

УДК 517.928, 532.517.43, 532.527

© А. И. Гудименко, К. Г. Купцов

ДВИЖЕНИЕ ТРЕХ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ В СЛУЧАЕ, ЕСЛИ ОДИН ИЗ НИХ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР ЗАВИХРЕННОСТИ ¹

Изучается движение трех точечных вихрей в случае, если центр завихренности лежит на траектории одного из вихрей или находится достаточно близко от нее. Численно исследованы траектории вихрей в широком диапазоне изменения их интенсивностей. Вычислены асимптотики траекторий вихрей для конфигураций, близких к сингулярной или коллинеарной.

Ключевые слова: точечные вихри, возмущения, асимптотики.

Введение

Движение трех точечных вихрей в случае, если центр завихренности лежит на траектории одного из вихрей или находится достаточно близко от нее, проявляет себя качественно иным образом, нежели в случае общего положения центра завихренности. Особенность обнаруживается уже в уравнениях движения вихрей в полярных координатах (см. формулу (1.18)). В момент прохождения вихря через центр завихренности в правой части уравнений возникает неопределенность, приводящая, в частности, к скачкообразному изменению угловой скорости вращения вихря вокруг центра завихренности при малых изменениях начальных данных. Подчеркнем, однако, что ни о какой неустойчивости движения здесь речь не идет. Все дело — в способе описания движения. Если центр вращения не лежит на траектории вихря, угловая скорость остается непрерывной при малых изменениях начальных данных.

Будем далее называть траекторию вихря, проходящую через центр завихренности, *центральной* траекторией, а движение вихрей в случае, если одна из траекторий центральная, — *центральным* движением. Траектории вихрей, близкие к траекториям центрального движения, будем называть *окрестными* траекториями, а движение по ним вихрей — *окрестным* движением.

В компьютерном эксперименте (см. § 2) особенность рассматриваемых типов движения проявляется, в частности, в специфической форме центральной траектории в подходящей вращающейся системе координат. Форма этой траектории стабилизируется при приближении значения интенсивности одного из вихрей к предельному значению, коим мы считаем нуль, бесконечность или суммарную с обратным знаком интенсивность двух других вихрей.

При таких значениях интенсивности одного из вихрей оказывается возможным вычислить асимптотики центральных и окрестных траекторий вихрей, а также и некоторые другие характеристики движения. Мы показываем в § 3, что соответствующие центральные траектории описываются в декартовых координатах при подходящем масштабировании уравнением

$$y^2 = x^4(1 - x^2) \quad \text{или} \quad y^2 = x^8(1 - x^2),$$

смотря по тому, к какой конфигурации вихрей траектория близка, коллинеарной или сингулярной.

¹Работа поддержана РФФИ (грант 08-05-00061-а) и ДВО РАН (гранты 09-И-П17-07, 09-И-СО-07-002, 09-И-П4-04).

§ 1. Предварительные сведения

1. Динамика трех точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_i \quad (1.1)$$

и скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right),$$

где a_i — обратная интенсивность i -го вихря, m_i — квадрат расстояния между вихрями, отличными от i -го, x_i и y_i — его декартовы координаты. Говорят еще, что эта система описывает *абсолютное* движение трех вихрей.

Наличие в системе, помимо гамильтониана, первых интегралов

$$Q = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{a_i}, \quad P = \sum_{i=1}^3 \frac{y_i}{a_i}, \quad I = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 + y_i^2}{a_i}$$

позволяет свести ее к двумерной динамической системе, о которой говорят как о системе *относительного* движения трех вихрей. Обозначим Δ удвоенную ориентированную площадь вихревого треугольника и положим $a = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1$. Согласно [1] относительное движение описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом (1.1) и скобкой Ли—Пуассона

$$\{m_i, \Delta\} = (a_j - a_k)m_i + (a_j + a_k)(m_j - m_k), \quad \{m_i, m_j\} = -4a_k \Delta, \quad (1.2)$$

ограниченными на поверхность уровня $f = 0$ и $g = \text{const}$, где

$$f = (2\Delta)^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1),$$

$$g = \frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{4a}. \quad (1.3)$$

Алгебра Ли, соответствующая ли-пуассоновой структуре (1.2), названа в [1] *вихревой алгеброй*.

Поверхность уровня $f = 0$ и $g = \text{const}$ является фазовым пространством редуцированной системы. При $a > 0$ это пространство компактно [1]. В данной работе мы всегда предполагаем выполнение этого условия.

2. В [1] для $a > 0$ на фазовом пространстве редуцированной системы были определены канонические координаты. К сожалению, они не удобны для наших целей, ибо их нуль не совпадает, вообще говоря, ни с сингулярной, ни с эллиптической коллинеарной особыми точками. Введем более подходящие координаты.

В сингулярном случае выберем в качестве образующих вихревой алгебры

$$e_i = \frac{\Delta}{2g\sqrt{a}}, \quad e_j = \frac{a_i(a_i + a_j)m_i + a_j(a_i + a_j)m_j - (a_i a_j + a)m_k}{4ga(a_i + a_j)}, \quad (1.4)$$

$$e_k = \frac{(a_i + a_j)m_i - (a_i + a_j)m_j + (a_i - a_j)m_k}{4g\sqrt{a}(a_i + a_j)} \quad (1.5)$$

и g . В этих образующих фазовое пространство системы — сфера

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \quad (1.6)$$

а ли-пуассонова структура (1.2) имеет вид

$$\{g, e_i\} = 0, \quad \{e_i, e_j\} = g^{-1} e_k. \quad (1.7)$$

Определим на данной сфере координаты (x, y) , полагая

$$e_i = y, \quad e_j = \sqrt{1 - y^2} \cos x, \quad e_k = \sqrt{1 - y^2} \sin x. \quad (1.8)$$

Имеем $\{x, y\} = g^{-1}$ и $x = y = 0$ в сингулярной точке $m_k = 0$. Будем называть эти координаты *нормированными каноническими координатами*.

Разрешая систему (1.3)–(1.5) относительно m_i, m_j, m_k , находим

$$m_i = 2g(a_j + a_k + \frac{a - a_j^2}{a_i + a_j} e_j + \frac{2a_j \sqrt{a}}{a_i + a_j} e_k), \quad (1.9)$$

$$m_j = 2g(a_i + a_k + \frac{a - a_i^2}{a_i + a_j} e_j - \frac{2a_i \sqrt{a}}{a_i + a_j} e_k), \quad m_k = 2g(a_i + a_j)(1 - e_j). \quad (1.10)$$

В коллинеарном случае возьмем в качестве образующих

$$e_{1'} = e_1, \quad e_{2'} = \frac{(w^2 - a)e_2 + 2w\sqrt{a}e_3}{w^2 + a}, \quad (1.11)$$

$$e_{3'} = \frac{-2w\sqrt{a}e_2 + (w^2 - a)e_3}{w^2 + a} \quad (w = a_1 z + a_2(z - 1)), \quad (1.12)$$

где z — действительный корень уравнения

$$z^3 - \frac{(a_1 + 2a_2)z^2}{a_1 + a_2} - \frac{a_1(2a_2 + a_3)z}{a_3(a_1 + a_2)} + \frac{a_1(a_2 + a_3)}{a_3(a_1 + a_2)} = 0, \quad (1.13)$$

следствия условия $\{\Delta, H\} = 0$ при

$$m_1 = z^2 m_3, \quad m_2 = (1 - z)^2 m_3. \quad (1.14)$$

Соотношения (1.6) и (1.7) в новых образующих сохраняются, так что мы можем определить *нормированные канонические координаты* на фазовом пространстве редуцированной системы теми же формулами (1.8), что и в сингулярном случае. Ноль этих координат соответствует коллинеарной точке (1.14).

Разрешая систему уравнений (1.3)–(1.5), (1.11) и (1.12) относительно m_1, m_2 и m_3 , найдем

$$m_1 = 2g(a_2 + a_3) + 2g \frac{(az^2 - (a_2(1 - z) + a_3)^2)e_{2'} + 2\sqrt{a}z(a_2(z - 1) - a_3)e_{3'}}{z^2 a_1 + (z - 1)^2 a_2 + a_3},$$

$$m_2 = 2g(a_3 + a_1) + 2g \frac{(a(1 - z)^2 - (a_1 z + a_3)^2)e_{2'} - 2\sqrt{a}(z - 1)(a_1 z + a_3)e_{3'}}{z^2 a_1 + (z - 1)^2 a_2 + a_3},$$

$$m_3 = 2g(a_1 + a_2) + 2g \frac{(a - (a_1 z + a_2(z - 1))^2)e_{2'} + 2\sqrt{a}(a_1 z + a_2(z - 1))e_{3'}}{z^2 a_1 + (z - 1)^2 a_2 + a_3}.$$

3. В окрестности особой точки фазового пространства редуцированной системы наряду с нормированными каноническими координатами (x, y) мы будем использовать соответствующие им полярные координаты (ρ, ϕ) , а также координаты угол-действие (θ, J) . Для последних, учитывая нормировку, имеем

$$J = \frac{g}{4\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\phi, \quad \theta = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad S = \frac{g}{2} \int_0^\phi r^2 d\phi. \quad (1.15)$$

4. Будем обозначать r_i и ϕ_i полярные координаты i -го вихря. Примем, что центр завихренности находится в начале координат. Тогда из интегралов движения и теоремы косинусов имеем соотношения:

$$\cos(\phi_i - \phi_j) = \frac{a_i a_j}{2r_i r_j} \left(\frac{r_k^2}{a_k^2} - \frac{r_i^2}{a_i^2} - \frac{r_j^2}{a_j^2} \right), \quad (1.16)$$

$$r_i^2 = \frac{4ga_i^2(a_j + a_k)}{a} - \frac{a_i^2 m_i}{a}. \quad (1.17)$$

С их учетом из уравнений Гамильтона абсолютной динамики получаем

$$\dot{\phi}_i = \frac{a_i}{4\pi a r_i^2} \frac{a_j a_k (m_j + m_k)(m_j + m_k - m_i) + 2(a_j^2 + a_k^2)m_j m_k}{a_j a_k m_j m_k}. \quad (1.18)$$

Соотношения (1.16)–(1.18) определяют связь относительных и абсолютных координат системы трех вихрей.

Впоследствии нам понадобятся выражения для квадратов длин сторон вихревого треугольника через интенсивности вихрей в момент прохождения первого вихря через центр завихренности. Из (1.17) и (1.18) при $r_1 \rightarrow 0$ имеем

$$m_1 = 4g(a_2 + a_3), \quad m_2 = \frac{4ga_3^2}{a_2 + a_3}, \quad m_3 = \frac{4ga_2^2}{a_2 + a_3}. \quad (1.19)$$

§ 2. Компьютерный эксперимент

Результаты компьютерного анализа центрального и окрестного движений трех вихрей представлены на рис. 1–10.

На рис. 1 приведены траектории центрального движения вихрей при фиксированных положительных интенсивностях первых двух и различных, но также положительных интенсивностях третьего вихря. Траектории вычислены в системе координат, равномерно вращающейся вокруг центра завихренности с частотой, равной частоте оборота первого вихря по своей орбите. Центр завихренности помещен в начало координат. С центральной траекторией ассоциирован первый вихрь.

На рис. 2 приведены фазовые кривые относительного движения вихрей, соответствующие траекториям рис. 1 (слева), и фазовый портрет относительного движения для частного случая выбора интенсивности третьего вихря (справа). Важно отметить, что траекториям, близким к предельным ($a_3 = 0.1$ и $a_3 = 100$), соответствуют на фазовых портретах точки, близкие к сингулярным особым точкам.

Следующая пара рисунков (рис. 3 и 4) знакомит нас с траекториями центрального и относительного движений в случае, когда меняется интенсивность первого вихря. Как и выше, интенсивности вихрей выбраны положительными. Особенность этого случая состоит в том, что предельным траекториям ($a_1 = 0.1$ и $a_1 = 30$) теперь отвечают на фазовом портрете относительного движения сепаратриса и кривая, не совпадающая ни с какой особой точкой.

Рис. 5–8 иллюстрируют центральное движение вихрей в случае, когда интенсивности вихрей имеют разные знаки. Эти рисунки аналогичны предыдущим, однако здесь предельным траекториям $a_1, a_2 \rightarrow -1.5$ соответствуют на фазовом портрете относительного движения коллинеарные особые точки. На рис. 9 представлено окрестное движение вихрей. Рис. 10 иллюстрирует форму центральных траекторий.

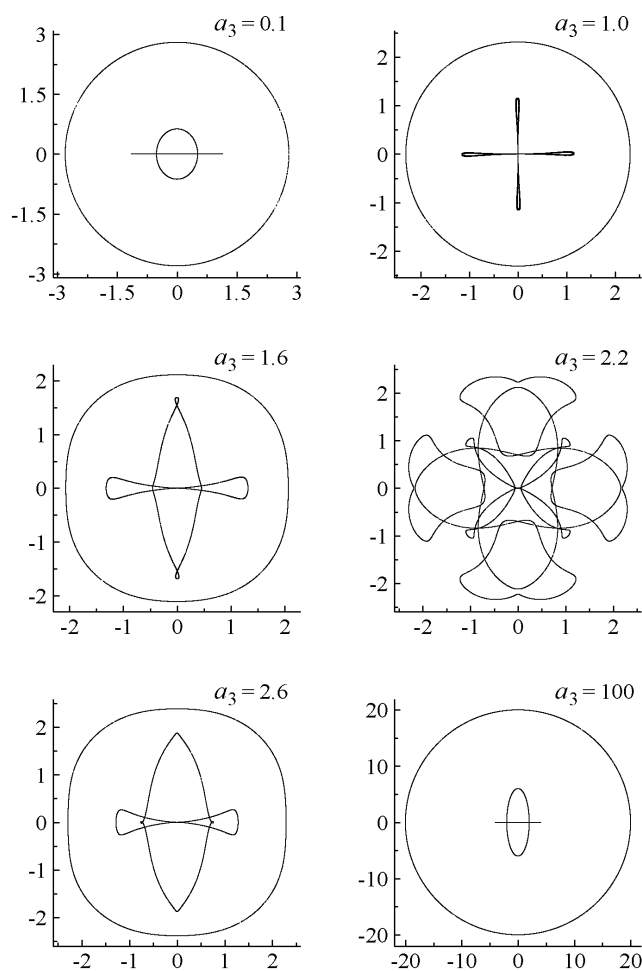


Рис. 1. Траектории центрального движения вихрей в специальной вращающейся системе координат при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и различных значениях a_3 . Траектории первого и третьего вихрей при $a_3 = 0.1$ увеличены в 6 раз, траектории первого и второго вихрей при $a_3 = 100$ — в 15 раз.

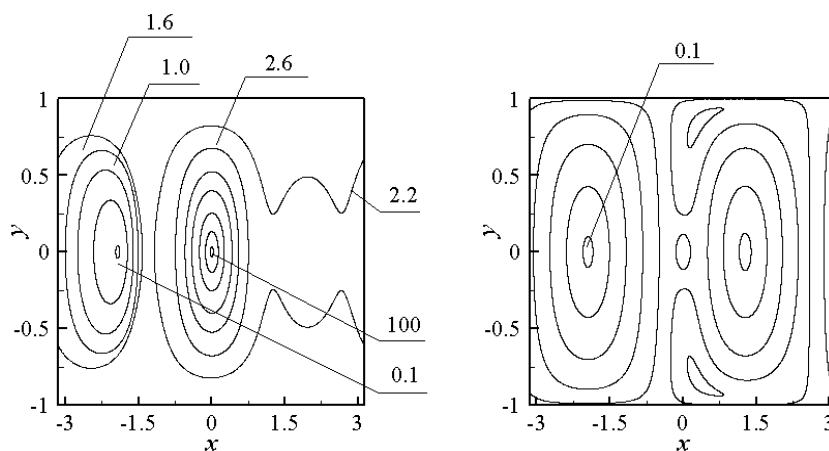


Рис. 2. Фазовые кривые относительного движения вихрей, отвечающие центральному движению (слева), и фазовый портрет относительного движения вихрей при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 0.1$. Указатели устанавливают соответствие между фазовыми кривыми и траекториями рис. 1

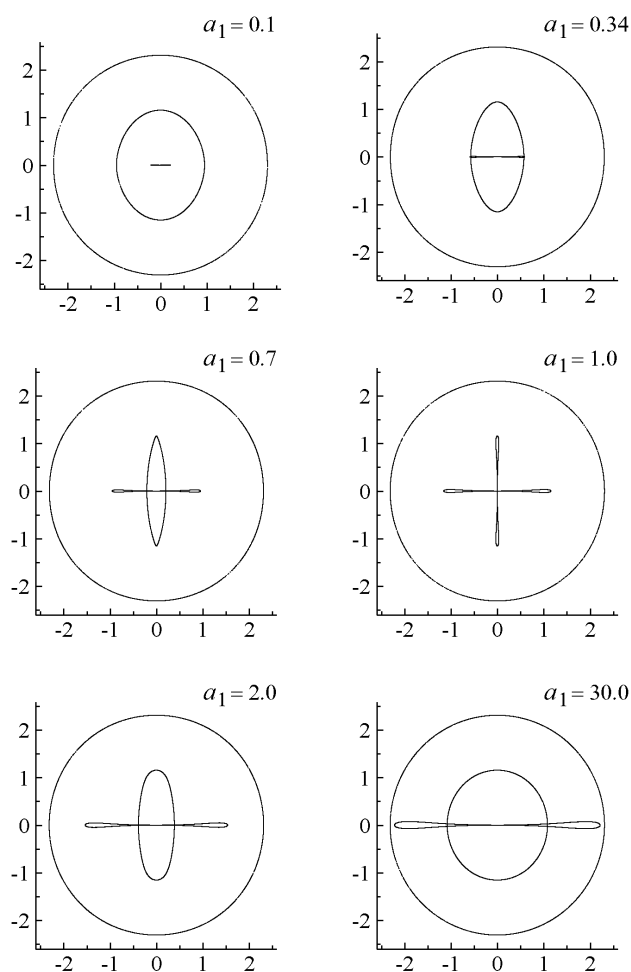


Рис. 3. Траектории центрального движения вихрей в специальной вращающейся системе координат при $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ и различных значениях a_1

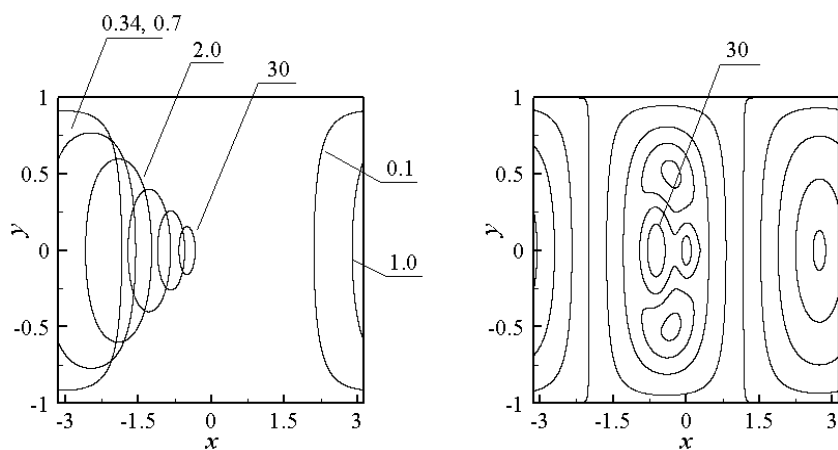


Рис. 4. Фазовые кривые относительного движения вихрей, представляющие центральное движение, при $a_2 = 2$ и $a_3 = 1$ (слева) и фазовый портрет относительного движения вихрей при $a_1 = 30$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 1$ (справа). Указатели имеют тот же смысл, что и на рис. 2

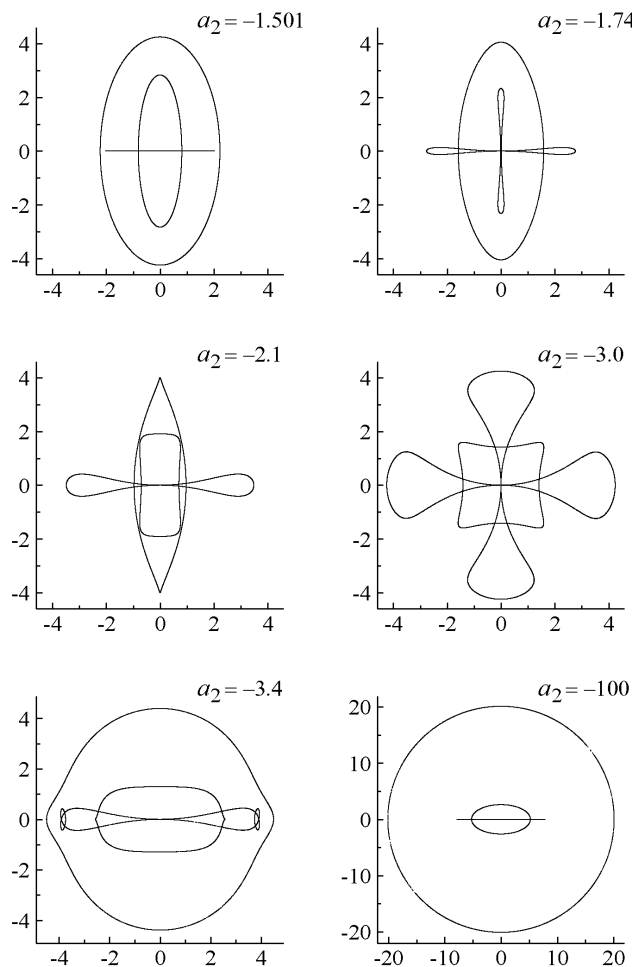


Рис. 5. Траектории центрального движения вихрей в специальной вращающейся системе координат при $a_1 = -3$, $a_3 = 1$ и различных значениях a_2

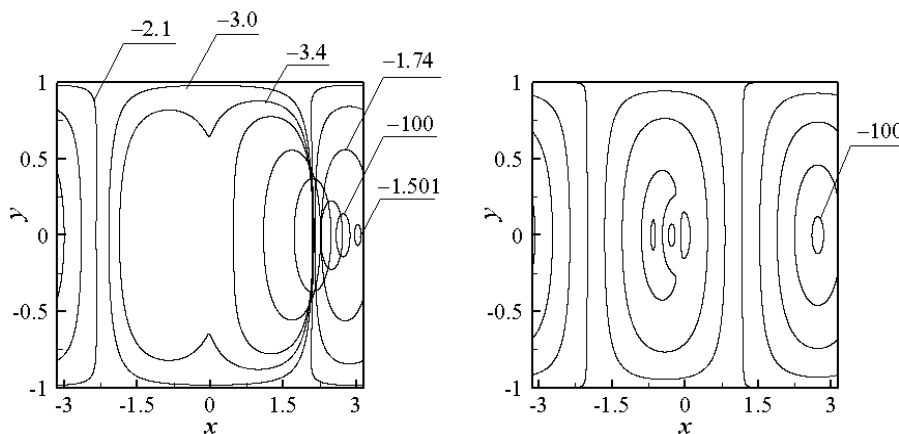


Рис. 6. Фазовые кривые относительного движения вихрей, представляющие центральное движение, при $a_1 = -3$ и $a_3 = 1$ (слева) и фазовый портрет относительного движения вихрей при $a_1 = -3$, $a_2 = -100$ и $a_3 = 1$ (справа). Указатели имеют прежний смысл

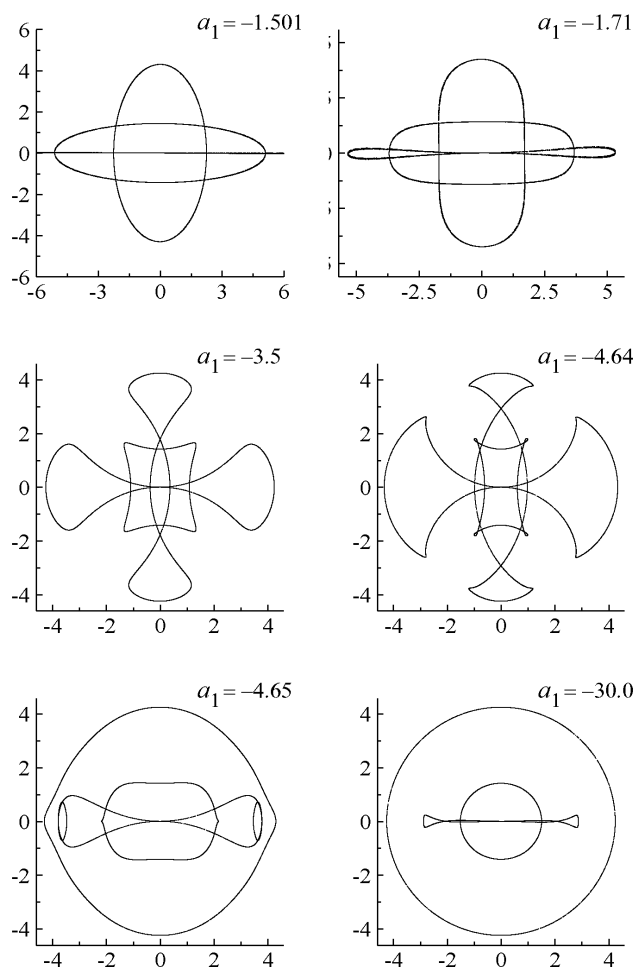


Рис. 7. Траектории центрального движения вихрей в специальной вращающейся системе координат при $a_2 = -3$, $a_3 = 1$ и различных значениях a_1

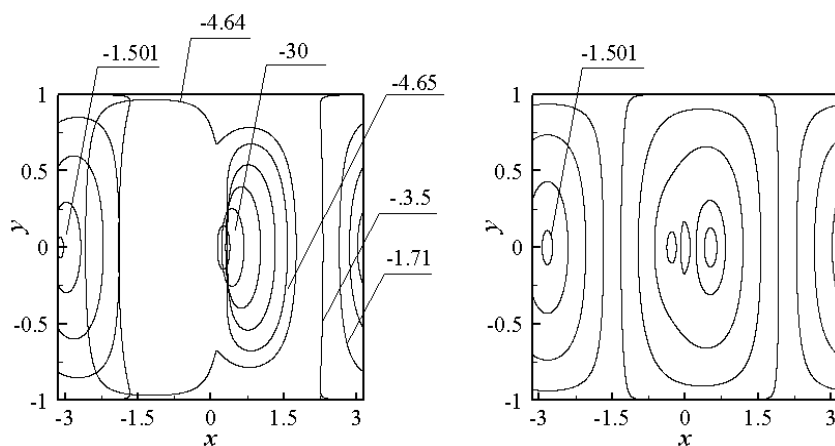


Рис. 8. Фазовые кривые относительного движения вихрей, соответствующие центральному движению, при $a_2 = -3$, $a_3 = 1$ (слева) и фазовый портрет относительного движения вихрей при $a_1 = -1.501$, $a_2 = -3$ и $a_3 = 1$ (справа)

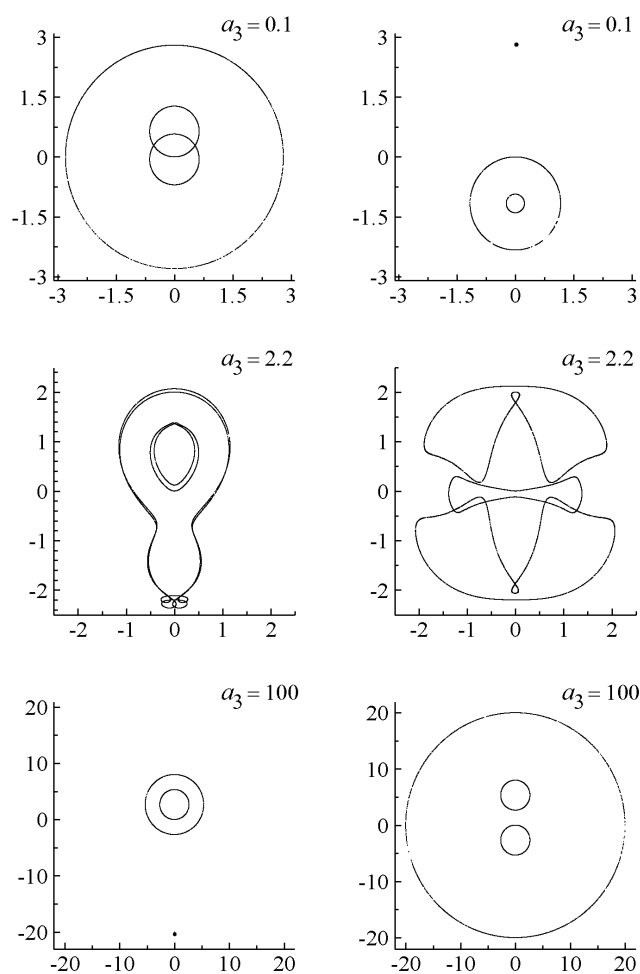


Рис. 9. Траектории окрестного движения вихрей в специальной вращающейся системе координат при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и различных значениях a_3 . Траектории первого и третьего вихрей при $a_3 = 0.1$ увеличены в 6 раз, траектории первого и второго вихрей при $a_3 = 100$ — в 15 раз

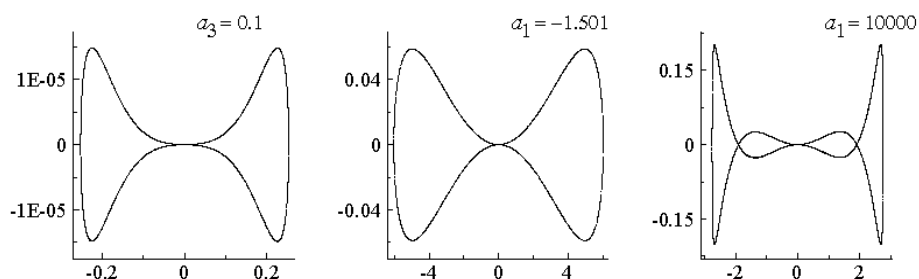


Рис. 10. Типичные центральные траектории, соответствующие предельным значениям интенсивности одного из вихрей

§ 3. Движение в конфигурации, близкой к сингулярной

1. Начнем рассмотрение со случая $a_3 \rightarrow 0$. Будем предполагать, что в окрестности сингулярной точки $m_2 = 0$ фазового пространства редуцированной системы справедливы разложения

$$a_3 = \alpha_1 \epsilon + \alpha_2 \epsilon^2 + \alpha_3 \epsilon^3 + \alpha_4 \epsilon^4 + O(\epsilon^5), \quad (3.1)$$

$$h = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_{i0} + h_2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4),$$

$$\rho = \epsilon + \rho_3 \epsilon^3 + O(\epsilon^5),$$

где ϵ — малый параметр, α_i , m_{i0} и h_2 — константы, ρ_3 — функция ϕ , ρ и ϕ — полярные координаты, соответствующие нормированным каноническим координатам с началом в сингулярной точке $m_2 = 0$.

Все неизвестные величины определим, требуя, чтобы в рассматриваемой окрестности

$$H(\rho, \phi) = h, \quad J = \frac{1}{2} g \epsilon^2 + O(\epsilon^6) \quad (3.2)$$

и при $\phi = 0$ выполнялись соотношения (1.19). Здесь $H(\rho, \phi)$ — гамильтониан редуцированной системы и J — переменная действие, определенная в (1.15).

Следуя стандартной процедуре метода асимптотических разложений [4], то есть подставляя разложения в определяющие соотношения, отделяя коэффициенты при одинаковых степенях ϵ и разрешая полученные уравнения, находим

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{a_1 a_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{8} \sqrt{a_1 + a_2}, \quad \dots, \quad (3.3)$$

$$m_{10} = 4g a_2, \quad m_{20} = g a_1 \epsilon^2, \quad m_{30} = 4g a_2,$$

$$h_2 = \frac{-a_1^4 - 9a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 + 3a_1 a_2^3 - a_2^4}{192\pi a_1^3 a_2^3}$$

$$\rho_3 = \frac{2(a_1 a_2 + a_2^2 - 3a_1^2) \cos 2\phi - a_2^2 (a_1 + a_2) \cos 4\phi}{24a_2 (a_1 + a_2)}.$$

Аналогично, используя определяющие соотношения для θ из (1.15) и найденное выражение для ρ , получаем

$$\phi = -\theta - \frac{a_2(a_1 + a_2) \sin 4\theta + 4(3a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2) \sin 2\theta}{24a_2(a_1 + a_2)} \epsilon^2 + O(\epsilon^4) \quad (3.4)$$

$$\rho = \epsilon - \frac{a_2(a_1 + a_2) \cos 4\theta + 2(3a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2) \cos 2\theta}{24a_2(a_1 + a_2)} \epsilon^5 + O(\epsilon^5). \quad (3.5)$$

Таким образом, определены координаты (ρ, ϕ) в переменных (θ, ϵ) , а по сути, учитывая тривиальную связь координат ϵ и J , — в переменных угол-действие.

Теперь из (1.8)–(1.10), (1.17) и (1.18), используя (3.4) и (3.5), находим

$$r_1^2 = 2g a_1 (1 - \cos \theta) \epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad r_2^2 = 4g a_2 + O(\epsilon), \quad r_3^2 = g a_1 \epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

$$\dot{\phi}_1 = \Omega_1 - \frac{\sqrt{a_1 a_2} (\cos 2\theta + \cos \theta)}{4\pi g a_2^2 (a_1 + a_2) \epsilon} + O(1), \quad (3.6)$$

$$\dot{\phi}_2 = -\frac{1}{4\pi g a_2 \sqrt{a_1 a_2} \epsilon} + O(1), \quad \dot{\phi}_3 = -\frac{\cos \theta}{2\pi g a_1^2 \epsilon^2} + O(\epsilon), \quad (3.7)$$

где

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2\pi g a_1 \sqrt{a_1 a_2} \epsilon^3} - \frac{a_1 + a_2}{8\pi g a_1^2 a_2 \epsilon^2} - \frac{(33a_1^3 + 7a_1^2 a_2 - a_1 a_2^2 + a_2^3) \sqrt{a_1 a_2}}{64\pi g a_1^3 a_2^2 (a_1 + a_2) \epsilon} + O(1).$$

Заметим, что Ω_1 имеет смысл частоты оборота первого вихря по своей орбите.

Опишем движение вихрей в системе координат, равномерно вращающейся относительно центра с частотой Ω_1 . Из (3.7) сразу следует, что в этой системе в начальном приближении по ϵ второй и третий вихри вращаются с угловой скоростью $-\Omega_1$ по круговым орбитам радиусов r_2 и r_3 .

Чтобы описать движение первого вихря, нужно знать частоту ω относительного движения вихревого треугольника. Эта частота в начальном приближении совпадает с частотой вращения первого и третьего вихрей вокруг их центра завихренности. Последняя дается выражением [2]

$$\omega = \frac{a_1 + a_3}{2\pi a_1 a_3 m_{20}}$$

или с учетом (3.1) и (3.3)

$$\omega = -\frac{1}{\pi g a_1 \sqrt{a_1 a_2} \epsilon^3}.$$

Теперь, интегрируя (3.6), получаем в рассматриваемой системе координат

$$\phi_1 = \frac{\epsilon^2 a_1^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta}{4a_2 (a_1 + a_2)}.$$

Отсюда и выражения для r_1 , переходя от полярных координат к декартовым и исключая θ , находим уравнение траектории первого вихря

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^8}{a^8} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right),$$

где

$$a^2 = 4g a_1 \epsilon^2, \quad b^2 = \frac{4g a_1^5 \epsilon^6}{a_2^2 (a_1 + a_2)^2}.$$

2. Аналогичным образом рассматривается случай $a_2 \rightarrow \pm\infty$. Исходные разложения теперь

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha \epsilon^{-2} + \alpha_0 + \alpha_4 \epsilon^4 + \alpha_6 \epsilon^6 + O(\epsilon^8), \\ h &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \ln m_{i0} + h_4 \epsilon^4 + h_6 \epsilon^6 + O(\epsilon^8), \\ \rho &= \epsilon + \rho_3 \epsilon^3 + \rho_5 \epsilon^5 + O(\epsilon^7), \end{aligned} \tag{3.8}$$

а определяющие соотношения для коэффициентов разложений прежние, за исключением того, что асимптотика для J из (3.2) справедлива вплоть до восьмого по ϵ порядка, а условие (1.19) выполняется при $\phi = \pi$.

Так же, как и ранее, находим

$$\begin{aligned} m_{10} &= \frac{16g a_3^2}{(a_1 + a_3) \epsilon^2}, \quad m_{20} = g(a_1 + a_3) \epsilon^2, \quad m_{30} = \frac{16g a_3^2}{(a_1 + a_3) \epsilon^2}, \\ \alpha &= \frac{4a_3^2}{a_1 + a_3}, \quad \alpha_0 = -a_3, \quad \alpha_4 = -\frac{a_1(a_1 + a_3)}{16a_3}, \quad \dots \\ h_4 &= \frac{(a_1 + a_3)^2}{32\pi a_1 a_3^3}, \quad h_6 = \frac{2a_1^3 + 7a_1^2 a_3 + 8a_1 a_3^2 + 3a_3^3}{256\pi a_1 a_3^4}, \\ \rho_3 &= -\frac{\cos 4\phi}{24} + \frac{\cos 2\phi}{12}, \quad \rho_5 = \frac{7 \cos 8\phi}{2304} - \frac{11 \cos 6\phi}{1440} - \frac{7 \cos 4\phi}{2880} + \frac{\cos 2\phi}{72} - \frac{5}{2304} \end{aligned}$$

и, опуская громоздкие выражения для ρ и ϕ через переменные угол-действие,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{2ga_1^2(1 + \cos \theta)\epsilon^2}{a_1 + a_3} + O(\epsilon^4), \\ r_2^2 &= \frac{16ga_3^2}{(a_1 + a_3)\epsilon^3} + O(1), \quad r_3^2 = \frac{g(a_1^2 - 2a_1a_3 \cos \theta + a_3^2)\epsilon^2}{a_1 + a_3} + O(\epsilon^6), \\ \dot{\phi}_1 &= \Omega_1 - \frac{(a_1 + a_3)^2(\cos 2\theta + \cos \theta)\epsilon^4}{256\pi ga_3^4} + O(\epsilon^6), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{(a_1 + a_3)^2\epsilon^2}{32\pi ga_1 a_3^3} + O(\epsilon^4), \quad \dot{\phi}_3 = \frac{a_3 - a_1 \cos \theta}{2\pi ga_1(a_1^2 - 2a_1a_3 \cos \theta + a_3^2)\epsilon^2} + O(1), \quad (3.10)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{4\pi ga_1 a_3 \epsilon^2} + \frac{(a_1 + a_3)^2\epsilon^2}{64\pi ga_1 a_3^3} + \frac{(a_1 + 2a_3)(a_1 + a_3)^2\epsilon^4}{256\pi ga_1 a_3^4} + O(\epsilon^6).$$

Приятно, что правильное выражение для частоты ω относительного движения вихрей в рассматриваемом случае находится просто дифференцированием гамильтониана (3.8) по действию. Имеем в начальном приближении

$$\omega = -\frac{1}{2\pi ga_1 a_3 \epsilon^2}.$$

Опишем движение вихрей в системе координат, вращающейся относительно центра завихренности с угловой скоростью Ω_1 . Из выражений для r_2^2 и $\dot{\phi}_2$ сразу следует, что в этой системе второй вихрь вращается вокруг центра с угловой скоростью $-\Omega_1$ по круговой орбите радиуса r_2 . Что касается первого и третьего вихрей, то, интегрируя (3.9) и второе выражение в (3.10), находим в этой системе

$$\phi_1 = \frac{a_1(a_1 + a_3)^2(\sin 2\theta + 2\sin \theta)\epsilon^6}{256a_3^3}, \quad \phi_3 = \arctg \frac{(a_1 + a_3) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{a_1 - a_3}.$$

Переходя к декартовым координатам и исключая θ , приходим к уравнениям траекторий первого и второго вихрей:

$$\frac{y_1^8}{b^8} = \frac{x_1^8}{a^8} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right), \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{4ga_1^2\epsilon^2}{a_1 + a_3}, \quad b^2 = \frac{ga_1^4(a_1 + a_3)^3\epsilon^{14}}{256a_3^6},$$

и

$$\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{g(a_1 - a_3)^2\epsilon^2}{a_1 + a_3}, \quad b^2 = g(a_1 + a_3)\epsilon^2.$$

Отметим, что полученные в настоящем параграфе асимптотики траекторий центрального движения полностью согласуются с результатами компьютерного эксперимента.

§ 4. Движение в конфигурации, близкой к коллинеарной

Рассмотрим теперь случай $a \rightarrow 0$, или конкретно $a_1 \rightarrow -a_2a_3/(a_2 + a_3)$.

Будем считать, что

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{a_2a_3}{a_2 + a_3} + \alpha_2\epsilon^2 + \alpha_4\epsilon^4 + O(\epsilon^6), \quad z = \frac{a_2 + a_3}{a_2} + z_2\epsilon^2 + z_4\epsilon^4 + O(\epsilon^6), \\ h &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1a_2a_3} \ln m_{i0} + O(\epsilon^6), \quad \rho = \epsilon + \rho_3\epsilon^3 + O(\epsilon^5), \end{aligned}$$

где z — действительный корень уравнения (1.13). Действуя как при рассмотрении «сингулярного» случая, то есть удовлетворяя условия

$$H(\rho, \phi) = h, \quad J = \frac{1}{2}g\epsilon^2 + O(\epsilon^6),$$

уравнение (1.13) и соотношения (1.19) при $\phi = 0$, найдем

$$\begin{aligned} m_{10} &= 4g(a_2 + a_3), \quad m_{20} = \frac{ga_3^2}{a_2 + a_3}, \quad m_{30} = \frac{ga_2^2}{a_2 + a_3} \\ \alpha_2 &= \frac{a_2^2 a_3^2 (a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)^2}{4(a_3 - a_2)^2 (a_2 + a_3)^5}, \quad \alpha_4 = \frac{a_2^2 a_3^2 (a_2^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)^4}{16(a_2 - a_3)^4 (a_2 + a_3)^9} \\ \rho_3 &= \frac{(2a_2^4 - 13a_2^2 a_3^2 + 2a_3^4) \cos 2\phi}{24(a_2^2 - a_3^2)^2} - \frac{(a_2^4 - 2a_2^2 a_3^2 + a_3^4) \cos 4\phi}{242(a_2^2 - a_3^2)^2}, \end{aligned}$$

а затем

$$r_1^2 = \frac{8g(a_2 + a_3)(a_2^2 - a_3^2)^2(1 - \cos \theta)}{(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)^2} + O(\epsilon^2), \quad (4.1)$$

$$r_2^2 = -\frac{8ga_3^2(2a_2 + a_3)(a_2^2 - a_3^2)(1 - \cos \theta)}{(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)^2} + \frac{4ga_2^2}{a_2 + a_3} + O(\epsilon^2), \quad (4.2)$$

$$r_3^2 = \frac{8ga_2^2(a_2 + 2a_3)(a_2^2 - a_3^2)(1 - \cos \theta)}{(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)^2} + \frac{4ga_3^2}{a_2 + a_3} + O(\epsilon^2), \quad (4.3)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \Omega_1 - \frac{3(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2) \cos \theta}{64\pi g(a_2^2 - a_3^2)^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^4), \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{(2a_2 + a_3)((a_3 - a_2)(a_2 + a_3)^2(\cos \theta - 1) - a_2(a_3^2 + a_2 a_3 + a_2^2))}{2\pi a_2^2(a_2 + a_3)(a_3^2 + a_2 a_3 + a_2^2)r_2^2} + O(\epsilon^2), \\ \dot{\phi}_3 &= \frac{(a_2 + 2a_3)((a_2 - a_3)(a_2 + a_3)^2(\cos \theta - 1) - a_3(a_3^2 + a_2 a_3 + a_2^2))}{2\pi a_3^2(a_2 + a_3)(a_3^2 + a_2 a_3 + a_2^2)r_3^2} + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

где

$$\Omega_1 = -\frac{a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2}{16\pi g a_2^2 a_3^2} - \frac{(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)(a_2^4 + a_2^3 a_3 - a_3^2 a_2^2 + a_2 a_3^3 + a_3^4)}{64\pi g a_2^2 a_3^2 (a_2^2 - a_3^2)^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^4).$$

Используя правильное выражение для частоты относительного движения вихрей

$$\omega = -\frac{a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2}{8\pi g a_2^2 a_3^2},$$

интегрированием полученных уравнений находим в системе отсчета, вращающейся вокруг центра завихренности с угловой скоростью Ω_1 ,

$$\phi_1 = \frac{3a_3^2 a_2^2 \sin \theta}{8(a_2^2 - a_3^2)^2} \epsilon^2, \quad \phi_2 = \arctg \frac{(a_2 + 2a_3)(-a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{a_2(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)}, \quad (4.4)$$

$$\phi_3 = \arctg \frac{(a_3 + 2a_2)(-a_3^2 + a_2 a_3 + a_2^2) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{a_3(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)}. \quad (4.5)$$

Теперь из (4.1)–(4.3) и (4.4), (4.5) находим уравнения траектории вихрей в указанной системе отсчета. Имеем для первого вихря

$$\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^4}{a^4} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right),$$

где

$$a^2 = \frac{16g(a_3 - a_2)(a_3^2 - a_2^2)^2}{(a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2)^2}, \quad b^2 = \frac{9ga_2^4a_3^4}{(a_3 - a_2)(a_3^2 - a_2^2)(a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2)^2},$$

и для двух других

$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a^2 = \frac{4ga_i^2}{a_i + a_j}, \quad b^2 = \frac{4g(a_i + 2a_j)^2(a_j^2 + a_ia_j - a_i^2)^2}{(a_i + a_j)(a_i^2 + a_ia_j + a_j^2)^2}.$$

Полученные траектории вихрей согласуются с траекториями на рис. 7 при $a_1 = -1.501$.

§ 5. Окрестное движение

Осталось рассмотреть движение вихрей в конфигурации, близкой к центральной, т. е. когда траектория первого вихря проходит вблизи центра завихренности. Будем считать для определенности, что интенсивности всех вихрей положительны и $a_3 \rightarrow 0$.

Примем

$$a_3 = -\frac{1}{2}\beta\sqrt{a_1a_2}\epsilon + O(\epsilon^4),$$

$$h = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_1a_2a_3} \ln m_{i0} + O(\epsilon^2), \quad m_{10} = m_{30} = 4ga_2, \quad m_{20} = ga_1\epsilon^2,$$

$$r = \epsilon + O(\epsilon^3),$$

где β — постоянная. Имеем тогда

$$H(\rho, \phi) = h, \quad J = \frac{1}{2}g\epsilon^2 + O(\epsilon^4), \quad \phi = -\theta + O(\epsilon^2),$$

и далее

$$r_1^2 = ga_1(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2)\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \quad r_2^2 = 4ga_2 + O(\epsilon),$$

$$r_3^2 = g\beta^2a_1\epsilon^2 + \frac{g\beta^2\sqrt{a_1}(a_1\beta + 2a_2\beta - 2a_2 \cos \theta)}{2\sqrt{a_2}}\epsilon^3 + O(\epsilon^4),$$

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1 - \beta \cos \theta}{\pi ga_1\sqrt{a_1a_2}(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2)\beta\epsilon^3} + \dots + O(\epsilon), \quad (5.1)$$

$$\dot{\phi}_2 = -\frac{1}{4\pi g\beta a_2\sqrt{a_1a_2}\epsilon} + O(1), \quad \dot{\phi}_3 = \frac{\cos \theta}{2\pi g\beta a_1^2\epsilon^2} + O(\epsilon), \quad (5.2)$$

где многоточие представляет слагаемые, опущенные из-за их громоздкости.

Частота относительного движения вихрей в рассматриваемом случае дается выражением

$$\omega = -\frac{1}{\pi ga_1\sqrt{a_1a_2}\beta\epsilon^3}.$$

Интегрируя (5.1) по периоду относительного движения, находим частоту обращения первого вихря по орбите

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(1 - \beta))\omega + O(\epsilon).$$

Интегрируя (5.1) и второе выражение в (5.2) по времени, получаем с требуемой точностью в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω_1 ,

$$\phi_1 = \text{arctg} \frac{(1 + \beta) \text{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \beta} + \frac{\text{sign}(1 - \beta^2)\theta}{2},$$

$$\phi_3 = -\frac{\sqrt{a_2} \sin \theta}{2\sqrt{a_1}}\epsilon + \frac{1 + \text{sign}(1 - \beta^2)\theta}{2}.$$

Теперь, используя найденные выражения для полярных координат вихрей, не представляет труда выписать траектории первого и третьего вихрей. Имеем

$$(x_i - x_{i0})^2 + y_i^2 = r_i^2,$$

$$x_{10} = -\sqrt{ga_1}\beta\epsilon, \quad r_1 = \sqrt{ga_1}\epsilon, \quad x_{30} = 0, \quad r_3 = -\sqrt{ga_1}\beta\epsilon \quad (\beta < 1),$$

$$x_{10} = -\sqrt{ga_1}\epsilon, \quad r_1 = \sqrt{ga_1}\beta\epsilon, \quad x_{30} = \sqrt{ga_1}\beta\epsilon, \quad r_3 = \frac{\sqrt{ga_2}\beta\epsilon^2}{2} \quad (\beta > 1).$$

Второй вихрь в принятой системе координат вращается вокруг центра с угловой скоростью $\dot{\phi}_2 - \Omega_1$ по круговой орбите радиуса r_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 386 с.
2. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. — Киев: Наук. думка, 1993. — 280 с.
3. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plain // Reg. & Chaot. Dyn. — 2004. — Vol. 9, № 2. — P. 101–112.
4. Nayfeh A. H. Perturbation methods. — A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, New York, 1973. — 425 p.

Поступила в редакцию 01.09.08

A. I. Gudimenko, K. G. Kuptsov

Motion of three point vortices under the condition that one of them passes through the vorticity center

We use numerical analysis and theory of perturbation to investigate the motion of three point vortices under the condition that one of them passes through the vorticity center.

Keywords: point vortices, perturbation theory, asymptotic behavior

Mathematical Subject Classifications: 37N10, 37D45, 76B47, 76E20, 76U05

Гудименко Алексей Иванович,
ст. научный сотрудник,
Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН,
690041, г. Владивосток, ул. Балтийская, 43
E-mail: algud@poi.dvo.ru