ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

УДК 517.929

© *Т. Л. Сабатулина*

# О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ КОШИ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Получены достаточные условия положительности функции Коши одного интегро-дифференциального уравнения. На их основе изучается асимптотическая устойчивость этого же уравнения.

*Ключевые слова*: функционально-дифференциальное уравнение, положительность функции Коши, асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)x(s)\,ds, \quad x(t) = 0, \quad t < 0, \tag{1}$$

где функции $k(\cdot,s)$ и $h(\cdot)$ измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$, функция $k(t,\cdot)$ суммируема на каждом конечном отрезке. Дополнительно предположим, что $k(t,s) \geqslant 0$ при всех $\{t,s\} \in \mathbb{R}_+^2$ и $h(t) \geqslant 0$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$.

Для уравнения (1) ставится задача получения эффективных признаков (в терминах параметров исходной задачи) положительности функции Коши. Обозначим $\rho(t) = \displaystyle\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)\,ds$. С помощью леммы о дифференциальном неравенстве [1, с. 65] получается следующая

**Теорема 1.** *Если* $\operatorname*{vraisup}_t \displaystyle\int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)\,ds \leqslant \frac{1}{e}$, *то функция Коши уравнения* (1) *положительна.*

Если подчинить $k(t,s)$ более жёстким условиям, то оценку $1/e$ удаётся увеличить почти в два раза.

**Теорема 2.** *Пусть* $\omega$ — *суммируемая на любом конечном отрезке функция,* $k(t,s) \leqslant \omega(t)\omega(s)$ *и* $\operatorname*{vraisup}_t \displaystyle\int_{t-h(t)}^{t} \omega(s)\,ds \leqslant \sqrt{s_0(2-s_0)}$, *где* $s_0$ — *корень уравнения* $e^{-s} = 1 - s/2$. *Тогда функция Коши уравнения* (1) *положительна.*

**Следствие 1** [2]. *Пусть* $\operatorname*{vraisup}_{t,s} k(t,s) = k$, $\operatorname*{vraisup}_t h(t) = h$ *и выполнено неравенство* $kh^2 \leqslant s_0(2-s_0)$, *где* $s_0$ — *корень уравнения* $e^{-s} = 1 - s/2$. *Тогда функция Коши уравнения* (1) *положительна.*

МАТЕМАТИКА 2008. Вып. 2

Если уравнение (1) автономно, то условия следствия 1 являются необходимыми и достаточными условиями положительности функции Коши.

Пусть функция Коши уравнения (1) положительна. Тогда, так как $x(t) = C(t,0)x(0)$, любое решение уравнения (1) сохраняет знак. В силу (1) $\dot{x}(t)$ тоже сохраняет знак, то есть решение монотонно и ограниченно, следовательно, предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_0$ существует. Этот предел не обязательно равен нулю, оказывается существенным разделение случаев $\rho \in L_1$ и $\rho \notin L_1$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\rho \in L_1$. *Тогда для любого положительного* $\varepsilon$ *найдётся такое* $T$, *что при любых* $t, s$, *таких, что* $t \geqslant s \geqslant T$, *выполнено неравенство* $|C(t,s) - 1| < \varepsilon$.

Из теоремы 3 следует, что при $\rho \in L_1$ уравнение (1) равномерно устойчиво, но не равномерно асимптотически устойчиво, а при всех $s$, начиная с $s_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} C(t,s) > 0$. Как показывают примеры, при $s < s_0$ специальным выбором параметров можно добиться, что в случае $\rho \in L_1$ уравнение (1) будет обладать свойством асимптотической устойчивости, но любое малое изменение параметров приводит к потере этого свойства.

**Теорема 4** [2]. *Пусть функция Коши уравнения* (1) *положительна и* $\rho \notin L_1$. *Тогда решение уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

* * *

1. Азбелев Н. В., Симонов. П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.
2. Sabatulina T. L. On the positiveness of the Cauchy function of integro-differential equations with bounded aftereffect // Functional differential equation. 2008. Vol. 3–4. P. 273–282.

Поступила в редакцию 14. 02. 08

***T. L. Sabatulina***

**On the positiveness of the Cauchy function of some integro-differential equation**

The paper presents the conditions of the positiveness of the Cauchy function of some integro-differential equation. Asymptotic stability of the equation is studied in terms of these results.

Сабатулина Татьяна Леонидовна
Пермский государственный
технический университет
614000, Россия, г. Пермь,
Комсомольский проспект, 29а
E-mail: sabatulina@do.pstu.ru