличимы в будущем. Сформулированы и доказаны условия асимптотической наблюдаемости, выраженные через параметры исходной системы. Для асимптотически наблюдаемых систем предложена процедура оценки решения, реализация которой состоит из следующих действий. Сначала, с использованием наблюдаемого выхода, в соответствие исходной системе ставится линейная автономная неоднородная асимптотически наблюдаемая система запаздывающего типа с неоднородной частью, зависящей он выхода. При этом решение новой системы однозначно определяет решение исходной системы. Затем строится преобразование, приводящее матрицы системы запаздывающего типа к определенному виду. После этого при помощи конечной цепочки наблюдателей осуществляется оценка решения. Результаты представленного исследования применимы к системам, которые не обладают свойством финальной наблюдаемости, что позволяет при моделировании соответствующих объектов реального мира существенно снизить требования к органам наблюдения.

Ключевые слова: линейная автономная вполне регулярная дифференциально-алгебраическая система, запаздывание, наблюдаемый выходной сигнал, оценка решения, асимптотический наблюдатель.

DOI: 10.35634/vm230210

Введение

Различные постановки задач, связанных с вопросами оценки и/или наблюдения решения линейных автономных систем запаздывающего типа, неоднократно встречались в литературе [1]. Один из подходов к определению свойства наблюдаемости таких объектов можно связать с формой Смита матрицы наблюдаемости. В частности, наличие в ее канонической форме верхнего блока в виде единичной матрицы такого же размера, что и матрицы исходной системы, говорит о том, что система сильно наблюдаема [1]. В этом случае оценка ее решения [2, 3] сводится к задаче управления системой в кольце многочленов. Более слабые требования к параметрам системы предъявляет свойство спектральной наблюдаемости [1], которое является двойственным по отношению к свойству спектральной управляемости [4]. Здесь вопрос построения наблюдателя, формирующего оценку решения исходной системы, можно заменить задачей назначения конечного спектра для двойственной системы управления [5–8] (см. также библиографию в этих работах). Если же спектральное условие нарушается в конечном числе точек, действительные части которых отрицательны, то можно говорить об асимптотической наблюдаемости [9, 10].

Другие подходы, связанные с формированием оценки решения бесконечномерных систем можно найти в работах [11–15]. В работе [11] для систем с запаздыванием построен асимптотический наблюдатель типа Люенберга. В [12] для систем запаздывающего типа построен наблюдатель, на основе которого предлагается проект регулятора для стабилизации системы управления, дальнейшее развитие этих идей дается в [13]. В [14] рассматривается проблема проектирования наблюдателя для неавтономных линейных бесконечномерных систем. Показано, что при условии слабой наблюдаемости наблюдатель типа Люенбергера может реконструировать так называемое наблюдаемое подпространство системы, однако в этом случае будет лишь слабая сходимость оценки к решению. Динамический наблюдатель типа Люенбергера для оценки полного состояния неавтономного линейного параболического уравнения по конечномерному выходу получен в [15].

В работах [10,16–19] разработан подход к проблеме оценки решения линейных автономных систем нейтрального типа. Так, в [16] строятся способы проектирования наблюдателей на базе решения задач модальной управляемости и слабой модальной управляемости, в [10] построена процедура асимптотической оценки асимптотически наблюдаемых систем, уточнение этих результатов изложено в [17, с. 375]. Отличительной чертой наблюдателей [10,16] является возможность их применения к системам, не имеющим свойств финальной или спектральной наблюдаемости, что существенно расширяет спектр их применения. В статьях [18, 19] предложены схемы проектирования финитных наблюдателей (ошибка таких наблюдателей есть финитная функция), представляющих собой выходы систем запаздывающего типа с конечным спектром.

В настоящей работе предлагается подход к асимптотической оценке решения асимптотически наблюдаемых вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием, который является обобщением результатов [10].

§ 1. Постановка задачи

Объект исследования — линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с последействием Σ:

$$\frac{d}{dt}\left(D\widetilde{x}(t)\right) = \sum_{i=0}^{m} A_i\widetilde{x}(t-ih), \quad t>0, \tag{1.1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i\widetilde{x}(t-ih), \quad t>0, \tag{1.2}$$

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{\eta}(t), \quad t\in[-mh,0], \tag{1.3}$$

где $\widetilde{x}$ — решение уравнения (1.1), y — наблюдаемый выход; $h = \mathrm{const} > 0$, D, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{r\times n}$. Считаем, что в начальном условии (1.3) начальная функция $\widetilde{\eta} \in \mathbf{PC}_D$. Здесь для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ запись $\mathbf{PC}_A = \mathbf{PC}_A([-mh,0],\mathbb{R}^n)$ обозначает множество кусочно-непрерывных функций $\eta\colon [-mh,0] \to \mathbb{R}^n$ таких, что функция $A\eta$ непрерывна.

Обозначим $\operatorname{rank} D = n_1$, $n_2 = n - n_1$. Систему (1.1) назовем вполне регулярной, если

$$\deg|pD - A_0| = n_1. \tag{1.4}$$

Далее будем изучать только вполне регулярные системы (1.1).

Один и тот же выход $y(t)$, $t>0$, может порождаться различными начальными функциями $\eta \in \mathbf{PC}_D\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$. Поэтому одному и тому же выходу $y(t)$, $t>t_0$ $(t_0 \geqslant 0)$, может соответствовать множество решений $\widetilde{x}(t)$, $t>t_0$, уравнения (1.1). Каждое такое решение $\widetilde{x}(t)$, $t>t_0$, будем называть *совместимым* с выходом $y(t)$, $t>t_0$.

Определение 1. Систему (1.1), (1.2) будем называть *асимптотически наблюдаемой*, если для любых двух решений $\widetilde{x}^1$ и $\widetilde{x}^2$ уравнения (1.1), совместимых с выходами y^1 и y^2 соответственно, выполняется условие: если $y^1(t) \equiv y^2(t)$, $t > t_1$ ($\exists\, t_1 > 0$), то $\|\widetilde{x}^1(t) - \widetilde{x}^2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Цель работы — получить условия асимптотической наблюдаемости систем вида (1.1), (1.2) и указать способ формирования оценки решения асимптотически наблюдаемой системы на основе измерений наблюдаемого выхода y. При этом потребуем, чтобы при формировании оценки решения системы (1.1) не использовались производные выхода $y^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, поскольку операция дифференцирования не является устойчивой к малым изменениям дифференцируемой функции и ее использование на практике может привести к значительным ошибкам.

Замечание 1. Легко видеть, что определение 1 равносильно тому, что $\|\widetilde{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех решений системы, совместимых с нулевым выходом $y(t) \equiv 0$, $t > t_1$ ($\exists\, t_1 > 0$).

§ 2. Каноническая форма

Если система (1.1), (1.2) является вполне регулярной, то ее можно привести к каноническому виду [20, 21]. Выберем неособые матрицы H и H_1 такие, что $H_1 D H = \operatorname{diag}\,[I_{n_1}, 0_{n_2\times n_2}]$, где $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Пусть

$$H_1 A_i H = \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i \\ \overline{Q}_{21}^i & \overline{Q}_{22}^i \end{bmatrix}, \quad C_i H = \left[K_1^i,\, K_2^i\right], \quad i = \overline{0, m},$$

где $Q_{1j}^i \in \mathbb{R}^{n_1\times n_j}[\lambda]$, $\overline{Q}_{2j}^i \in \mathbb{R}^{n_2\times n_j}[\lambda]$, $j = 1, 2$, $K_1^i \in \mathbb{R}^{r\times n_1}$, $K_2^i \in \mathbb{R}^{r\times n_2}$.

Докажем, что $\left|\overline{Q}_{22}^0\right| \neq 0$. Действительно, предположим противное. Выберем матрицы Ω_1, Ω_2 такие, что $\Omega_1 \overline{Q}_{22}^0 \Omega_2 = \operatorname{diag}\,[1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$. Из (1.4) следует, что

$$\deg\,|pH_1DH - H_1A_0H| = n_1.$$

Разложив определитель $\det\big(\operatorname{diag}\,[I_{n_1}, \Omega_1]\big(pH_1DH - H_1A_0H\big)\operatorname{diag}[I_{n_1}, \Omega_2]\big)$ по элементам последней строки, видим, что его степень не может равняться n_1. Значит, $\left|\overline{Q}_{22}^0\right| \neq 0$.

Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся тем, что $\left|\overline{Q}_{22}^0\right| \neq 0$. Положив $Q_{2j}^i = -\big(\overline{Q}_{22}^0\big)^{-1}\overline{Q}_{2j}^i$, $j = 1, 2$, $i = \overline{1, m}$, и, выполнив в системе (1.1) замену переменных $\widetilde{x} = H\mathrm{col}[x_1, x_2]$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, придем к системе

$$\begin{gathered} \dot{x}_1(t) = \sum_{i=0}^{m} \left(Q_{11}^i x_1(t - ih) + Q_{12}^i x_2(t - ih)\right), \\ x_2(t) = \sum_{i=0}^{m} Q_{21}^i x_1(t - ih) + \sum_{i=1}^{m} Q_{22}^i x_2(t - ih), \\ y(t) = \sum_{i=0}^{m} \left(K_1^i x_1(t - ih) + K_2^i x_2(t - ih)\right), \quad t > 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Введем полиномиальные матрицы

$$Q_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^i Q_{ij}^k, \quad i, j = 1, 2, \quad (i, j) \neq (2, 2), \quad Q_{22}(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \lambda^{i-1} Q_{ij}^k,$$

$$K_j(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^i K_j^i,\quad j=1,2,$$

и запишем систему (2.1) в операторном виде (λ_h — оператор сдвига, $\lambda_h\phi(t)=\phi(t-h)$)

$$\begin{aligned}\dot x_1(t)&=Q_{11}(\lambda_h)x_1(t)+Q_{12}(\lambda_h)x_2(t),\\ x_2(t)&=Q_{21}(\lambda_h)x_1(t)+Q_{22}(\lambda_h)x_2(t-h),\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$y(t)=K_1(\lambda_h)x_1(t)+K_2(\lambda_h)x_2(t),\quad t>0.\tag{2.3}$$

§ 3. Условия асимптотической наблюдаемости

Введем матрицы

$$K_y(\lambda)=\big[K_1(\lambda),\,K_2(\lambda)\big],\quad W_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix} pI_{n_1}-Q_{11}(\lambda) & -Q_{12}(\lambda)\\ -Q_{21}(\lambda) & I_{n_2}-\lambda Q_{22}(\lambda)\end{bmatrix},$$

и определим множество

$$P_{K_y}=\left\{p\in\mathbb{C}\colon \operatorname{rank}\begin{bmatrix} W_1(p,e^{-ph})\\ K_y(e^{-ph})\end{bmatrix}<n\right\}.$$

Лемма 1. *Пусть для системы* (2.2), (2.3) *выполняется условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_{n_2}-\lambda Q_{22}(\lambda)\\ K_2(\lambda)\end{bmatrix}=n_2\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{C}.\tag{3.1}$$

Тогда для того, чтобы система (2.2), (2.3) *была асимптотически наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

(1) *множество* P_{K_y} *состоит из конечного числа элеменов*; (3.2)

(2) $\operatorname{Re}p<0\quad\forall\,p\in P_{K_y}$. (3.3)

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (3.1) найдутся [16] (также см. [17, лемма 5.3, с. 235]) полиномиальные матрицы $Z_i(\lambda)$ подходящего размера такие, что $\big|\Upsilon(\lambda)\big|\equiv 1$, где

$$\Upsilon(\lambda)=\begin{bmatrix} I_{n_2}-\lambda Q_{22}(\lambda) & -Z_1(\lambda)\\ K_2(\lambda) & I_r-Z_2(\lambda)\end{bmatrix}.$$

Запишем следующее равенство

$$\Upsilon(\lambda_h)\begin{bmatrix} x_2(t)\\ \nu(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_{21}(\lambda_h)x_1(t)\\ y(t)-K_1(\lambda_h)x_1(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -Z_1(\lambda_h)\nu(t)\\ \big(I_r-Z_2(\lambda_h)\big)\nu(t)\end{bmatrix},\tag{3.4}$$

где $\nu(t)$ — произвольная функция ($t\in\mathbb{R}$), а

$$Q_{21}(\lambda_h)x_1(t)=x_2(t)-\lambda_h Q_{22}(\lambda_h)x_2(t)\tag{3.5}$$

согласно второму уравнению в (2.2). Действуя слева на равенство (3.4) оператором $H(\lambda_h)$, где $H(\lambda)=\big[H_{ij}(\lambda)\big]_{i,j=1}^2$ — матрица, присоединенная к матрице $\Upsilon(\lambda)$ ($H_{ij}(\lambda)\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}[\lambda]$, размеры остальных блоков понятны), получим формулу

$$\begin{aligned}x_2(t)&=H_{11}(\lambda_h)Q_{21}(\lambda_h)x_1(t)+H_{12}(\lambda_h)\big(y(t)-K_1(\lambda_h)x_1(t)\big)=\\ &=M(\lambda_h)x_1(t)+H_{12}(\lambda_h)y(t),\quad t>t_2,\end{aligned}\tag{3.6}$$

где $M(\lambda) = H_{11}(\lambda)Q_{21}(\lambda) - H_{12}(\lambda)K_1(\lambda)$, $t_2 = \gamma h$, $\gamma = \max\{\deg H_{1i}(\lambda),\ i = 1, 2\}$. Согласно первому уравнению системы (2.2) запишем (ниже $t_3 = t_2 + mh$)

$$\dot{x}_1(t) = \big(Q_{11}(\lambda_h) + Q_{12}(\lambda_h)M(\lambda_h)\big)x_1(t) + Q_{12}(\lambda_h)H_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_3. \tag{3.7}$$

Используя формулы (3.5), (3.6), в соответствие уравнению (3.5) поставим известный выход

$$\begin{gathered} y(t) - K_2(\lambda_h)H_{12}(\lambda_h)y(t) = \big(K_1(\lambda_h) + K_2(\lambda_h)M(\lambda_h)\big)x_1(t), \\ H_{12}(\lambda_h)y(t) - \lambda_h Q_{22}(\lambda_h)H_{12}(\lambda_h)y(t) = \\ = \big(Q_{21}(\lambda_h) - M(\lambda_h) + \lambda_h Q_{22}(\lambda_h)M(\lambda_h)\big)x_1(t), \quad t > t_3. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Обозначим: $W_Q(p, \lambda) = pI_{n_1} - Q(\lambda)$, $Q(\lambda) = Q_{11}(\lambda) + Q_{12}(\lambda)M(\lambda)$,

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1(\lambda) + K_2(\lambda)M(\lambda) \\ Q_{21}(\lambda) - M(\lambda) + \lambda Q_{22}(\lambda)M(\lambda) \end{bmatrix}, \quad P_K = \left\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W_Q(p, e^{-ph}) \\ K(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n_1\right\}.$$

Множества P_K и P_{K_y} состоят из одних и тех же элементов, $P_K = P_{K_y}$ (доказывается методом от противного). Поэтому в силу (3.2), (3.3)

(1) множество P_K состоит из конечного числа элеменов; (3.9)

(2) $\operatorname{Re} p < 0 \quad \forall\, p \in P_K$. (3.10)

Значит, любое решение x_1^0 системы (3.7), совместимое с нулевым выходом $y(t) \equiv 0$, $t > t_3$, имеет вид [17, с. 61]

$$x_1^0(t) = \sum_{i=1}^{k_0} c_i \vartheta_i(t), \qquad \vartheta_i(t) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} \gamma_j \frac{t^j}{j!} e^{p_i t},$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}^{n_1}$, $p_i \in P_K$, α_i — кратность числа p_i как корня характеристического уравнения системы (3.8), k_0 — мощность множества P_K. В силу (3.6) заключаем, что все решения $\operatorname{col}[x_1^0, x_2^0]$ системы (2.2), (2.3) имеют вид

$$\operatorname{col}[x_1^0(t), x_2^0(t)] = \sum_{i=1}^{k_0} \bar{c}_i \bar{\vartheta}_i(t), \qquad \bar{\vartheta}_i(t) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} \bar{\gamma}_j \frac{t^j}{j!} e^{p_i t}, \tag{3.11}$$

$\bar{c}_i \in \mathbb{R}$, $\bar{\gamma}_i \in \mathbb{R}^n$, $p_i \in P_K$. В силу (3.3) видим, что

$$\big\|\operatorname{col}[x_1^0(t), x_2^0(t)]\big\|_{\mathbb{R}^n} \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty. \tag{3.12}$$

Согласно замечанию 1 система (2.2), (2.3) является асимптотически наблюдаемой.

Докажем обратное утверждение леммы 1. Пусть система (2.2), (2.3) является асимптотически наблюдаемой. Тогда этим же свойством обладает система (3.7), (3.8). Но если нарушается условие (3.2), то множество решений системы (3.7), (3.8), совместимых с нулевым выходом, будет содержать произвольные функции. Поэтому свойства асимптотической наблюдаемости у системы (3.7), (3.8) и, соответственно, у системы (2.2), (2.3), априори не будет.

Докажем необходимость условия (3.3). Действительно, если имеет место (3.2) и справедливо соотношение (3.12), то все p_i в (3.11) имеют отрицательные действительные части [17, с. 61]. Лемма доказана. □

Рассмотрим систему (1.1), (1.2). Обозначим

$$W(p,\lambda) = Dp - A(\lambda), \qquad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \qquad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i.$$

Введем множество

$$P_C = \left\{ p \in \mathbb{C} \colon \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} < n \right\}.$$

Лемма 2. *Множества P_C и P_{K_y} состоят из одних и тех же элементов: $P_C = P_{K_y}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 очевидно, поэтому приводить его не будем.

Пусть $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$, $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_2}$ — матрицы фундаментальных систем решений алгебраических систем $\gamma_1 D = 0$ и $D\gamma_2 = 0$ соответственно (относительно неизвестных γ_i, $i = 1, 2$).

Теорема 1. *Пусть для системы* (1.1), (1.2) *выполняется условие*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda) \Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n_2 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.13}$$

Тогда система (1.1), (1.2) *является асимптотически наблюдаемой тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

(1) *множество P_C состоит из конечного числа элеменов*; (3.14)

(2) $\operatorname{Re} p < 0 \quad \forall\, p \in P_C$. (3.15)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия леммы 1 выполняются для системы (2.2), (2.3) в том и только в том случае, когда выполняются условия теоремы 1 для системы (1.1), (1.2). Действительно, одновременное выполнение условий (1), (2) следует из леммы 2, а одновременное выполнение условий (3.1) и (3.13) обосновано в работе [20] (см. лемму 1).

В силу формулы $\widetilde{x} = H\operatorname{col}[x_1, x_2]$ системы (1.1), (1.2) и (2.2), (2.3) являются асимптотически наблюдаемыми или не обладают этим свойством одновременно, что и доказывает теорему. □

Замечание 2. Условие (3.13) не является необходимым для асимптотической наблюдаемости системы (2.2), (2.3). Однако в работе [21] показано, что это условие необходимо для того, чтобы решение системы (2.2), (2.3) можно было восстановить на основании измерений выхода y (без использования производных выхода). Поэтому возможность получить асимптотическую оценку решения системы (2.2), (2.3) в виде решения некоторой линейной автономной системы, зависящей от выхода (без использования производных выхода) в случае нарушения условия (3.13) представляется невозможным.

Поясним сказанное примером.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_2(t) = x_1(t) + x_2(t-h), \\ \dot{x}_3(t) = -2x_2(t) + x_2(t-h), \quad y(t) = x_3(t), \quad h = \ln 2. \end{gathered} \tag{3.16}$$

В данном случае соотношение (3.13) не имеет места, а условия (1), (2) леммы 1 выполнены, $P_{K_y} = \{-1\}$. Несложно показать, что рассматриваемая система является асимптотически наблюдаемой, а ее решение выражается через выход y и его производные следующим образом $(t_0 > h)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -e^{-t}c + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-t+\tau}\dot y(\tau)\,d\tau, \quad x_3(t) = y(t), \quad t \in [t_0, t_0+h], \\ x_2(t) &= e^{-t}c + \dot y(t) - \int\limits_{t_0}^{t} e^{-t+\tau}\dot y(\tau)\,d\tau, \quad t \in (t_0, t_0+h], \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Предположим, что существует линейная автономная дифференциальная система (асимптотический наблюдатель), зависящая от выхода y (и не зависящая от производных выхода), выход которой есть оценка решения системы (3.16). Тогда при «малом» изменении выхода y получим «малое» изменение оценки z. Однако формулы (3.17) показывают, что решение x при «малом» изменении выхода y может измениться «существенно», поскольку операция дифференцирования не является устойчивой к малым изменениям. В этом случае функция z не может быть оценкой решения исходной системы.

§ 4. Вспомогательная задача

Ниже понадобится решение одной вспомогательной задачи [10].

Пусть задана система запаздывающего типа со скалярным выходом

$$\dot x(t) = \Theta(\lambda_h)x(t) + \widehat\Theta(\lambda_h)\omega(t) + f(t), \quad t > t_0^*, \tag{4.1}$$

$$y(t) = k(\lambda_h)x(t) + \widehat k(\lambda_h)\omega(t), \quad t \geqslant t_0^*. \tag{4.2}$$

Здесь x — решение уравнения (4.1), y — наблюдаемый выход, ω — некоторая неизвестная кусочно-непрерывная функция, $\overline\omega$ — известная асимптотическая оценка функции ω такая, что $\|\overline\omega(t) - \omega(t)\|_{\mathbb{R}^{n_1}} \to 0$ при $t \to +\infty$, f — известная непрерывная функция; $\Theta(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\widehat\Theta(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n_1}[\lambda]$, $k(\lambda) \in \mathbb{R}^{1\times n}[\lambda]$, $\widehat k(\lambda) \in \mathbb{R}^{1\times n_1}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{n\times m}[\lambda]$ — множество полиномиальных матриц размера $n \times m$); $t_0^* > 0$. Для уравнения (4.1) начальное условие задается непрерывной начальной функцией $x(t) = \breve x(t)$, $t \in [t_0^* - \breve m h, t_0^*]$, где $\breve m = \deg\Theta(\lambda)$, которая предполагается неизвестной.

Задача A. Требуется по известному наблюдаемому выходу $y(t)$ получить асимптотическую оценку $z(t)$ решения $x(t)$ уравнения (4.1) такую, что $\|x(t) - z(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Лемма 3. *Если для системы* (4.1), (4.2) *выполняется условие*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_n - \Theta(e^{-ph}) \\ k(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall\, p \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

то задача A *разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется условие (4.3), то для любого наперед заданного квазиполинома

$$d(p) = p^{n^*} + \sum_{i=0}^{n^*-1} p^i\varphi_i(e^{-ph}), \tag{4.4}$$

где $\varphi_i(\cdot)$ — полиномы, число $n^* = n + 1$, существуют дробно-рациональные функции $\chi_1(p,\lambda)$, $\chi_2(p,\lambda)$ такие, что

$$\begin{vmatrix} pI_n - \Theta(e^{-ph}) & -\chi_1(p, e^{-ph}) \\ -k(e^{-ph}) & p - \chi_2(p, e^{-ph}) \end{vmatrix} = d(p). \tag{4.5}$$

Функции $\chi_1(p,\lambda)$, $\chi_2(p,\lambda)$ можно выбрать такими, что справедливо представление

$$\chi_i(p,e^{-ph}) = \nu_i(e^{-ph}) + \sum_{j=0}^{m_{\chi_i}} \int\limits_0^h \nu_{ij}(s)e^{-p(s+jh)}\,ds, \quad i=1,2,$$

где $\nu_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times 1}[\lambda]$, $\nu_2(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, $m_{\chi_i} \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ — некоторые числа, а функции $\nu_{ij}(s)$ есть конечные суммы слагаемых, которые имеют вид $e^{\alpha_1 s}\big(\mu_1(s)\cos(\alpha_2 s) + \mu_2(s)\sin(\alpha_2 s)\big)$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$, $\mu_i(s)$, $i=1,2$, — полиномы подходящих размеров).

Чтобы найти дробно-рациональные функции $\chi_i(p,\lambda)$, $i=1,2$, следует [17, с. 321], [20] обратной связью обеспечить системе

$$\dot{\overline{x}}_1(t) = \Theta'(\lambda_h)\overline{x}_1(t) + k'(\lambda_h)\overline{x}_2(t), \quad \dot{\overline{x}}_2(t) = u(t),$$

у которой $\overline{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_2 \in \mathbb{R}$ — компоненты вектора решения $\mathrm{col}[\overline{x}_1,\overline{x}_2]$, u — управление (здесь и ниже символ «$'$» обозначает операцию транспонирования), характеристический квазиполином равный $d(p)$, то есть решить задачу модальной управляемости. Разрешимость такой задачи гарантирует условие (4.3).

Для формирования асимптотической оценки z решения x системы (4.1), (4.2) выберем асимптотически устойчивый квазиполином $d(p)$, найдем функции $\chi_i(p,\lambda)$, $i=1,2$, удовлетворяющие (4.5), и построим наблюдатель

$$\begin{gathered}
\dot z(t) = \Theta(\lambda_h)z(t) + \nu_1(\lambda_h)z_1(t) + \sum_{j=0}^{m_{\chi_1}} \int\limits_0^h \nu_{1j}(s)z_1(t-jh-s)\,ds + \widehat{\Theta}(\lambda_h)\overline{\omega}(t) + f(t),\\
\dot z_1(t) = k(\lambda_h)z(t) + \nu_2(\lambda_h)z_1(t) + \sum_{j=0}^{m_{\chi_2}} \int\limits_0^h \nu_{2j}(s)z_1(t-jh-s)\,ds - \big(y(t) - \widehat{k}(\lambda_h)\overline{\omega}(t)\big),\\
t > t_0^*.
\end{gathered} \tag{4.6}$$

В качестве начального условия для системы (4.6) берем любую непрерывную на отрезке $[t_0^*, t_0^* - h_0^*]$ функцию, где h_0^* — максимальная величина запаздывания системы (4.6). Тогда ошибка оценивания $\varepsilon = z - x$ удовлетворяет асимптотически устойчивой системе

$$\dot\varepsilon(t) = \Theta(\lambda_h)\varepsilon(t) + \nu_1(\lambda_h)z_1(t) + \sum_{j=0}^{m_{\chi_1}} \int\limits_0^h \nu_{1j}(s)z_1(t-jh-s)ds + \widehat{\Theta}(\lambda_h)\big(\overline{\omega}(t) - \omega(t)\big),$$

$$\dot z_1(t) = k(\lambda_h)\varepsilon(t) + \nu_2(\lambda_h)z_1(t) + \sum_{j=0}^{m_{\chi_2}} \int\limits_0^h \nu_{2j}(s)z_1(t-jh-s)ds + \widehat{k}(\lambda_h)\big(\overline{\omega}(t) - \omega(t)\big), \quad t > t_0^*,$$

неоднородная часть которой стремится к нулю. Кроме того, характеристический квазиполином этой системы равен $d(p)$. Поэтому $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|z(t) - x(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$. Лемма доказана. □

Замечание 3. Если вектор $k(\lambda) = k$, то есть не зависит от λ, то для любого квазиполинома $d(p)$, описанного формулой (4.4) при $n^* = n$, найдется дробно-рациональная функция $\chi_1(p,\lambda)$ указанного выше вида такая, что

$$\big|pI_n - \Theta(e^{-ph}) - \chi_1(p,e^{-ph})k\big| = d(p).$$

В этом случае в качестве наблюдателя можно взять уравнение

$$\dot z(t)=\Theta(\lambda_h)z(t)+\nu_1(\lambda_h)kz(t)+\sum_{j=0}^{m_{\chi 1}}\int_0^h \nu_{1j}(s)kz(t-jh-s)\,ds-$$
$$-\nu_1(\lambda_h)\big(y(t)-\widehat{k}(\lambda)\overline{\omega}(t)\big)-\sum_{j=0}^{m_{\chi 1}}\int_0^h \nu_{1j}(s)\big(y(t-jh-s)-$$
$$-\widehat{k}(\lambda)\overline{\omega}(t-jh-s)\big)\,ds+\widehat{\Theta}(\lambda)\overline{\omega}(t)+f(t),\quad t>t^*,\tag{4.7}$$

где $t^*=t_0^*+h\cdot\max\{\deg\nu_1(\lambda),m_{\chi_1}+1\}$. В качестве начального условия для системы (4.7) берем любую непрерывную на отрезке $[t^*,t^*-h^*]$ функцию, где h^* — максимальная величина запаздывания системы (4.7).

Если, кроме того, определитель матрицы наблюдаемости

$$\Theta_k(\lambda)=\begin{bmatrix} k(\lambda)\\ \cdots\\ k(\lambda)\big(\Theta(\lambda)\big)^{n-1}\end{bmatrix}$$

равен ненулевому числу, то вместо дробно-рациональной функции $\chi_1(p,\lambda)$ можно взять полиномиальную функцию $\chi_1(\lambda)$, то есть $\chi_1(p,\lambda)=\chi_1(\lambda)$.

Предположим, что условие (4.3) нарушается.

Лемма 4. *Для разрешимости задачи* A *достаточно, чтобы для любого* $\lambda^*\in\Lambda_{\Theta_k}$ *выполнялось условие:*

$$\lambda^*=0\quad\textit{или}\quad|\lambda^*|>1,\tag{4.8}$$

где Λ_{Θ_k} *— множество корней определителя* $\Delta(\lambda)=|\Theta_k(\lambda)|$.

Доказательство. Условие (4.8) является достаточным [9] для асимптотической наблюдаемости системы (4.1), (4.2). Для построения наблюдателя воспользуемся с небольшими изменениями подходом [9]. Замена переменных

$$\overline{x}=\Theta_k(\lambda_h)x\tag{4.9}$$

приводит [9] исходную систему (4.1), (4.2) к системе вида

$$\begin{gathered}\dot{\overline{x}}(t)=\overline{\Theta}(\lambda_h)\overline{x}(t)+\Theta_k(\lambda_h)\big(\widehat{\Theta}(\lambda_h)\omega(t)+f(t)\big),\\ y(t)=\overline{k}\overline{x}(t)+\widehat{k}(\lambda_h)\omega(t),\quad t>\overline{t}_0,\end{gathered}\tag{4.10}$$

где матрица

$$\overline{\Theta}(\lambda)=\Theta_k(\lambda_h)\Theta(\lambda_h)=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&1\\ -\zeta_1(\lambda)&-\zeta_2(\lambda)&-\zeta_3(\lambda)&\dots&-\zeta_n(\lambda)\end{bmatrix};$$

$\zeta_i(\lambda)$ — коэффициенты характеристического полинома матрицы $\Theta(\lambda)$:

$$\big|pI_n-\Theta(\lambda)\big|=p^n+\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(\lambda)p^{i-1};$$
$$\overline{k}=[1,0,\dots,0]\in\mathbb{R}^{1\times n};\quad \overline{t}_0=t_0^*+h\big(\deg k(\lambda)+(n-1)\check{m}\big).$$

Действительно, продифференцируем равенство (4.9) и заменим $\dot{x}$ согласно (4.1). Далее заметим, что ($\overline{x} = [\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]'$)

$$\Theta_k(\lambda_h)\Theta(\lambda_h)x = \begin{bmatrix} k(\lambda_h)\Theta(\lambda_h) \\ \dots \\ k(\lambda_h)\big(\Theta(\lambda_h)\big)^n \end{bmatrix} x =$$

$$= \begin{bmatrix} k(\lambda_h)\Theta(\lambda_h) \\ \dots \\ k(\lambda_h)\big(\Theta(\lambda_h)\big)^{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} \zeta_i(\lambda_h)k(\lambda_h)\big(\Theta(\lambda_h)\big)^{i-1} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \overline{x}_2 \\ \dots \\ \overline{x}_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} \zeta_i(\lambda_h)\overline{x}_i \end{bmatrix},$$

$$k(\lambda_h)x = \overline{x}_1.$$

Для системы (4.10) выполняется равенство $\overline{\Theta}_k(\lambda) = I_n$, где

$$\overline{\Theta}_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \overline{k}(\lambda) \\ \dots \\ \overline{k}(\lambda)\big(\overline{\Theta}(\lambda)\big)^{n-1} \end{bmatrix}$$

— матрица наблюдаемости. Поэтому для системы (4.10) выполняются условия леммы 3 (точнее замечания 3). То есть для любого заданного квазиполинома $d(p)$, определяемого формулой (4.4) при $n^* = n$, найдется полином $\chi(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times 1}[\lambda]$ такой, что определитель

$$\left|pI_n - \overline{\Theta}(e^{-ph}) - \chi(e^{-ph})\overline{k}\right| = d(p).$$

Выбрав асимптотически устойчивый квазиполином $d(p)$, наблюдатель для формирования оценки $\overline{z}$ решения $\overline{x}$ системы (4.10) возьмем в виде

$$\dot{\overline{z}}(t) = \big(\overline{\Theta}(\lambda_h) + \chi(\lambda_h)\overline{k}\big)\overline{z}(t) - \chi(\lambda_h)\big(y(t) - \widehat{k}\overline{\omega}(t)\big) + \Theta_k(\lambda_h)\big(\widehat{\Theta}(\lambda_h)\overline{\omega}(t) + f(t)\big), \quad t > \overline{t}_1,$$

где $\overline{t}_1 = t_0^* + h \cdot \deg\chi(\lambda)$. Ошибка $\overline{\varepsilon} = \overline{z} - \overline{x}$ удовлетворяет системе

$$\dot{\overline{\varepsilon}}(t) = \big(\overline{\Theta}(\lambda_h) + \chi(\lambda_h)\overline{k}\big)\overline{\varepsilon}(t) + \big(\chi(\lambda_h)\widehat{k} + \Theta_k(\lambda_h)\widehat{\Theta}(\lambda_h)\big)\big(\overline{\omega}(t) - \omega(t)\big), \quad t > \overline{t}_1.$$

В силу выбора полинома $d(p)$ и условия $\|\overline{\omega}(t) - \omega(t)\|_{\mathbb{R}^{n_1}} \to 0$ при $t \to +\infty$, получаем

$$\|\overline{\varepsilon}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{4.11}$$

Пусть $\Pi_{\Theta_k}(\lambda)$ — матрица, присоединенная к матрице $\Theta_k(\lambda)$. Тогда для асимптотической оценки z решения x системы (4.1), (4.2) воспользуемся разностным уравнением

$$\Delta(\lambda_h)z(t) = \Pi_{\Theta_k}(\lambda_h)\overline{z}(t), \quad t > \overline{t}_2,$$

где $\overline{t}_2 = \overline{t}_1 + (n-1)\cdot \deg k(\lambda) + 0.5n(n-1)\deg\Theta(\lambda)$. Ошибка оценивания $\varepsilon = z - x$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\lambda_h)\varepsilon(t) = \Pi_{\Theta_k}(\lambda_h)\overline{\varepsilon}(t), \quad t > \overline{t}_2. \tag{4.12}$$

В силу условия (4.8) все корни характеристического полинома $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ однородного уравнения (4.12) ($\overline{\varepsilon}(t) = 0$) по модулю меньше единицы, где $\widetilde{\Delta}\,(\lambda) = \lambda^n\Delta\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$. Значит однородное уравнение (4.12) равномерно асимптотически устойчиво. Учитывая соотношения (4.11), заключаем, что $\|\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$. Лемма доказана. $\square$

§ 5. Оценка решения исходной системы

Рассмотрим систему (2.2), (2.3). Считаем, что имеют место условия (3.1)–(3.3). Тогда переменная x_1 удовлетворяет системе (3.7), (3.8), которую перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Q(\lambda_h)x_1(t) + F(t), \\ Y(t) &= K(\lambda_h)x_1(t), \quad t > t_3, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где матрицы $Q(\lambda)$, $K(\lambda)$ определены ранее, $F(t) = Q_{12}(\lambda_h)H_{12}(\lambda_h)y(t)$,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) - K_2(\lambda_h)H_{12}(\lambda_h)y(t) \\ H_{12}(\lambda_h)y(t) - \lambda_h Q_{22}(\lambda_h)H_{12}(\lambda_h)y(t) \end{bmatrix}.$$

Приведем пару матриц $\big(Q(\lambda),\, K(\lambda)\big)$, определяющих систему (5.1), к блочно-треугольному виду специальной структуры. Для системы (5.1) определим матрицу наблюдаемости

$$\widetilde{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} K(\lambda) \\ K(\lambda)Q(\lambda) \\ \dots \\ K(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{n_1-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\operatorname{rank}\widetilde{L}(\lambda) = \delta$ ($\delta \leqslant n_1$). Выберем любые θ ($1 \leqslant \theta \leqslant n_2 + r$) строк $k_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, матрицы $K(\lambda)$ такие, что при некоторых числах δ_j, $j = \overline{1,\theta}$, $\delta_1 + \ldots + \delta_\theta = \delta$, выполняются равенства

$$\operatorname{rank} L_{(i_1,\ldots,i_j)}(\lambda) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} L_{(i_1,\ldots,i_j)}(\lambda) \\ k_{i_j}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_j} \end{bmatrix} = \delta_1 + \ldots + \delta_j, \quad j = \overline{1,\theta}, \tag{5.2}$$

где

$$L_{(i_1,\ldots,i_j)}(\lambda) = \begin{bmatrix} k_{i_1}(\lambda) \\ k_{i_1}(\lambda)Q(\lambda) \\ \dots \\ k_{i_1}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_1-1} \\ k_{i_2}(\lambda) \\ \dots \\ k_{i_2}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_2-1} \\ \dots \\ k_{i_j}(\lambda)\big(Q(\lambda)\big)^{\delta_j-1} \end{bmatrix}.$$

Построим унимодулярную матрицу $R(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}[\lambda]$ такую, что матрица $L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda)R(\lambda)$ будет иметь структуру вида

$$L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda)R(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{1\,n_1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \omega_{\delta-1,n_1-\delta+2}(\lambda) & \dots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \omega_{\delta,n_1-\delta+1}(\lambda) & \times & \dots & \times \end{bmatrix},$$

где $\omega_{\delta-j,n_1-\delta+1+j}(\lambda)$, $j = \overline{0,\delta-1}$, — некоторые полиномы, отличные от тождественного нуля, символом «$\times$» здесь и далее обозначены произвольные полиномы, вид которых не существенен. Положим $Q_R(\lambda) = \big(R(\lambda)\big)^{-1}Q(\lambda)R(\lambda)$, $K_R(\lambda) = K(\lambda)R(\lambda)$. Тогда

$$Q_R(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi_{\theta+1,\theta+1}(\lambda) & \Phi_{\theta+1,\theta}(\lambda) & \dots & \Phi_{\theta+1,1}(\lambda) \\ 0 & \Phi_{\theta\theta}(\lambda) & \dots & \Phi_{\theta 1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_{11}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad K_R(\lambda) = \begin{bmatrix} k_1^R(\lambda) \\ \dots \\ k_{n_1+r}^R(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

где $\Phi_{jj}(\lambda) \in \mathbb{R}^{\delta_j \times \delta_j}[\lambda]$, $j = \overline{1,\theta}$, $\Phi_{\theta+1,\theta+1}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n_1-\delta)\times(n_1-\delta)}[\lambda]$, размеры остальных блоков $\Phi_{ij}(\lambda)$, $i = \overline{2,\theta+1}$, $j = \overline{1,\theta}$, определяются из вида матрицы $Q_R(\lambda)$; $k_i^R(\lambda) \in \mathbb{R}^{1\times n_1}[\lambda]$ — строки матрицы $K_R(\lambda)$. В силу равенств (5.2) блоки $\Phi_{jj}(\lambda)$, $j = \overline{1,\theta}$, имеют вид

$$\Phi_{jj}(\lambda) = \begin{bmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ \beta_{21}^j(\lambda) & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \beta_{32}^j(\lambda) & \dots & \times & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{\delta_j,\delta_j-1}^j(\lambda) & \times \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1,\theta},$$

где $\beta_{i,i-1}^j(\lambda)$, $i = \overline{2,\delta_j}$, — некоторые полиномы, отличные от тождественного нуля. Опишем строки $k_i^R(\lambda)$ матрицы $K_R(\lambda)$:

$$k_{i_j}^R(\lambda) = \big[0_{n-\delta}, 0_{\delta_\theta}, \dots, 0_{\delta_{j+1}}, \overline{k}_{jj}(\lambda), \overline{k}_{j,j-1}(\lambda), \dots, \overline{k}_{j1}(\lambda)\big], \quad j = \overline{1,\theta},$$

где $0_i \in \mathbb{R}^{1\times i}$ — нулевая строка, $\overline{k}_{j,j-i}(\lambda) \in \mathbb{R}^{1\times\delta_{j-i}}[\lambda]$, $i = \overline{0,j-1}$, — векторные компоненты, причем $\overline{k}_{jj}(\lambda) = \big[0,\dots,0,\gamma_{jj}(\lambda)\big]$, $\gamma_{jj}(\lambda)$ — отличный от нуля полином. Остальные строки матрицы $K_R(\lambda)$ имеют вид

$$k_j^R(\lambda) = [0,\dots,0,\times,\dots,\times], \quad j \in \{1,\dots,n_1+r\} \setminus \{i_1,\dots,i_\theta\}$$

(на первых $n_1 - \delta$ местах стоят нули).

В системе (5.1) сделаем замену переменных по формуле

$$\overline{x}(t) = \big(R(\lambda_h)\big)^{-1} x_1(t), \quad t > t_3 + h \deg \big(R(\lambda)\big)^{-1}.$$

Тогда

$$x_1(t) = R(\lambda_h)\overline{x}(t), \quad t > t_3 + h\Big(\deg \big(R(\lambda)\big)^{-1} + \deg R(\lambda)\Big). \tag{5.4}$$

В результате система (5.1) преобразуется в систему

$$\dot{\overline{x}}(t) = Q_R(\lambda_h)\overline{x}(t) + F_R(t), \tag{5.5}$$

$$Y(t) = K_R(\lambda_h)\overline{x}(t), \quad t > t_4, \tag{5.6}$$

где $F_R(t) = \big(R(\lambda)\big)^{-1}F(t)$, $t_4 = t_3 + h\Big(\deg \big(R(\lambda)\big)^{-1} + \deg R(\lambda) + \deg Q^R(\lambda)\Big)$.

Пусть $W_Q^R(p,\lambda) = pI_n - Q_R(\lambda)$ — характеристическая матрица уравнения (5.5) (при $\lambda = e^{-ph}$),

$$P_K^R = \left\{p \in \mathbb{C}\colon \operatorname{rank} \begin{bmatrix} W_Q^R(p,e^{-ph}) \\ K_R(e^{-ph}) \end{bmatrix} < n_1\right\}.$$

Очевидно, что множества P_K^R и P_K состоят их одних и тех же элементов, $P_K^R = P_K$. Поэтому из условий (3.9), (3.10) следует, что

(1) множество P_K^R состоит из конечного набора чисел, (5.7)

(2) $\operatorname{Re} p_i < 0 \quad \forall\, p_i \in P_K^R$, (5.8)

то есть система (5.5), (5.6) является асимптотически наблюдаемой.

Таким образом пришли к задаче оценки решения $\overline{x}$ системы запаздывающего типа (5.5), (5.6) с матрицами (5.3). Структура этих матриц позволяет сформулированную выше задачу свести к θ задачам вида задачи А. Для этого векторы $\overline{x}$, F_R, Y представим в виде $\overline{x} = \operatorname{col}[\overline{x}_{\theta+1},\dots,\overline{x}_1]$, $Y = \operatorname{col}[Y_{\theta+1},\dots,Y_1]$, $F_R = \operatorname{col}[f_{\theta+1}^R,\dots,f_1^R]$, где $\overline{x}_j$, Y_j, $f_j^R \in \mathbb{R}^{\delta_j}$,

$j=\overline{1,\theta}$, $\overline{x}_{\theta+1}$, $Y_{\theta+1}$, $f^R_{\theta+1}\in\mathbb{R}^{n_1-\delta}$. С каждой векторной компонентой $\overline{x}_j$, $j=\overline{1,\theta}$, свяжем подсистему

$$\dot{\overline{x}}_j(t)=\Phi_{jj}(\lambda_h)\overline{x}_j(t)+\Xi_j(t)+f^R_j(t), \tag{5.9}$$

$$Y_j(t)=\overline{k}_{jj}(\lambda_h)\overline{x}_j(t)+\widehat{\Xi}_j(t),\quad t>t_4,\quad j=\overline{1,\theta}, \tag{5.10}$$

а с векторной компонентой $\overline{x}_{\theta+1}$ уравнение

$$\dot{\overline{x}}_{\theta+1}(t)=\Phi_{\theta+1,\theta+1}(\lambda_h)\overline{x}_{\theta+1}(t)+\Xi_{\theta+1}(t)+f^R_{\theta+1}(t),\quad t>t_4. \tag{5.11}$$

Здесь

$$\Xi_1(t)\equiv 0,\quad \Xi_j(t)=\sum_{\rho=1}^{j-1}\Phi_{j\rho}(\lambda_h)\overline{x}_\rho(t),\quad j=\overline{2,\theta+1},$$

$$\widehat{\Xi}_1(t)\equiv 0,\quad \widehat{\Xi}_j(t)=\sum_{\rho=1}^{j-1}\overline{k}_{j\rho}(\lambda_h)\overline{x}_\rho(t),\quad j=\overline{2,\theta}.$$

Компоненты Y_j, $j\in\{1,\dots,n_1+r\}\setminus\{i_1,\dots,i_\theta\}$ вектора Y не используются.

Лемма 5. *Для формирования оценок решений* $\overline{x}_j$, $j=\overline{1,\theta+1}$, *систем* (5.9), (5.10) *и* (5.11) *достаточно, чтобы:*

(1) *для каждой пары матриц* $\{\Phi_{jj}(\lambda),\overline{k}_{jj}(\lambda)\}$, $j=\overline{1,\theta}$, *при* $\Theta(\lambda)=\Phi_{jj}(\lambda)$, $k(\lambda)=\overline{k}_{jj}(\lambda)$ *выполнялось условие* (4.3) *или* (4.8)*;*

(2) *если* p^* — *корень уравнения* $\left|pI_{n_1-\delta}-\Phi_{\theta+1\theta+1}(e^{-ph})\right|=0$, *то* $\operatorname{Re}p^*<0$.

Доказательство. Покажем, как получить оценки $\overline{z}_j$ решений $\overline{x}_j$ систем (5.9), (5.10) и уравнения (5.11).

1. Рассмотрим систему (5.9), (5.10) при $j=1$. Полагаем $\Theta(\lambda)=\Phi_{11}(\lambda)$, $k(\lambda)=\overline{k}_{11}(\lambda)$, $\widehat{\Theta}(\lambda)=0$, $\widehat{k}(\lambda)=0$, $x=\overline{x}_1$, $y=Y_1$, $\omega=0$, $\overline{\omega}=0$, $f=0$. Если выполняется условие (4.3), то построим наблюдатель, формирующий оценку $\overline{z}_1(t)$, $t>\overline{t}_1$, решения $\overline{x}_1(t)$, $t>\overline{t}_1$, согласно доказательству леммы 3 или замечания 3 (считая, что $z=\overline{z}_1$). Если же выполняется условие (4.8), то для получения оценки $\overline{z}_1$ возьмем наблюдатель согласно доказательству леммы 4. Число $\overline{t}_1\geqslant t_4$ определяется выбранным способом построения соответствующего регулятора.

2. Последовательно берем $i=2,\dots,\theta$. Для каждого фиксированного i полагаем $\Theta(\lambda)=\Phi_{ii}(\lambda)$, $\widehat{\Theta}(\lambda)=\left[\Phi_{ii-1}(\lambda),\dots,\Phi_{i1}(\lambda)\right]$, $k(\lambda)=\overline{k}_{ii}(\lambda)$, $\widehat{k}(\lambda)=\left[\overline{k}_{ii-1}(\lambda),\cdots,\overline{k}_{i1}(\lambda)\right]$, $x=\overline{x}_i$, $y=Y_i$, $\omega=\operatorname{col}[\overline{x}_{i-1},\dots,\overline{x}_1]$, $\overline{\omega}=\operatorname{col}[\overline{z}_{i-1},\dots,\overline{z}_1]$, $f=f^R_i$. В зависимости от того, какое из условий (4.3) или (4.8) выполняется, строим наблюдатель для формирования оценки $\overline{z}_i(t)$, $t>\overline{t}_i$, решения $\overline{x}_i(t)$, $t>\overline{t}_i$, системы (5.9), (5.10) при $j=i$ в соответствии с доказательством леммы 3 или леммы 4 (считая $z=\overline{z}_i$). Числа $\overline{t}_i\geqslant t_4+\max\left\{\overline{t}_\rho+\deg_\lambda\Phi_{i\rho}(\lambda),\ \overline{t}_\rho+\deg_\lambda\overline{k}_{i\rho}(\lambda),\ \rho=\overline{1,i-1}\right\}$ уточняются в процессе построения регулятора.

3. Полагаем $\overline{t}=t_3+\max\left\{\overline{t}_\rho+\deg_\lambda\Phi_{\theta+1\rho}(\lambda),\ \overline{t}_\rho+\deg_\lambda\overline{k}_{\theta+1\rho}(\lambda),\ \rho=\overline{1,\theta}\right\}$. В качестве оценки $\overline{z}_{\theta+1}$ уравнения (5.11) берем функцию

$$\overline{z}_{\theta+1}(t)=\int_{\overline{t}}^{t}\overline{F}_{\theta+1}(t-\tau)\left(\sum_{k=1}^{\theta-1}\Phi_{\theta+1\,k}(\lambda)\overline{z}_k(\tau)+f^R_{\theta+1}(\tau)\right)d\tau,\quad t>\overline{t},$$

где $\overline{F}_{\theta+1}(t)$ — матрица Коши уравнения (5.11).

Ввиду условия (2) леммы 5 система (5.11) является асимптотически устойчивой. Кроме того

$$\left\| \sum_{k=1}^{\theta} \Phi_{\theta+1\,k}(\lambda)\overline{z}_i(t) - \Xi_{\theta+1}(t) \right\|_{\mathbb{R}^{n_1-\delta}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поэтому $\|\overline{z}_{\theta+1}(t) - \overline{x}_{\theta+1}(t)\|_{\mathbb{R}^{n_1-\delta}} \to 0$ при $t \to +\infty$. Лемма доказана. □

Перейдем к формированию оценки z_1 решения x_1 системы (2.2), (2.3). Положим $\overline{z} = \operatorname{col}[\overline{z}_{\theta+1}, \ldots, \overline{z}_1]$, тогда $\|\overline{z}_1(t) - \overline{x}_1(t)\|_{\mathbb{R}^{n_1}} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Используя (5.4), (3.6) формируем оценки z_1, z_2 величин x_1, x_2 соответственно:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= R(\lambda_h)\overline{z}(t), \quad t > t_4, \\ z_2(t) &= M(\lambda_h)R(\lambda_h)\overline{z}(t) + H_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_5, \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $t_5 = t_4 + h \deg M(\lambda)$. Используя (5.4), (3.6) и (5.12) имеем

$$\begin{aligned} \|z_1(t) - x_1(t)\|_{\mathbb{R}^{n_2}} &= \|R(\lambda_h)\big(\overline{z}(t) - \overline{x}(t)\big)\|_{\mathbb{R}^{n_1}} \to 0, \\ \|z_2(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{R}^{n_2}} &= \|M(\lambda_h)\big(R(\lambda_h)\overline{z}(t) - x_1(t)\big)\|_{\mathbb{R}^{n_2}} = \\ &= \|M(\lambda_h)R(\lambda_h)\big(\overline{z}(t) - \overline{x}(t)\big)\|_{\mathbb{R}^{n_2}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Оценку $\widetilde{z}$ решения системы (1.1), (1.2) определим формулой

$$\widetilde{z}(t) = H\operatorname{col}[z_1(t), z_2(t)], \quad t > t_4. \tag{5.14}$$

Очевидно, что $\|\widetilde{z}(t) - \widetilde{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ при $t \to +\infty$.

§ 6. Реализация процедуры формирования оценки решения исходной системы

Пусть для системы (1.1), (1.2) выполняются условия теоремы 1. На основании предыдущего § 5 сформулируем процедуру формирования асимптотической оценки z решения x системы (1.1), (1.2).

Процедура 1.

(1) *Строим систему* (5.1).

(2) *Выбираем θ строк матрицы $K(\lambda)$, для которых выполняется* (5.2)*, строим матрицу $R(\lambda)$ и определяем матрицы $Q_R(\lambda)$, $K_R(\lambda)$.*

(3) *Формируем оценки $\overline{z}_i$, $i = \overline{1, \theta+1}$, решений систем* (5.9), (5.10) *и* (5.11) *согласно доказательству леммы* 5.

(4) *По формулам* (5.12) ($\overline{z} = \operatorname{col}[\overline{z}_{\theta+1}, \ldots, \overline{z}_1]$) *получаем оценки компонент x_1, x_2 решения системы* (2.2), (2.3).

(5) *Формируем окончательную оценку $\widetilde{z}$ решения $\widetilde{x}$ исходной системы* (1.1), (1.2) *по формуле* (5.14).

Теперь перейдем к вопросу реализуемости построенной процедуры. Определим множество

$$\Lambda_{(i_1,\ldots,i_\theta)} = \big\{\lambda^* \in \mathbb{C} \colon \operatorname{rank} L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda^*) < \delta\big\}.$$

Теорема 2. *Пусть для системы* (1.1), (1.2) *выполняются условия* (3.13)–(3.15). *Если найдется* θ $(1 \leqslant \theta \leqslant n_2 + r)$ *строк* $k_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1, \theta}$, *матрицы* $K(\lambda)$ *таких, что для соответствующей матрицы* $L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda)$ $(\operatorname{rank} L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda) = \delta$ *и имеет место* (5.2)) *выполняется условие*

$$\lambda^* = 0 \quad \textit{или} \quad |\lambda^*| > 1 \quad \forall\, \lambda^* \in \Lambda_{(i_1,\ldots,i_\theta)}, \tag{6.1}$$

то процедура 1 *реализуема, а оценку* $\widetilde{z}$ *решения* $\widetilde{x}$ *системы* (1.1), (1.2) *можно определить по формулам* (5.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (6.1) обеспечивают выполнение первого условия леммы 5 для всех систем (5.9), (5.10) (т. е. условия (4.8)). Действительно, предположим противное: существуют номер $j_0 \in \{1, \ldots, \theta\}$ и число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такие, что $\lambda_0 \neq 0$, $|\lambda_0| \leqslant 1$ и

$$\begin{vmatrix} \overline{k}_{j_0\, j_0}(\lambda_0) \\ \cdots \\ \overline{k}_{j_0\, j_0}(\lambda_0)\big(\Phi_{j_0\, j_0}(\lambda_0)\big)^{\delta_{j_0-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда число λ_0 является корнем по крайней мере одного из полиномов $\omega_{i\, n-i+1}(\lambda)$, $i = \overline{\delta_1 + \ldots + \delta_{j_0-1} + 1, \delta_1 + \ldots + \delta_{j_0}}$, матрицы $L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda)R(\lambda)$.

Значит, $\operatorname{rank} L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda_0)R(\lambda_0) < \delta$. В силу того, что матрица $R(\lambda)$ является унимодулярной, число λ_0 принадлежит $\Lambda_{(i_1,\ldots,i_\theta)}$. Пришли к противоречию.

Ввиду условий (5.7), (5.8) и структуры матриц в (5.3) уравнение

$$\big|pI_{n-\delta} - \Phi_{\theta+1\theta+1}(e^{-ph})\big| = 0$$

имеет конечное число корней p_i^*, для каждого из которых имеет место неравенство $\operatorname{Re} p_i^* <$ 0ю То есть выполняется второе условие леммы 5.

Согласно доказательству леммы 5 находим оценки $\overline{z}_j$, $j = \overline{1, \theta + 1}$, решений $\overline{x}_j$, $j = \overline{1, \theta + 1}$, систем (5.9), (5.10) и уравнения (5.11), после чего, следуя шагам (4), (5) процедуры 1, получаем оценку $\widetilde{z}$ решения $\widetilde{x}$ системы (1.1), (1.2). Теорема доказана. □

Условия теоремы 2 можно ослабить. По-прежнему считаем, что для системы (1.1), (1.2) выполняются условия теоремы 1. Обозначим (см. определение матриц $\Phi_{jj}(\lambda)$ и $k_{i_j}^N(\lambda)$ в формулах (5.3))

$$\nu_j(\lambda) = \gamma_{jj}(\lambda) \prod_{k=1}^{\delta_j - 1} \beta^j_{k+1\,k}(\lambda).$$

Очевидно, что если $\lambda_0 \in \Lambda_{(i_1,\ldots,i_\theta)}$, то существует по крайней мере один номер j_0, $j_0 \in \{1, \ldots, \theta\}$, такой, что $\nu_{j_0}(\lambda_0) = 0$.

Введем новое множество

$$\widehat{\Lambda}_{(i_1,\ldots,i_\theta)} = \big\{\lambda \in \Lambda_{(i_1,\ldots,i_\theta)} \colon (\lambda \neq 0) \wedge (|\lambda| \leqslant 1)\big\}.$$

Пусть $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_{(i_1,\ldots,i_\theta)}$. Представим число λ_0 в виде $\lambda_0 = e^{-p_0 h}$, $p_0 \in \mathbb{C}$. Отметим, что выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} W_Q(p_0, e^{-p_0 h}) \\ K(e^{-p_0 h}) \end{bmatrix} = n_1.$$

Действительно, если это не так, то $p_0 \in P_K^R$. Ввиду (5.8) будет $\operatorname{Re} p_0 < 0$, но это противоречит тому, что $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_{(i_1,\ldots,i_\theta)}$.

Каждому $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_{(i_1,\ldots,i_\theta)}$ поставим в соответствие множество индексов

$$\mathcal{S}(\lambda_0) = \big\{j \in \{1, \ldots, \theta\} \colon \nu_j(\lambda_0) = 0\big\}.$$

Используя леммы 3–5, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1.1), (1.2) *выполняются условия* (3.13), (3.14). *Предположим, что выбраны* θ $(1 \leqslant \theta \leqslant n_2 + r)$ *строк* $k_{i_j}(\lambda)$, $j = \overline{1, \theta}$, *матрицы* $K(\lambda)$, *построена матрица* $L_{(i_1,\ldots,i_\theta)}(\lambda)$ *и найдены матрицы* $Q_R(\lambda)$ *и* $K_R(\lambda)$ *вида* (5.3). *Если для любого числа* $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_{(i_1,\ldots,i_\theta)}$ *выполняются равенства*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} pI_{\delta_j} - \Phi_{jj}(e^{-ph}) \\ \overline{k}_{jj}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = \delta_j \quad \forall\, p \in \mathbb{C} \quad \forall\, j \in \mathcal{S}(\lambda_0),$$

то процедура 1 *реализуема, а оценку* $\widetilde{z}$ *решения* $\widetilde{x}$ *системы* (1.1), (1.2) *можно определить по формуле* (5.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется условие теоремы 3, то для всех систем (5.9), (5.10), для которых нарушается условие леммы 4, выполняется условие леммы 3. То есть имеют место условия леммы 5. Теорема доказана. □

Замечание 4. Если нарушаются условия теорем 2, 3, но имеет место (3.13) и выполняются условия леммы 5, то процедура 1 реализуема.

Заключение

В работе получены достаточные условия асимптотической наблюдаемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием. Для указанных систем, обладающих свойством асимптотической наблюдаемости, разработана процедура асимптотической оценки решения, получены достаточные условия ее реализуемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems // Kybernetika. 2001. Vol. 37. No. 4. P. 427–458. https://zbmath.org/1265.93108
2. Pourboghrat F., Chyung Dong Hak. Exact state-variable reconstruction of delay systems // International Journal of Control. 1986. Vol. 44. Issue 3. P. 867–877. https://doi.org/10.1080/00207178608933637
3. Emre E., Khargonekar P. Regulation of split linear systems over rings: Coefficient-assignment and observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. Vol. 27. Issue 1. P. 104–113. https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102815
4. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: A derivation from abstract operator conditions // SIAM Journal on Control and Optimization. 1978. Vol. 16. Issue 4. P. 599–645. https://doi.org/10.1137/0316041
5. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. Issue 6. P. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336
6. Метельский А. В. Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 70–83. https://doi.org/10.1134/S0374064115010070
7. Zaitsev V. A. Kim I. G., Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303
8. Зайцев В. А., Ким И. Г. Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 5–19. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-01
9. Ильин А. В., Буданова А. В., Фомичев В. В. Синтез наблюдателей для асимптотически наблюдаемых систем с запаздыванием // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448. № 4. С. 399–402. https://doi.org/10.7868/S0869565213040051

10. Хартовский В. Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716. https://doi.org/10.1134/S0374064119120112
11. Zheng Gang, Bejarano F. J. Observer design for linear singular time-delay systems // Automatica. 2017. Vol. 80. P. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.025
12. Ху Гуан-Да. Свойство разделения стабилизирующего контроллера на основе наблюдателя для линейных систем с запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 4. С. 936–947. https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.418
13. Hu Guang-Da. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems // Siberian Mathematical Journal. 2022. Vol. 63. Issue 4. P. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X
14. Brivadis L., Andrieu V., Serres U., Gauthier J.-P. Luenberger observers for infinite-dimensional systems, back and forth nudging, and application to a crystallization process // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59. Issue 2. P. 857–886. https://doi.org/10.1137/20M1329020
15. Rodrigues S. S. Oblique projection exponential dynamical observer for nonautonomous linear parabolic-like equations // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59. Issue 1. P. 464–488. https://doi.org/10.1137/19M1278934
16. Хартовский В. Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422. https://doi.org/10.1134/S0374064119030142
17. Хартовский В. Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022.
18. Метельский А. В., Хартовский В. Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102. https://doi.org/10.1134/S0005231019120055
19. Метельский А. В., Хартовский В. Е. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285. https://doi.org/10.31857/S0374064121020138
20. Хартовский В. Е. Критерии модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 514–529. https://doi.org/10.1134/S0374064118040088
21. Хартовский В. Е. О некоторых задачах управляемости и наблюдаемости для дифференциально-алгебраических систем с последействием // Труды Института математики. 2021. Т. 29. №№ 1–2. С. 126–137. https://www.mathnet.ru/rus/timb350

Поступила в редакцию 21.02.2023

Принята к публикации 28.04.2023

Хартовский Вадим Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Цитирование: В. Е. Хартовский. Оценка решения асимптотически наблюдаемых линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 2. С. 329–347.

V. E. Khartovskii

Estimation of the solution of asymptotically observable linear completely regular differential-algebraic systems with delay

Keywords: linear autonomous completely regular differential-algebraic system, delay, observed output signal, solution estimate, asymptotic observer.

MSC2020: 93C41, 34K34, 34K35

DOI: 10.35634/vm230210

In the article, a problem of solution estimation for linear autonomous completely regular differential-algebraic systems with many commensurate delays is investigated. The class of completely regular differential-algebraic systems with delay under study includes the classes of linear systems of delayed and neutral types; in addition, the analysis of continuous-discrete systems is reduced to completely regular systems.

For linear autonomous completely regular differential-algebraic systems with many commensurate delays, the property of asymptotic observability is determined, which are characterized by the fact that all solutions generating the same output signal are indistinguishable in the future. Conditions for asymptotic observability expressed in terms of the parameters of the original system are formulated and proved. For asymptotically observable systems, a solution estimation procedure is proposed, the implementation of which consists of the following steps. First, using the observed output, a linear autonomous non-homogeneous asymptotically observable retarded type system with a non-homogeneous part depending on the output is put in correspondence with the original system. The solution of the new system uniquely determines the solution of the original system. Then a transformation is constructed that reduces the matrices of the retarded type system to a certain form. After that, with the help of a finite chain of observers, the solution is evaluated. The results of the presented study are applicable to systems that do not have the property of final observability, which makes it possible to significantly reduce the requirements for observing organs when modeling the corresponding objects of the real world.

REFERENCES

1. Sename O. New trends in design of observers for time-delay systems, *Kybernetika*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 427–458. https://zbmath.org/1265.93108
2. Pourboghrat F., Chyung Dong Hak. Exact state-variable reconstruction of delay systems, *International Journal of Control*, 1986, vol. 44, issue 3, pp. 867–877. https://doi.org/10.1080/00207178608933637
3. Emre E., Khargonekar P. Regulation of split linear systems over rings: Coefficient-assignment and observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, vol. 27, issue 1, pp. 104–113. https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102815
4. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: A derivation from abstract operator conditions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1978, vol. 16, issue 4, pp. 599–645. https://doi.org/10.1137/0316041
5. Watanabe K. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, issue 6, pp. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336
6. Metel'skii A. V. Finite spectrum assignment problem for a differential system of neutral type, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 69–82. https://doi.org/10.1134/S0012266115010073
7. Zaitsev V. A., Kim I. G., Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303
8. Zaitsev V. A., Kim I. G. Spectrum assignment in linear systems with several commensurate lumped and distributed delays in state by means of static output feedback, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 5–19. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-01

9. Il'in A. V., Budanova A. V., Fomichev V. V. Synthesis of observers for asymptotically observable time delay systems, *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 129–132. https://doi.org/10.1134/S1064562413010249
10. Khartovskii V. E. Asymptotic estimates of solutions of linear time-invariant systems of the neutral type with commensurable delays, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 12, pp. 1649–1664. https://doi.org/10.1134/S0012266119120115
11. Zheng Gang, Bejarano F. J. Observer design for linear singular time-delay systems, *Automatica*, 2017, vol. 80, pp. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.025
12. Hu Guang-Da. A separation property of the observer-based stabilizing controller for linear delay systems, *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, issue 4, pp. 763–772. https://doi.org/10.1134/S0037446621040182
13. Hu Guang-Da. An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems, *Siberian Mathematical Journal*, 2022, vol. 63, issue 4, pp. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X
14. Brivadis L., Andrieu V., Serres U., Gauthier J.-P. Luenberger observers for infinite-dimensional systems, back and forth nudging, and application to a crystallization process, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, issue 2, pp. 857–886. https://doi.org/10.1137/20M1329020
15. Rodrigues S. S. Oblique projection exponential dynamical observer for nonautonomous linear parabolic-like equations, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2021, vol. 59, issue 1, pp. 464–488. https://doi.org/10.1137/19M1278934
16. Khartovskii V. E. Synthesis of observers for linear systems of neutral type, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, issue 3, pp. 404–417. https://doi.org/10.1134/S0012266119030133
17. Khartovskii V. E. *Upravlenie lineinymi sistemami neitral'nogo tipa: kachestvennyi analiz i realizatsiya obratnykh svyazei* (Control of linear systems of neutral type: qualitative analysis and implementation of feedback), Grodno: Yanka Kupala State University of Grodno, 2022.
18. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Finite observer design for linear systems of neutral type, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, issue 12, pp. 2152–2169. https://doi.org/10.1134/S0005117919120051
19. Metel'skii A. V., Khartovskii V. E. Exact reconstruction of the solution for linear neutral type systems, *Differential Equations*, 2021, vol. 57, issue 2, pp. 251–271. https://doi.org/10.1134/S0012266121020130
20. Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, issue 4, pp. 509–524. https://doi.org/10.1134/S0012266118040080
21. Khartovskii V. E. On some problems of controllability and observability for differential-algebraic systems with aftereffect, *Trudy Instituta Matematiki*, 2021, vol. 29, nos. 1–2, pp. 126–137 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/timb350

Received 21.02.2023

Accepted 28.04.2023

Vadim Evgen'evich Khartovskii, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Logistics and Methods of Control, Y. Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Citation: V. E. Khartovskii. Estimation of the solution of asymptotically observable linear completely regular differential-algebraic systems with delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 2, pp. 329–347.