УДК 517.977.58

© ***А. А. Успенский, П. Д. Лебедев***

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ПРОСТОЙ ДИНАМИКОЙ [1]

Предложены аналитические и численные алгоритмы построения функции оптимального результата и ее множеств Лебега для задачи управления по быстродействию с круговой индикатрисой скоростей. Выделены и изучены многообразия, на которых функция оптимального результата теряет гладкость.

Ключевые слова: функция оптимального результата, минимаксное решение, биссектриса, евклидово расстояние.

Рассматривается задача Коши–Дирихле для уравнения типа Гамильтона–Якоби:

$$\min_{\|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь $\|\nu\|=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ — норма вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2)$. Краевое условие определено на границе $\Gamma=\partial M$ замкнутого множества $M\subset\mathbb{R}^2$.

Решение задачи (1), (2) понимается в обобщенном смысле в соответствие с концепцией минимаксного решения [1] уравнения типа Гамильтона–Якоби. Минимаксное решение задачи Коши–Дирихле является функцией оптимального результата для задачи быстродействия с круговой вектограммой скоростей, когда M— целевое множество. Заметим, что другой известный подход к определению обобщенного решения соответствующего уравнения в частных производных первого порядка изложен в [2].

Дифференциальные свойства минимаксного решения задачи существенным образом зависят от краевого условия. В настоящей работе предлагаются аналитические и численные подходы к построению минимаксного решения для достаточно общего случая, когда краевое условие задано на непрерывной склейке дважды дифференцируемых кривых.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ №05-01-00601, гранта ведущих научных школ НШ-8512.2006.1 и регионального гранта РФФИ/ПСО №07-0196085

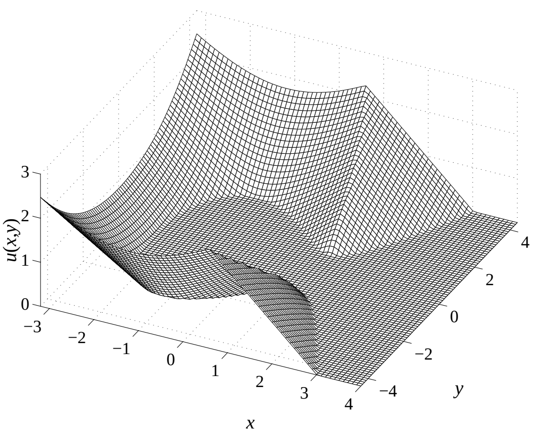

Рис. 1. График функции оптимального результата

Аналитический подход к построению решения задачи (1), (2) предполагает отыскание характеристического многообразия L, на котором функция оптимального результата теряет гладкость [3]. Указанное многообразие относится к множествам симметрии, топологические особенности которых изучались, например, в работах [4, 5]. Для задачи (1), (2) L является рассеивающей линией [6]. Исследованы асимптотические свойства этих множеств, предложены методы выявления их точек ветвления и точек прекращения. Найдены необходимые условия существования характеристических точек (псевдовершин) кривой Γ, которые обусловливают зарождение изломов множеств управляемости в задаче быстродействия. Приводятся примеры функций оптимального результата, найденных в аналитическом виде.

Численный подход к построению решения задачи предполагает пошаговое построение аппроксимаций множеств управляемости в виде кусочно-линейных сплайнов. При этом узлы сплайнов находятся «экстремальным» сдвигом (см. [7, 8]). Приводятся результаты моделирования задачи быстродействия с различной геометрией краевого условия. Приближенное решение задачи предлагается в виде кусочно-линейной аппроксимации функции оптимального результата, а также в виде совокупности аппроксимаций ее множеств Лебега.

П р и м е р 1. Рассматривается задача быстродействия с динамикой

$$\dot{x} = \nu_1, \ \ \dot{y} = \nu_2.$$

Здесь управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leqslant 1$, целевое множество $M = \{(x, y) : y^2 \leqslant x^3 - 4x + 4\}$. На рис. 1 представлена кусочно-линейная аппроксимация функции оптимального результата $u = u(x, y)$.

Граница Γ множества M в примере 1 совпадает с эллиптической кривой $\{(x, y) : y^2 = x^3 - 4x + 4\}$, что позволяет выделить на ней псевдовершины и точки прекращения кривой L. Функция $u = u(x, y)$ во всех точках множества $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup L)$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1), а в точках L супердифференцируема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.
2. Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I // Матем. сб. 1974. Т. 98, № 3. С. 450–493.
3. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Численно-аналитические методы построения волновых фронтов в задачах управления и геометрической оптике // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2007. Т. 12, № 4. С. 538–539.
4. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
5. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988.
6. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. Григорьева С. В., Пахотинских В. Ю., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 2005. Т. 196, №. 4. С. 51–78.

Поступила в редакцию 22.01.08

A. A. Uspenskiy, P. D. Lebedev

Construction of the function of the best result for the system with simple dynamic

The paper presents the construction the best result function for the system with simple dynamic. The first-order PDE type of eikonal is studied. Its minimax solution is proved to be the cost of the optimal time control problem.

Успенский Александр Александрович
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: pleb@yandex.ru