МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 248–266.

УДК 517.957

© *У. А. Хоитметов, Ш. К. Собиров*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МКДФ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ И С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Работа посвящена интегрированию модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с зависящими от времени коэффициентами, дополнительным членом и интегральным источником в классе быстроубывающих функций с использованием метода обратной задачи рассеяния. В данной работе рассматривается случай, когда оператор Дирака, входящий в пары Лакса, не является самосопряженным, поэтому собственные значения оператора Дирака могут быть кратными. Получена эволюция данных рассеяния для несамосопряженного оператора Дирака, потенциал которого представляет собой решение модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с зависящими от времени коэффициентами, с дополнительным членом и с интегральным источником класса быстроубывающих функций. Приведен пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Ключевые слова: несамосопряженный оператор Дирака, решения Йоста, данные рассеяния, пары Лакса.

DOI: 10.35634/vm240205

Введение

Модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ) [1]

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

описывающее нелинейное распространение волн в системах с полярной симметрией, является одной из наиболее известных моделей, допускающих существование солитонов в решении. Привлекательной чертой теории солитонов является тесная связь между физикой и математикой. Теория солитонов и интегрирование различных нелинейных эволюционных уравнений обсуждаются во многих монографиях и статьях. Важные понятия теории солитонов и информация, необходимая для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений, представлены в работах [2, 3]. Задача интегрирования уравнения Кортевега–де Фриза, считающегося нелинейным эволюционным уравнением, с использованием метода обратной задачи рассеяния впервые рассматривалась в работах Гарднера, Грина, Краскала и Миуры [4]. В работах [5, 6] изучается интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с разными источниками в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. Аналогичные результаты для общего уравнения Кортевега–де Фриза получены в работах [7, 8]. В работах [9, 10] показана применимость метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения мКдФ-синус-Гордона с дополнительными членами. В работах [11, 12] решена задача Коши для уравнения мКдФ с коэффициентами, зависящими от времени и источниками в классе быстроубывающих функций. В работе [13] показана разрешимость задачи Коши для уравнения мКдФ с источником в классе функций конечной плотности. В работах [14–16] рассмотрены интегрируемость конечной решетки Тоды и уравнения Каупа–Буссинеска, а в работе [17] показана интегрирумость дифференциально-разностного уравнения синус-Гордона с источником интегрального типа.

Уравнение мКдФ используется в научных приложениях таких, как тонкие упругие стержни [18], ангармонические решетки [19], альфвеновские волны [20] и т. д. Кроме того, некоторые авторы подробно изучали более обширную форму уравнения мКдФ, например, спаренное уравнение мКдФ [21], матричную форму [22] и т. д.

Исследование интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений с переменными коэффициентами развивается, поскольку эти уравнения позволяют моделировать различные сложные нелинейные явления. Интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с переменными коэффициентами более реалистичны, чем их аналоги с постоянными коэффициентами. Поэтому важно разработать новые интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с переменными коэффициентами и исследовать полную интегрируемость таких разработанных моделей. В работах [23–25] исследованы уравнения мКдФ с переменными коэффициентами.

§ 1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается следующая система интегро-дифференциальных уравнений

$$u_t + \alpha(t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + \beta(t)u_x = i\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(\phi_1^2(x,\eta,t) - \phi_2^2(x,\eta,t)\bigr)\,d\eta, \tag{1.1}$$
$$L(t)\phi(x,\eta,t) = \eta\phi(x,\eta,t), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $L(t) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -\dfrac{d}{dx}\end{pmatrix}$ и коэффициенты $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции. Мы будем исследовать систему уравнений (1.1) при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

При этом начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(1+|x|\bigr)\bigl|u_0(x)\bigr|\,dx < \infty; \tag{1.3}$$

(2) оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\dfrac{d}{dx}\end{pmatrix}$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \ldots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0)$, $m_2(0), \ldots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Вектор-функция $\phi = \bigl(\phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t)\bigr)^T$ обладает следующим асимптотическим видом

$$\phi(x,\eta,t) \to h(\eta,t)\begin{pmatrix}\exp(-i\eta x)\\ \exp(i\eta x)\end{pmatrix}, \quad x \to \infty, \tag{1.4}$$

где $h(\eta,t)$ — некоторая заданная непрерывная функция, которая удовлетворяет условиям

$$h(-\eta,t) = h(\eta,t), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\bigl|h(\eta,t)\bigr|^2\,d\eta < \infty, \quad t \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\bigl(1+|x|\bigr)\bigl|u(x,t)\bigr| + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty, \quad k = 1,2,3. \tag{1.6}$$

Основная цель данной работы — получить представления для решения задачи (1.1)–(1.6) $\bigl\{u(x,t), \phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t)\bigr\}$ в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

§ 2. Необходимые сведения

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi v_1 = u_0(x) v_2, \\ v_{2x} - i\xi v_2 = -u_0(x) v_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

на всей оси ($-\infty < x < \infty$) с потенциалом $u_0(x)$, удовлетворяющим условию (1.3). Видно, что с помощью оператора $L(0)$ и вектор-функций $\nu = (\nu_1, \nu_2)^T$ систему (2.1) можно переписать в виде

$$L(0)\nu = \xi\nu.$$

Система уравнений (2.1) для действительных ξ имеет решения Йоста со следующими асимптотиками

$$\begin{cases} \varphi(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, \\ \widetilde{\varphi}(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x}, \end{cases} \quad x \to -\infty; \qquad \begin{cases} \psi(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x}, \\ \widetilde{\psi}(x,\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}, \end{cases} \quad x \to \infty. \tag{2.2}$$

При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi, \widetilde{\varphi}\}$ и $\{\psi, \widetilde{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (2.1). Поэтому имеют место следующие соотношения

$$\begin{cases} \varphi = a(\xi)\widetilde{\psi} + b(\xi)\psi, \\ \widetilde{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\widetilde{\psi}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi = -a(\xi)\widetilde{\varphi} + \bar{b}(\xi)\varphi, \\ \widetilde{\psi} = \bar{a}(\xi)\varphi + b(\xi)\widetilde{\varphi}, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $a(\xi) = W\{\varphi, \psi\}$, $b(\xi) = W\{\widetilde{\varphi}, \psi\}$. Верны следующие равенства

$$\bigl|a(\xi)\bigr|^2 + \bigl|b(\xi)\bigr|^2 = 1, \quad \bar{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \bar{b}(\xi) = b(-\xi).$$

Коэффициенты $a(\xi)$ и $b(\xi)$ непрерывны при $\xi \in \mathbb{R}$ и удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам:

$$a(\xi) = 1 + O\bigl(|\xi|^{-1}\bigr), \quad b(\xi) = O\bigl(|\xi|^{-1}\bigr), \quad |\xi| \to \infty.$$

Невещественные нули $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ функции $a(\xi)$ являются собственными значениями оператора $L(0)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\xi > 0$. Собственные значения оператора $L(0)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\xi < 0$ совпадают с нулями функции $\bar{a}(\xi)$. Итак, множество $\{\xi_k, -\xi_k\}_{k=1}^N$ является собственными значениями оператора $L(0)$, и других собственных значений этот оператор не имеет. Требование отсутствия спектральных особенностей оператора $L(0)$ означает отсутствие действительных нулей у функции $a(\xi)$, то есть $a(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Определение 2.1. Функции $\overset{(s)}{\varphi}(x,\xi_k) \equiv \dfrac{\partial^s}{\partial\xi^s}\varphi(x,\xi)\Big|_{\xi=\xi_k}$, $s = \overline{1,m_k-1}$, называются *присоединенными функциями к собственной функции* $\varphi(x,\xi_k)$.

Собственные и присоединенные функции удовлетворяют уравнениям

$$L\overset{(s)}{\varphi}(x,\xi_k) = \xi_k \overset{(s)}{\varphi}(x,\xi_k) + s\overset{(s-1)}{\varphi}(x,\xi_k), \qquad \overset{(0)}{\varphi}(x,\xi_k) \equiv \varphi(x,\xi_k), \quad k=\overline{1,N}, \quad s=\overline{0,m_k-1}.$$

Существует цепочка чисел $\{\chi_0^k,\chi_1^k,\dots,\chi_{m_k-1}^k\}$, называемая нормирующей цепочкой чисел, для которой справедливы следующие соотношения

$$\overset{(l)}{\varphi}(x,\xi_k) = \sum_{\nu=0}^{l}\chi_{l-\nu}^k \frac{l!}{\nu!}\overset{(\nu)}{\psi}(x,\xi_k), \quad k=\overline{1,N}, \quad l=\overline{0,m_k-1}. \tag{2.4}$$

Для функции $\psi(x,\xi)$ справедливо (см. [26, с. 33]) следующее интегральное представление

$$\psi(x,\xi) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi x} + \int_x^\infty \mathbf{K}(x,s)e^{i\xi s}\,ds, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{K}(x,s) = \big(K_1(x,s),K_2(x,s)\big)^T$. В представлении (2.5) ядро $\mathbf{K}(x,s)$ не зависит от ξ и имеет место равенство

$$u(x) = -2K_1(x,x). \tag{2.6}$$

Компоненты ядра $\mathbf{K}(x,y)$ при $y>x$ являются решениями системы интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K_2(x,y) + \int_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)\,ds = 0,$$
$$-K_1(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)\,ds = 0,$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi - i\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_k-1}\chi_{m_k-\nu-1}^k\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[\frac{(z-\xi_k)^{m_k}}{a(z)}e^{izx}\right]\Bigg|_{z=\xi_k},$$

$r^+(\xi) \equiv \dfrac{b(\xi)}{a(\xi)}$, $a(z)$ — аналитическое продолжение функции $a(\xi)$ ($\operatorname{Im}\xi = 0$) в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, которое определяется по формуле

$$a(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\Big(1+\big|r^+(\xi)\big|\Big)}{\xi - z}\,d\xi\right\}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\xi-\xi_j}{\xi-\bar{\xi}_j}\right)^{m_j}.$$

Теперь потенциал $u(x)$ определяется из равенства (2.6).

Определение 2.2. Набор величин

$$\left\{r^+(\xi),\ \xi\in\mathbb{R}; \quad \xi_k\ (\operatorname{Im}\xi_k>0), \quad \chi_j^k, \quad k=\overline{1,N},\ j=\overline{0,m_k-1}\right\}$$

называется *данными рассеяния для системы* (2.1).

Справедлива следующая теорема (см. [27, § 6.2]).

Теорема 2.1. *Данные рассеяния оператора L однозначно определяют L.*

В дальнейшем мы часто будем пользоваться результатами следующих лемм.

Лемма 2.1. *Если вектор-функции $Y = \big(y_1(x,\xi), y_2(x,\xi)\big)^T$ и $Z = \big(z_1(x,\eta), z_2(x,\eta)\big)^T$ являются решениями уравнений $LY = \xi Y$ и $LZ = \eta Z$ соответственно, то для их компонент выполняются равенства*

$$\frac{d}{dx}(y_1z_1 + y_2z_2) = -i(\xi+\eta)(y_1z_1 - y_2z_2), \qquad \frac{d}{dx}(y_1z_2 - y_2z_1) = -i(\xi-\eta)(y_1z_2 + y_2z_1).$$

Лемма 2.2. *Пусть вектор-функции $\varphi(x,\xi)$, $f_k^s(x,t)$, $s = \overline{0, m_k-1}$, являются решениями следующих уравнений*

$$L(t)\varphi = \xi\varphi, \quad L(t)f_k^s = \xi_k f_k^s + s f_k^{s-1}, \quad s = \overline{0, m_k-1}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}(f_{k1}^s\varphi_2 - f_{k2}^s\varphi_1) = i(\xi-\xi_k)(f_{k1}^s\varphi_2 + f_{k2}^s\varphi_1) - is(f_{k1}^{s-1}\varphi_2 + f_{k2}^{s-1}\varphi_1),\\ \frac{d}{dx}(f_{k1}^s\varphi_1 + f_{k2}^s\varphi_2) = -i(\xi+\xi_k)(f_{k1}^s\varphi_1 - f_{k2}^s\varphi_2) - is(f_{k1}^{s-1}\varphi_1 - f_{k2}^{s-1}\varphi_2),\\ s = \overline{0, m_k-1}.\end{gathered}$$

Эти леммы доказываются путем непосредственной проверки.

При выполнении условий леммы 2.2 справедливы следующие равенства

$$f_{k1}^s\varphi_1 - f_{k2}^s\varphi_2 = i\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^l}{(\xi+\xi_k)^{l+1}}\frac{s!}{(s-l)!}\frac{d}{dx}V\{f_k^{s-l},\varphi\}, \tag{2.7}$$

а при $\xi \neq \xi_k$

$$f_{k1}^s\varphi_2 + f_{k2}^s\varphi_1 = i\sum_{l=0}^{s}\frac{(-1)^l}{(\xi_k-\xi)^{l+1}}\frac{s!}{(s-l)!}\frac{d}{dx}W\{f_k^{s-l},\varphi\}, \quad s = \overline{0, m_k-1}, \tag{2.8}$$

где $V\{f,g\} \equiv f_1g_1 + f_2g_2$.

Следующее утверждение также можно доказать непосредственной проверкой.

Лемма 2.3. *Если $\varphi_k = (\varphi_{k1}, \varphi_{k2})^T$ — собственная вектор-функция оператора L с потенциалом $u(x)$, соответствующая собственному значению ξ_k, то справедливы равенства*

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} u(\varphi_{k1}^2 - \varphi_{k2}^2)\,dx = 0, \qquad &&\int_{-\infty}^{\infty} u_x(\varphi_{k1}^2 + \varphi_{k2}^2)\,dx = 0,\\ &\int_{-\infty}^{\infty} u^3(\varphi_{k1}^2 - \varphi_{k2}^2)\,dx = 0, \qquad &&\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(\varphi_{k1}^2 - \varphi_{k2}^2)\,dx = 0.\end{aligned}$$

§ 3. Эволюция данных рассеяния

Пусть потенциал $u(x,t)$ в системе уравнений $LY = \xi Y$ является решением следующего уравнения:

$$u_t + \alpha(t)(u_{xxx} + 6u^2u_x) = G(x,t), \tag{3.1}$$

где $G(x,t) = -\beta(t)u_x(x,t) + i\gamma(t)\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\phi_1^2 - \phi_2^2)\,d\eta$.

Операторы L и

$$A = \alpha(t)\begin{pmatrix} -4i\xi^3 + 2iu^2\xi & 4u\xi^2 + 2iu_x\xi - 2u^3 - u_{xx} \\ -4u\xi^2 + 2iu_x\xi + 2u^3 + u_{xx} & 4i\xi^3 - 2iu^2\xi \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

удовлетворяют соотношению Лакса

$$[L, A] \equiv LA - AL = i\alpha(t)\begin{pmatrix} 0 & -6u^2u_x - u_{xxx} \\ -6u^2u_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Поэтому уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$L_t + [L, A] = iR, \tag{3.4}$$

где $R = \begin{pmatrix} 0 & -G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$.

Дифференцируя равенство $L\varphi = \xi\varphi$ относительно t, учитывая (3.4), имеем

$$(L - \xi)(\varphi_t - A\varphi) = -iR\varphi.$$

Используя метод вариации постоянных, можно записать

$$\varphi_t - A\varphi = B(x)\psi + D(x)\varphi. \tag{3.5}$$

Тогда для определения $B(x)$ и $D(x)$ получаем

$$MB_x\psi + MD_x\varphi = -R\varphi, \tag{3.6}$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для решения уравнения (3.6) вводим следующие обозначения $\widehat{\varphi} = (\varphi_2, \varphi_1)^T$, $\widehat{\psi} = (\psi_2, \psi_1)^T$. Согласно (3.3) и определению вронскиана справедливы следующие равенства:

$$\widehat{\psi}^T M\varphi = -\widehat{\varphi}^T M\psi = a, \qquad \widehat{\psi}^T M\psi = \widehat{\varphi}^T M\varphi = 0.$$

Умножая (3.6) на $\widehat{\varphi}^T$ и $\widehat{\psi}^T$, получаем

$$B_x = \frac{\widehat{\varphi}^T R\varphi}{a}, \quad D_x = -\frac{\widehat{\psi}^T R\varphi}{a}.$$

Согласно (3.2), при $x \to -\infty$ имеем

$$\varphi_t - A\varphi \to \begin{pmatrix} 4i\xi^3\alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x}.$$

Поэтому на основании (3.5) при $x \to -\infty$, имеем

$$D(x) \to 4i\xi^3\alpha(t), \qquad B(x) \to 0.$$

Следовательно, из (3.6) можно определить

$$D(x) = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} \widehat{\psi}^T R\varphi\, dx + 4i\xi^3\alpha(t), \qquad B(x) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} \widehat{\varphi}^T R\varphi\, dx.$$

Таким образом, равенство (3.5) имеет следующий вид

$$\varphi_t - A\varphi = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} \widehat{\varphi}^T R\varphi\, dx\psi + \left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} \widehat{\psi}^T R\varphi\, dx + 4i\xi^3\alpha(t)\right)\varphi. \tag{3.7}$$

Согласно (2.3), равенство (3.7) можно переписать в следующем виде

$$a_t\widetilde{\psi}+b_t\psi-A(a\widetilde{\psi}+b\psi)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}\widehat{\varphi}^T R\varphi\,dx\psi+\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}\widehat{\psi}^T R\varphi\,dx+4i\xi^3\alpha(t)\right)(a\widetilde{\psi}+b\psi).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $x\to+\infty$ и учитывая (3.2), мы можем вывести следующие равенства

$$a_t=-\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^T R\varphi\,dx,\qquad b_t=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}^T R\varphi\,dx-\frac{b}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}^T R\varphi\,dx+8i\xi^3\alpha(t)b.$$

Следовательно, при $\operatorname{Im}\xi=0$ имеем

$$\frac{dr^+}{dt}=8i\xi^3\alpha(t)r^+-\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}G(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\,dx. \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. *Если вектор-функция $\varphi(x,\xi)$ является решением уравнения* (2.1)*, то ее компоненты удовлетворяют следующему равенству*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\,dx=2a(\xi)b(\xi)\left(i\xi\beta(t)-\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma(t)h^2(\eta,t)}{\eta+\xi}\,d\eta+i\pi\gamma(t)h^2(\xi,t)\right). \tag{3.9}$$

Здесь v. p. — *интеграл в смысле главного значения.*

Доказательство. Вычислим следующий интеграл, используя формулы (2.1), (2.2) и (2.3):

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\beta(t)u_x(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\,dx=-\beta(t)\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\,du=$$
$$=-\beta(t)u(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\beta(t)\int_{-\infty}^{\infty}u(\varphi_1^2+\varphi_2^2)'\,dx=2i\xi\beta(t)a(\xi)b(\xi).$$

Таким образом, мы получили следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\beta(t)u_x(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\,dx=-2i\xi\beta(t)a(\xi)b(\xi). \tag{3.10}$$

В дальнейшем для упрощения записи, если это не существенно, зависимость функций от t не будем писать.

Согласно лемме 2.1 имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\big)\big(\varphi_1^2(x,\xi)+\varphi_2^2(x,\xi)\big)\,dx=\frac{i}{2}\times$$
$$\times\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_1(x,\xi)+\phi_2(x,\eta)\varphi_2(x,\xi)\big)^2}{\eta+\xi}+\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_2(x,\xi)-\phi_2(x,\eta)\varphi_1(x,\xi)\big)^2}{\eta-\xi}\right)\Bigg|_{-R}^{R}.$$

В силу (1.4) $\phi(x,\eta,t)=h(\eta,t)\big(\widetilde{\psi}(x,\eta,t)+\psi(x,\eta,t)\big)$, поэтому, используя асимптотики для $\varphi(x,\xi,t)$ и формулы Сохоцкого [28], находим

$$\begin{aligned}\gamma(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\big)\big(\varphi_1^2(x,\xi)+\varphi_2^2(x,\xi)\big)\,dx\,d\eta=\\=2a(\xi)b(\xi)\gamma(t)\left(i\pi h^2(\xi,t)-\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2(\eta,t)}{\xi+\eta}\,d\eta\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Согласно равенствам (3.10) и (3.11), получаем формулу (3.9). □

Используя равенства (3.8) и (3.9), имеем

$$\begin{gathered}\frac{dr^+}{dt} = \big(8i\xi^3\alpha(t) - 2i\xi\beta(t)\big)r^+ + \\ + \left(-2i\pi h^2(\xi,t)\gamma(t) + \text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\gamma(t)h^2(\eta,t)}{\eta+\xi}\,d\eta\right) \quad (\operatorname{Im}\xi = 0).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Лемма 3.2. *Если система функций* $\{u(x,t), \varphi_1(\eta,x,t), \varphi_2(\eta,x,t)\}$ *является решением задачи* (1.1)–(1.6)*, то собственные значения оператора* $L(t)$ *с потенциалом* $u(x,t)$ *не зависят от* t*:*

$$m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть ξ_k — собственное значение оператора $L(t)$ кратности m_k с собственной вектор-функцией $\varphi_k = (\varphi_{k1}, \varphi_{k2})^T$. Предположим, что собственное значение ξ_k простое, то есть $m_k = 1$. Продифференцировав по t равенство

$$L\varphi_k = \xi_k\varphi_k,$$

имеем

$$\frac{\partial L}{\partial t}\varphi_k + L\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} = \frac{d\xi_k}{dt}\varphi_k + \xi_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}. \tag{3.14}$$

Подставляя L_t из (3.4) в (3.14), получаем

$$(L-\xi_k)\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} - A\varphi_k\right) = \frac{d\xi_k}{dt}\varphi_k - iR\varphi_k. \tag{3.15}$$

Умножая обе части равенства (3.15) слева на $\widehat{\varphi}_k^T \equiv (\varphi_{k2}, \varphi_{k1})$, проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞. Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}_k^T(L-\xi_k)\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} - A\varphi_k\right)dx = 0,$$

получим

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}(G\varphi_{k1}^2 + G\varphi_{k2}^2)\,dx\right)\left(2i\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{k1}\varphi_{k2}\,dx\right)^{-1}, \quad k = \overline{1,N}.$$

С другой стороны, согласно лемме 2.1

$$\begin{gathered}i\gamma(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\phi_1^2 - \phi_2^2)(\varphi_{k1}^2 + \varphi_{k2}^2)\,d\eta\,dx = \\ = -\frac{\gamma(t)}{2}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_{k1} + \phi_2(x,\eta)\varphi_{k2}\big)^2}{\eta+\xi_k} + \frac{\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_{k2} - \phi_2(x,\eta)\varphi_{k1}\big)^2}{\eta-\xi_k}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = 0.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Теперь вычислим следующий интеграл

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(t)u_x(\varphi_{k1}^2 + \varphi_{k2}^2)\,dx = \beta(t)u(x,t)(\varphi_{k1}^2 + \varphi_{k2}^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ + 2\beta(t)\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)(\varphi_{k1}\varphi_{k1}' + \varphi_{k2}\varphi_{k2}')\,dx = \\ = \beta(t)u(x,t)(\varphi_{k1}^2 + \varphi_{k2}^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2i\xi_k\beta(t)\varphi_{k1}\varphi_{k2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.\end{gathered}$$

Согласно равенству (3.16) и последнему соотношению, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\varphi_{k1}^2+\varphi_{k2}^2)\,dx=0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi_k}{dt}=0.$$

При $m_k\neq 1$ это доказательство не работает, поскольку равенство

$$\left.\frac{da(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_k}=-\frac{2i}{\chi_0^k}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{k1}\varphi_{k2}\,dx,$$

подразумевает

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{k1}\varphi_{k2}\,dx=0. \tag{3.17}$$

В этом случае, дифференцируя по t равенство

$$L\overset{(1)}{\varphi_k}=\xi_k\overset{(1)}{\varphi_k}+\varphi_k$$

относительно t, получаем

$$(L-\xi_k)\left(\frac{\partial}{\partial t}\overset{(1)}{\varphi_k}-A\overset{(1)}{\varphi_k}\right)-\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}+A\varphi_k=\frac{d\xi_k}{dt}\overset{(1)}{\varphi_k}-iR\overset{(1)}{\varphi_k}. \tag{3.18}$$

Умножим обе части равенства (3.18) слева на $\widehat{\varphi}_k^T$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}_k^T\left((L-\xi_k)\left(\frac{\partial\overset{(1)}{\varphi_k}}{\partial t}-A\overset{(1)}{\varphi_k}\right)-\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}+A\varphi_k\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}_k^T\left(\frac{d\xi_k}{dt}\overset{(1)}{\varphi_k}-iR\overset{(1)}{\varphi_k}\right)dx. \tag{3.19}$$

Дифференцируя равенство (3.17) по t, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}_k^T\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\,dx=0.$$

Согласно определению оператора A и лемме 2.3, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}_k^T A\varphi_k\,dx=0.$$

Таким образом, левая часть равенства (3.19) равна нулю, следовательно

$$\frac{d\xi_k}{dt}=\left(i\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\overset{(1)}{\varphi_{k1}}\varphi_{k1}+\varphi_{k2}\overset{(1)}{\varphi_{k2}}\right)dx\right)\left(2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overset{(1)}{\varphi_{k1}}\varphi_{k2}+\varphi_{k1}\overset{(1)}{\varphi_{k2}}\right)dx\right)^{-1}.$$

Согласно лемме 2.1 и формул (2.7) и (2.8)

$$i\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta))\left(\overset{(1)}{\varphi_{k1}}\varphi_{k1}+\overset{(1)}{\varphi_{k2}}\varphi_{k2}\right)dx=-\frac{\gamma(t)}{2}\times$$

$$\times\lim_{R\to\infty}\left.\left(\frac{V\{\phi,\overset{(1)}{\varphi_k}\}V\{\phi,\varphi_k\}}{\eta+\xi_k}-\frac{\left(V\{\phi,\varphi_k\}\right)^2}{2(\eta+\xi_k)^2}+\frac{W\{\phi,\overset{(1)}{\varphi_k}\}W\{\phi,\varphi_k\}}{\eta-\xi_k}-\frac{\left(W\{\phi,\varphi_k\}\right)^2}{2(\eta-\xi_k)^2}\right)\right|_{-R}^{R}=0.$$

Теперь вычислим следующий интеграл:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(t)u_x\Big(\overset{(1)}{\varphi}_{k1}\varphi_{k1}+\overset{(1)}{\varphi}_{k2}\varphi_{k2}\Big)\,dx=-\beta(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\overset{(1)}{\varphi}_{k1}\varphi_{k1}+\overset{(1)}{\varphi}_{k2}\varphi_{k2}\Big)\,du=$$
$$=\beta(t)\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\Big(\overset{(1)}{\varphi}_{k1x}\varphi_{k1}+\overset{(1)}{\varphi}_{k1}\varphi_{k1x}+\overset{(1)}{\varphi}_{k2x}\varphi_{k2}+\overset{(1)}{\varphi}_{k2}\varphi_{k2x}\Big)\,dx=$$
$$=\beta(t)\Big(i\xi_k\overset{(1)}{\varphi}_{k1}\varphi_{k2}+i\xi_k\overset{(1)}{\varphi}_{k2}\varphi_{k1}+i\varphi_{k1}\varphi_{k2}\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi_k}{dt}=0. \qquad \square$$

Перепишем равенство (3.7) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-A\varphi=\frac{1}{a(\xi)}\Big[\int_{-\infty}^{x}G\big(\psi_1(x,\xi)\varphi_1(x,\xi)+\psi_2(x,\xi)\varphi_2(x,\xi)\big)\,dx\Big]\varphi(x,\xi)-\\ -\frac{1}{a(\xi)}\Big[\int_{-\infty}^{x}G\big(\varphi_1^2(x,\xi)+\varphi_2^2(x,\xi)\big)\,dx\Big]\psi(x,\xi)+4i\xi^3\alpha(t)\varphi(x,\xi).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Используя лемму 2.1 и асимптотику для φ, ϕ, имеем

$$i\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\big(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\big)\big(\varphi_1(x,\xi)\psi_1(x,\xi)+\varphi_2(x,\xi)\psi_2(x,\xi)\big)\,dx\,d\eta=$$
$$=-\frac{\gamma(t)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\psi_1(x,\xi)+\phi_2(x,\eta)\psi_2(x,\xi)\big)\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_1(x,\xi)+\phi_2(x,\eta)\varphi_2(x,\xi)\big)}{\eta+\xi}\,d\eta=$$
$$-\frac{\gamma(t)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\psi_2(x,\xi)-\phi_2(x,\eta)\psi_1(x,\xi)\big)\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_2(x,\xi)-\phi_2(x,\eta)\varphi_1(x,\xi)\big)}{\eta-\xi}\,d\eta+$$
$$+\gamma(t)a(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h^2(\eta,t)\big(a(\eta)\bar a(\eta)-b(\eta)\bar b(\eta)\big)}{\eta+\xi}\,d\eta.$$

Следовательно,

$$i\gamma(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}\big(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\big)\big(\varphi_1^2(x,\xi)+\varphi_2^2(x,\xi)\big)\,dx\,d\eta=$$
$$=-\frac{\gamma(t)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_1(x,\xi)+\phi_2(x,\eta)\varphi_2(x,\xi)\big)^2}{\eta+\xi}\,d\eta-$$
$$-\frac{\gamma(t)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big(\phi_1(x,\eta)\varphi_2(x,\xi)-\phi_2(x,\eta)\varphi_1(x,\xi)\big)^2}{\eta-\xi}\,d\eta.$$

На основании двух последних равенств и леммы 2.1 имеем следующее равенство

$$\begin{aligned}i\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\big(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\big)\big(\varphi_1(x,\xi)\psi_1(x,\xi)+\varphi_2(x,\xi)\psi_2(x,\xi)\big)\,dx\,d\eta\,\varphi(x,\xi)=\\ =-i\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}\big(\phi_1^2(x,\eta)-\phi_2^2(x,\eta)\big)\big(\varphi_1^2(x,\xi)+\varphi_2^2(x,\xi)\big)\,dx\,d\eta\,\psi(x,\xi)=\\ =-\frac{\gamma(t)}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(x,\eta,t)}{\eta+\xi}d\eta a(\xi)\varphi(x,\xi)+\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2(\eta,t)\big(a(\eta)\bar a(\eta)-b(\eta)\bar b(\eta)\big)}{\eta+\xi}d\eta a(\xi)\varphi(x,\xi),\end{aligned}\tag{3.21}$$

где $C(x,\eta,t)$ — следующая матрица

$$C = \begin{pmatrix} \phi_1(x,\eta)\phi_2(x,\eta) + \phi_1(x,-\eta)\phi_2(x,-\eta) & \phi_2^2(x,\eta) - \phi_1^2(x,-\eta) \\ -\phi_1^2(x,\eta) + \phi_2^2(x,-\eta) & -\phi_1(x,\eta)\phi_2(x,\eta) - \phi_1(x,-\eta)\phi_2(x,-\eta) \end{pmatrix}.$$

Из (1.4) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} C(x,\eta,t) = 2h^2(\eta,t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (1.6), (2.1), (2.2) и (2.3), вычислим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} u_x(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2)\,dx = u(x,t)(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) - \int_{-\infty}^{x} (\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)'\,dx = \\ = u(x,t)(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2) + 2i\xi\varphi_2\psi_1.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Точно так же показывается справедливость следующего равенства

$$\int_{-\infty}^{x} u_x\big(\varphi_1^2(x,\xi) + \varphi_2^2(x,\xi)\big)\,dx = u(x,t)\big(\varphi_1^2(x,\xi) + \varphi_2^2(x,\xi)\big) - 2i\xi\varphi_1(x,\xi)\varphi_2(x,\xi). \tag{3.23}$$

Таким образом, согласно равенствам (3.21), (3.22) и (3.23), равенство (3.20) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,\xi)}{\partial t} - A\varphi(x,\xi) = \gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)\big(a(\eta)\bar{a}(\eta) - b(\eta)\bar{b}(\eta)\big)}{\eta+\xi}\,d\eta \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\xi) \\ \varphi_2(x,\xi) \end{pmatrix} - \\ - \frac{\gamma(t)}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(x,\eta,t)}{\eta+\xi}\,d\eta \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\xi) \\ \varphi_2(x,\xi) \end{pmatrix} + \beta(t)u(x,t)\begin{pmatrix} -\varphi_2(x,\xi) \\ \varphi_1(x,\xi) \end{pmatrix} - \\ - 2i\xi\beta(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x,\xi) \end{pmatrix} + 4i\xi^3\alpha(t)\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\xi) \\ \varphi_2(x,\xi) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Дифференцируя равенство (3.24) (m_n-1) раз по ξ и полагая $\xi = \xi_n$, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \overset{(m_n-1)}{\varphi_n}}{\partial t} - \alpha(t)\begin{pmatrix} -4i\xi_n^3 + 2iu\xi_n & 4u\xi_n^2 + 2iu_x\xi_n - 2u^3 - u_{xx} \\ -4i\xi_n^2 + 2iu_x\xi_n + 2iu^3 + u_{xx} & -4i\xi_n^3 - 2iu^2\xi_n \end{pmatrix}\overset{(m_n-1)}{\varphi_n} - \\ &- C_{m_n-1}^1\alpha(t)\begin{pmatrix} -12i\xi_n^2 + 2iu^2 & 8u\xi_n + 2iu_x \\ -8i\xi_n + 2iu_x & 12i\xi_n^2 - 2iu^2 \end{pmatrix}\overset{(m_n-2)}{\varphi_n} - \\ &- C_{m_n-1}^2\alpha(t)\begin{pmatrix} -24i\xi_n & 8u \\ -8u & 24i\xi_n \end{pmatrix}\overset{(m_n-3)}{\varphi_n} - C_{m_n-1}^3\alpha(t)\begin{pmatrix} -24i & 0 \\ 0 & 24i \end{pmatrix}\overset{(m_n-4)}{\varphi_n} = \\ &= \gamma(t)\sum_{s=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(m_n-1-s)}h^2(\eta,t)(m_n-1-s)!}{(\eta+\xi_n)^{(m_n-s)}}\big(a(\eta)\bar{a}(\eta) - b(\eta)\bar{b}(\eta)\big)\,d\eta\,\overset{(s)}{\varphi_n} - \\ &- \frac{\gamma(t)}{2}\sum_{s=0}^{m_n-1} C_{m_n-1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(m_n-1-s)}(m_n-1-s)!}{(\eta+\xi_n)^{(m_n-s)}} C(x,\eta,t)\,d\eta\,\overset{(s)}{\varphi_n} + \\ &+ 4i\xi_n^3\alpha(t)\overset{(m_n-1)}{\varphi_n} + C_{m_n-1}^1 12i\xi_n^2\alpha(t)\overset{(m_n-2)}{\varphi_n} + C_{m_n-1}^2 12i\xi_n\alpha(t)\overset{(m_n-3)}{\varphi_n} + C_{m_n-1}^3 4i\alpha(t)\overset{(m_n-4)}{\varphi_n} + \\ &+ \beta(t)\begin{pmatrix} -\overset{(m_n-1)}{\varphi_{2n}} \\ \overset{(m_n-1)}{\varphi_{1n}} \end{pmatrix} - 2i\xi_n\beta(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \overset{(m_n-1)}{\varphi_{2n}} \end{pmatrix} - 2i(m_n-1)\beta(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \overset{(m_n-2)}{\varphi_{2n}} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Используя (2.1), (2.4) и (3.20), перейдем в равенстве (3.25) к переделу при $x \to \infty$. Приравнивая коэффициенты при $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (ix)^s e^{i\xi_n x}$, $s = m_n - 1, m_n - 2, \dots, 0$, и используя равенство $a(\xi)\bar{a}(\xi) = \dfrac{1}{1 + r^+(\xi) r^+(-\xi)}$, получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{d\chi_0^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\alpha(t) - 2i\xi_n\beta(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_0^n,\\
\frac{d\chi_1^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\alpha(t) - 2i\xi_n\beta(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_1^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n^2\alpha(t) - 2i\beta(t) - 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^2\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_0^n,\\
\frac{d\chi_2^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\alpha(t) - 2i\xi_n\beta(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_2^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n^2\alpha(t) - 2i\beta(t) - 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^2\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_1^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n\alpha(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^3\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_0^n,\\
\frac{d\chi_3^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\alpha(t) - 2i\xi_n\beta(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_3^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n^2\alpha(t) - 2i\beta(t) - 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^2\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_2^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n\alpha(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^3\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_1^n +\\
&\quad + \left(8i\alpha(t) - 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^4\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_0^n,\\
\frac{d\chi_l^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\alpha(t) - 2i\xi_n\beta(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_l^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n^2\alpha(t) - 2i\xi_n\beta(t) - 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^2\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_{l-1}^n +\\
&\quad + \left(24i\xi_n\alpha(t) + 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^3\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_{l-2}^n +\\
&\quad + \left(8i\alpha(t) - 2\gamma(t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^4\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_{l-3}^n +\\
&\quad + 2\gamma(t)\sum_{s=0}^{l-4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{l-s}h^2(\eta,t)}{(\eta+\xi_n)^{l-s+1}\big(1+r^+(\eta)r^+(-\eta)\big)}\,d\eta\right)\chi_s^n,\\
&\qquad n = \overline{1,N}, \qquad l = \overline{4, m_n - 1}.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Таким образом, нам удалось доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если система функций* $\big\{u(x,t), \phi_1(x,\eta,t), \phi_2(x,\eta,t)\big\}$ *является решением задачи* (1.1)–(1.6)*, то данные рассеяния несамосопряженного оператора* $L(t)$ *с потенциалом* $u(x,t)$ *удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (3.12), (3.13) *и* (3.26).

Замечание 3.1. Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1.1)–(1.6).

Пусть задана функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию (1.3). Тогда решение задачи (1.1)–(1.6) находится по следующему алгоритму:

- решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ и получаем данные рассеяния
$$\big\{r^+(\xi,0),\ \xi\in\mathbb{R};\quad \xi_k(0),\ \operatorname{Im}\xi_k>0;\quad \chi_j^k(0),\quad k=\overline{1,N};\quad j=\overline{0,m_k-1}\big\}$$
для оператора $L(0)$;

- используя результаты теоремы 3.1, находим данные рассеяния оператора $L(t)$ при $t>0$:
$$\big\{r^+(\xi,t),\ \xi\in\mathbb{R};\quad \xi_k(t),\ \operatorname{Im}\xi_k>0;\quad \chi_j^k(t),\quad k=\overline{1,N};\quad j=\overline{0,m_k-1}\big\};$$

- методом, основанным на интегральном уравнении Гельфанда–Левитана–Марченко решаем обратную задачу рассеяния, то есть находим единственную (согласно теореме 2.1) $u(x,t)$ по данным рассеяния при $t>0$, полученным на предыдущем шаге;

- после этого решаем прямую задачу для оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ и находим функции $\phi_1(x,\eta,t)$, $\phi_2(x,\eta,t)$.

Пример 3.1. Рассмотрим следующую задачу Коши
$$u_t+t^2(6u^2u_x+u_{xxx})+\big(-4t^2+(4+i\pi)t+1+i\pi\big)u_x=i(t+1)\int_{-\infty}^{\infty}(\phi_1^2-\phi_2^2)\,d\eta, \tag{3.27}$$
$$L(t)\phi=\eta\phi,\quad x\in\mathbb{R},\quad h(\eta,t)=\frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}}, \tag{3.28}$$
$$u(x,0)=-\frac{2}{\operatorname{ch}2x}. \tag{3.29}$$

Данные рассеяния оператора $L(0)$ имеют вид:
$$r^+(0)=0,\quad \xi_1(0)=i,\quad \chi_0(0)=2i.$$

На основании теоремы 3.1, имеем
$$\xi_1(t)=\xi_1(0)=i,\quad r^+(t)=0,\quad \chi_0(t)=2ie^{4t^2+2t}.$$

Следовательно, $F(x,t)=2e^{-x+4t^2+2t}$. Решая интегральное уравнение
$$K_1(x,y,t)-2e^{-x-y+4t^2+2t}+4e^{8t^2+4t}\int_x^{\infty}\int_x^{\infty}K_1(x,s,t)e^{-z-2s}\,ds\,dz=0,$$

получим
$$K_1(x,y,t)=\frac{2e^{-x-y+4t^2+2t}}{1+e^{8t^2+4t-4x}}.$$

Откуда находим решение задачи Коши (3.27)–(3.29):

$$u(x,t) = \frac{-2}{\operatorname{ch}(2x - 4t^2 - 2t)},$$

$$\phi_1(x,\eta,t) = \frac{e^{i\eta x}}{(1-i\eta)\sqrt{1+\eta^2}\operatorname{ch}(2x-4t^2-2t)} + \frac{e^{-i\eta x}}{\sqrt{1+\eta^2}}\left(1 - \frac{e^{-2x+4t^2+2t}}{(1+i\eta)\operatorname{ch}(2x-4t^2-2t)}\right),$$

$$\phi_2(x,\eta,t) = \frac{e^{i\eta x}}{\sqrt{1+\eta^2}}\left(1 - \frac{e^{-2x+4t^2+2t}}{(1-i\eta)\operatorname{ch}(2x-4t^2-2t)}\right) - \frac{e^{-i\eta x}}{\sqrt{1+\eta^2}(1+i\eta)\operatorname{ch}(2x-4t^2-2t)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // Journal of the Physical Society of Japan. 1972. Vol. 32. No. 6. P. 1681. https://doi.org/10.1143/JPSJ.32.1681
2. Lamb G. L. Elements of soliton theory. New York: Wiley, 1980.
3. Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.
4. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. Issue 19. P. 1095–1097. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
5. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. Integration of the loaded Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. 2022. Vol. 42. No. 4. P. 87–101. https://zbmath.org/7699500
6. Hoitmetov U. A. Integration of the loaded KdV equation with a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Siberian Advances in Mathematics. 2022. Vol. 32. Issue 2. P. 102–114. https://doi.org/10.1134/S1055134422020043
7. Hoitmetov U. Integration of the loaded general Korteweg–de Vries equation in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // Eurasian Mathematical Journal. 2022. Vol. 13. No. 2. P. 43–54. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-2-43-54
8. Хасанов А. Б., Хоитметов У. А. О комплекснозначных решениях общего нагруженного уравнения Кортевега–де Фриза с источником // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 385–394. https://elibrary.ru/item.asp?id=48359103
9. Hoitmetov U. A. On the Cauchy problem for the mKdV-sine-Gordon equation with an additional term // Acta Applicandae Mathematicae. 2023. Vol. 184. Issue 1. Article number: 7. https://doi.org/10.1007/s10440-023-00561-x
10. Hoitmetov U. A. Integration of the loaded mKdV-sine-Gordon equation with a source // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20. Вып. 2. С. 859–879. https://www.mathnet.ru/rus/semr1616
11. Собиров Ш. К., Хоитметов У. А. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с зависящими от времени коэффициентами и с самосогласованным источником // Владикавказский математический журнал. 2023. Т. 25. Вып. 3. С. 123–142. https://doi.org/10.46698/q2165-6700-0718-r
12. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A., Sobirov Sh. Q. Integration of the mKdV equation with nonstationary coefficients and additional terms in the case of moving eigenvalues // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 137–155. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-08
13. Мамедов К. А. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности, в случае движущихся собственных значений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2020. № 10. С. 73–85. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-10-73-85

14. Babajanov B. A., Ruzmetov M. M. Solution of the finite Toda lattice with self-consistent source // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. Issue 7. P. 2587–2600. https://doi.org/10.1134/S1995080223070089
15. Babajanov B. A., Ruzmetov M. M., Sadullaev Sh. O. Integration of the finite complex Toda lattice with a self-consistent source // Partial Differential Equations in Applied Mathematics. 2023. Vol. 7. 100510. https://doi.org/10.1016/j.padiff.2023.100510
16. Бабажанов Б. А., Азаматов А. Ш., Атажанова Р. Б. Интегрирование системы Каупа–Буссинеска с коэффициентами, зависящими от времени // Теоретическая и математическая физика. 2023. Т. 216. № 1. С. 63–75. https://doi.org/10.4213/tmf10482
17. Babajanov B., Fečkan M., Babadjanova A. On the differential-difference sine-Gordon equation with an integral type source // Mathematica Slovaca. 2023. Vol. 73. Issue 6. P. 1499–1510. https://doi.org/10.1515/ms-2023-0108
18. Matsutani Shigeki, Tsuru Hideo. Reflectionless quantum wire // Journal of the Physical Society of Japan. 1991. Vol. 60. No. 11. P. 3640–3644. https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.3640
19. Ono Hiroaki. Soliton fission in anharmonic lattices with reflectionless inhomogeneity // Journal of the Physical Society of Japan. 1992. Vol. 61. No. 12. P. 4336–4343. https://doi.org/10.1143/JPSJ.61.4336
20. Kakutani Tsunehiko, Ono Hiroaki. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // Journal of the Physical Society of Japan. 1969. Vol. 26. No. 5. P. 1305–1318. https://doi.org/10.1143/JPSJ.26.1305
21. Wu Jianping, Geng Xianguo. Inverse scattering transform and soliton classification of the coupled modified Korteweg–de Vries equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 53. P. 83–93. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.03.022
22. Уразбоев Г. У., Хоитметов У. А., Бабаджанова А. К. Интегрирование матричного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с источником интегрального типа // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 203. № 3. С. 351–364. https://doi.org/10.4213/tmf9850
23. Vaneeva O. Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: An equivalence based approach // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. Vol. 17. Issue 2. P. 611–618. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.06.038
24. Pradhan K., Panigrahi P. K. Parametrically controlling solitary wave dynamics in the modified Korteweg–de Vries equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2006. Vol. 39. No. 20. P. 343–348. https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/20/L08
25. Wazwaz A.-M. Two new integrable modified KdV equations, of third- and fifth-order, with variable coefficients: multiple real and multiple complex soliton solutions // Waves in Random and Complex Media. 2021. Vol. 31. Issue 5. P. 867–878. https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1631504
26. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
27. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
28. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 09.04.2024

Принята к публикации 26.05.2024

Хоитметов Умид Азадович, д. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики и математической физики, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5974-6603
E-mail: x_umid@mail.ru

Собиров Шехзод Кучкарбой угли, аспирант, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0405-3591
E-mail: shexzod1994@mail.ru

Цитирование: У. А. Хоитметов, Ш. К. Собиров. Интегрирование уравнения мКдФ с зависящими от времени коэффициентами, с дополнительным членом и с интегральным источником в классе быстроубывающих функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 248–266.

MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 2. Pp. 248–266.

U. A. Hoitmetov, Sh. K. Sobirov

Integration of the mKdV equation with time-dependent coefficients, with an additional term and with an integral source in the class of rapidly decreasing functions

Keywords: non-self-adjoint Dirac operator, Jost solutions, scattering data, Lax pairs.

MSC2020: 34L25, 35P25, 47A40, 37K15

DOI: 10.35634/vm240205

The work is devoted to the integration of the modified Korteweg–de Vries equation with time-dependent coefficients, an additional term and an integral source in the class of rapidly decreasing functions using the inverse scattering problem method. In this paper, we consider the case when the Dirac operator included in the Lax pairs is not self-adjoint, therefore the eigenvalues of the Dirac operator can be multiples. The evolution of scattering data is obtained for the non-self-adjoint Dirac operator, the potential of which is a solution of the modified Korteweg–de Vries equation with time-dependent coefficients, with an additional term and with an integral source of a class of rapidly decreasing functions. An example is given to illustrate the application of the results obtained.

REFERENCES

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1972, vol. 32, no. 6, p. 1681. https://doi.org/10.1143/JPSJ.32.1681
2. Lamb G. L. *Elements of soliton theory*, New York: Wiley, 1980.
3. Bogoyavlenskii O. I. *Oprokidyvayushchiesya solitony* (Overturning solitons), Moscow: Nauka, 1991.
4. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation, *Physical Review Letters*, 1967, vol. 19, issue 19, pp. 1095–1097. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095
5. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. Integration of the loaded Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions, *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, 2022, vol. 42, no. 4, pp. 87–101. https://zbmath.org/7699500
6. Hoitmetov U. A. Integration of the loaded KdV equation with a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing complex-valued functions, *Siberian Advances in Mathematics*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 102–114. https://doi.org/10.1134/S1055134422020043
7. Hoitmetov U. Integration of the loaded general Korteweg–de Vries equation in the class of rapidly decreasing complex-valued functions, *Eurasian Mathematical Journal*, 2022, vol. 13, no. 2, pp. 43–54. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-2-43-54
8. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. On complex-valued solutions of the general loaded Korteweg–de Vries equation with a source, *Differential Equations*, 2022, vol. 58, issue 3, pp. 381–391. https://doi.org/10.1134/S0012266122030089
9. Hoitmetov U. A. On the Cauchy problem for the mKdV-sine-Gordon equation with an additional term, *Acta Applicandae Mathematicae*, 2023, vol. 184, issue 1, article number: 7. https://doi.org/10.1007/s10440-023-00561-x
10. Hoitmetov U. A. Integration of the loaded mKdV-sine-Gordon equation with a source, *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2023, vol. 20, issue 2, pp. 859–879. https://www.mathnet.ru/eng/semr1616
11. Sobirov Sh. K., Hoitmetov U. A. Integration of the modified Korteweg–de Vries equation with time-dependent coefficients and with a self-consistent source, *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 123–142 (in Russian). https://doi.org/10.46698/q2165-6700-0718-r
12. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A., Sobirov Sh. Q. Integration of the mKdV equation with nonstationary coefficients and additional terms in the case of moving eigenvalues, *Izvestiya Instituta Matematiki*

i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2023, vol. 61, pp. 137–155. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2023-61-08

13. Mamedov K. A. Integration of mKdV equation with a self-consistent source in the class of finite density functions in the case of moving eigenvalues, *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, issue 10, pp. 66–78. https://doi.org/10.3103/S1066369X20100072
14. Babajanov B. A., Ruzmetov M. M. Solution of the finite Toda lattice with self-consistent source, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, issue 7, pp. 2587–2600. https://doi.org/10.1134/S1995080223070089
15. Babajanov B. A., Ruzmetov M. M., Sadullaev Sh. O. Integration of the finite complex Toda lattice with a self-consistent source, *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 2023, vol. 7, 100510. https://doi.org/10.1016/j.padiff.2023.100510
16. Babajanov B. A., Azamatov A. Sh., Atajanova R. B. Integration of the Kaup–Boussinesq system with time-dependent coefficients, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2023, vol. 216, issue 1, pp. 961–972. https://doi.org/10.1134/S004057792307005X
17. Babajanov B., Fečkan M., Babadjanova A. On the differential-difference sine-Gordon equation with an integral type source, *Mathematica Slovaca*, 2023, vol. 73, issue 6, pp. 1499–1510. https://doi.org/10.1515/ms-2023-0108
18. Matsutani Shigeki, Tsuru Hideo. Reflectionless quantum wire, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1991, vol. 60, no. 11, pp. 3640–3644. https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.3640
19. Ono Hiroaki. Soliton fission in anharmonic lattices with reflectionless inhomogeneity, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1992, vol. 61, no. 12, pp. 4336–4343. https://doi.org/10.1143/JPSJ.61.4336
20. Kakutani Tsunehiko, Ono Hiroaki. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1969, vol. 26, no. 5, pp. 1305–1318. https://doi.org/10.1143/JPSJ.26.1305
21. Wu Jianping, Geng Xianguo. Inverse scattering transform and soliton classification of the coupled modified Korteweg–de Vries equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, vol. 53, pp. 83–93. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.03.022
22. Urazboev G. U., Xoitmetov U. A., Babadjanova A. K. Integration of the matrix modified Korteweg–de Vries equation with an integral-type source, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2020, vol. 203, issue 3, pp. 734–746. https://doi.org/10.1134/S0040577920060033
23. Vaneeva O. Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: An equivalence based approach, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, issue 2, pp. 611–618. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.06.038
24. Pradhan K., Panigrahi P. K. Parametrically controlling solitary wave dynamics in the modified Korteweg–de Vries equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2006, vol. 39, no. 20, pp. 343–348. https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/20/L08
25. Wazwaz A.-M. Two new integrable modified KdV equations, of third- and fifth-order, with variable coefficients: multiple real and multiple complex soliton solutions, *Waves in Random and Complex Media*, 2021, vol. 31, issue 5, pp. 867–878. https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1631504
26. Ablowitz M. J., Segur H. *Solitons and inverse scattering transform*, Philadelphia: SIAM, 1981. https://zbmath.org/0472.35002
27. Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C. *Solitons and nonlinear wave equations*, London: Academic Press, 1982. https://zbmath.org/0496.35001
28. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Nauka, 1967.

Received 09.04.2024

Accepted 26.05.2024

Umid Azadovich Hoitmetov, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5974-6603
E-mail: x_umid@mail.ru

Shekhzod Kuchkarboy ugli Sobirov, PhD student, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, ul. Kh. Alimdjan, 14, Urgench, 220100, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0405-3591
E-mail: shexzod1994@mail.ru

Citation: U. A. Hoitmetov, Sh. K. Sobirov. Integration of the mKdV equation with time-dependent coefficients, with an additional term and with an integral source in the class of rapidly decreasing functions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 2, pp. 248–266.