ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МЕХАНИКА 2009. Вып. 2

УДК 517.9

© *Н. В. Любашевская, А. П. Чупахин*

БАЗИС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ГРУППЫ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ГРИНА–НАГДИ[1]

Рассматривается система уравнений Грина–Нагди, описывающая распространение длинных волн на поверхности жидкости. Построены продолжения операторов алгебры симметрии уравнений Грина–Нагди, вычислены ее дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования. Доказана теорема о базисе дифференциальных инвариантов алгебры симметрии уравнений Грина–Нагди. Кроме того, описаны связи между дифференциальными инвариантами, порождаемые операторами инвариантного дифференцирования и самими дифференциальными уравнениями. Для построения в дальнейшем дифференциально инвариантных решений необходимо исследование условий совместности полученной переопределенной системы.

Ключевые слова: уравнения Грина–Нагди, дифференциальные инварианты, операторы инвариантного дифференцирования, базис дифференциальных инвариантов.

Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений [1] позволяет получать широкие классы точных решений уравнений произвольного вида. Особенно эффективны его алгоритмы при исследовании математических моделей физики и механики континуума, обладающих по своему построению широкой группой симметрии. Многочисленные примеры новых нетривиальных решений в газовой динамике можно найти в работах [2, 3, 4].

Инвариантные решения строятся путем дописывания к исходной системе дифференциальных уравнений представлений всех исходных функций через инварианты. Для частично инвариантных решений лишь часть искомых функций имеет такое представление, а оставшиеся являются, вообще говоря, произвольными. Такая ситуация порождает переопределенную систему дифференциальных уравнений для этих функций, число которых меньше числа уравнений в исходной системе. Условия совместности этой переопределенной системы при приведении ее в инволюции служат для определения этих функций, названных в [1] «лишними». Приведение переопределенной системы дифференциальных уравнений в инволюцию осуществляется алгоритмом Картана, но его практическая реализация в конкретных случаях может оказаться достаточно сложной. Вместе с тем, частично инвариантные решения представляют значительный интерес, поскольку они обладают большей общностью по сравнению с инвариантными и не могут быть получены иначе, чем регулярным применением теоретико-групповых методов.

Дальнейшим обобщением инвариантных решений являются дифференциально инвариантные. Они получаются при дописывании к системе дифференциальных уравнений соотношений, связывающих дифференциальные инварианты [1]. Исследование дифференциальных инвариантов групп непрерывных преобразований было начато в работах Софуса Ли. Позже эта теория получила свое развитие в работах Овсянникова [1] и Олвера [5, 6]. Исследование таких решений представляется очень сложной задачей, поскольку на сегодняшний день отсутствует законченная теория дифференциально инвариантных решений [7]. Имеются примеры построения таких решений, носящие в значительной мере «экспериментальный» характер [8, 9]. Одной из основных проблем этой теории сегодня является отсутствие теорем о редукции дифференциально инвариантных решений к инвариантным или частично инвариантным. Между тем

[1]Работа поддержана грантом Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-2817.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 06–01–00258, 09–01–00403).

дифференциально инвариантные решения составляют содержательные классы решений. Так, потенциальные решения в гидро- и газодинамике выделяются условиями $\operatorname{rot}\vec{u}=0$, являющимися дифференциальными уравнениями относительно искомой функции $\vec{u}$ и выражающими равенство нулю дифференциального инварианта группы Галилея.

В данной работе решается задача построения базиса дифференциальных инвариантов группы симметрии уравнений Грина–Нагди [10]. Эти уравнения являются популярной моделью длинных волн. Для них описаны все инвариантные и частично инвариантные решения [11], причем доказано, что все вторые редуцируются к первым. Множество инвариантных решений хорошо обозримо, что облегчает задачу построения существенно новых дифференциально инвариантных решений. Отметим, что вопрос о существовании многозначных решений для уравнений Грина-Нагди является на сегодняшний день открытым. Интересно, что алгебры симметрии L_4 уравнений Грина–Нагди и Кортевега–де Фриза являются изоморфными. Их представление является,конечно, различным.

В работе построены явно дифференциальные инварианты алгебры симметрии L_4 до третьего порядка включительно. Найдены операторы инвариантного дифференцирования и построен базис дифференциальных инвариантов, состоящий из четырех образующих. Построены алгебраические соотношения, связывающие дифференциальные инварианты в силу уравнений и их инвариантных продолжений.

§ 1. Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений Грина–Нагди

Рассматривается система уравнений Грина–Нагди (модель мелкой воды), описывающая распространение длинных волн на поверхности жидкости [10]:

$$\begin{cases} h_t+(uh)_x=0, \\ u_t+uu_x+gh_x=\dfrac{[h^3(u_{tx}+uu_{xx}-u_x^2)]_x}{3h}. \end{cases} \tag{1.1}$$

В (1.1) через $h(t,x)$, $u(t,x)$ обозначены высота свободной поверхности жидкости над горизонтальным дном $(h>0)$ и средняя скорость движения жидкости в горизонтальном направлении; $g=\mathrm{const}$ — ускорение свободного падения.

Система уравнений (1.1) допускает группу непрерывных преобразований, базис алгебры Ли которой имеет вид [11]

$$X_1=\partial_t,\quad X_2=\partial_x,\ \ X_3=t\partial_x+\partial_u,\quad X_4=t\partial_t+2x\partial_x+u\partial_u+2h\partial_h. \tag{1.2}$$

Точные решения для системы уравнений (1.1) (инвариантные и частично инвариантные), построенные методами группового анализа [1], были получены в [11]. Показано, что все инвариантные решения уравнений (1.1) относятся к одному из следующих типов:

а) галилеево-инвариантные решения:

• галилеево-инвариантные решения, порождаемые подалгеброй $\langle X_1+\beta X_3\rangle$ с вещественным параметром $\beta\neq 0$, имеющие представление

$$u=\beta t+U(y),\quad h=H(y),\ \ UH=c_1, \tag{1.3}$$

где $y=x-\beta t^2/2$, $c_1=const$. В обозначениях

$$w=\left(\beta c_1/\sqrt{3}\right)^{1/3}/U,\quad y=\left(c_1^2/(3\beta)\right)^{1/3}\xi-c_2,$$

где $\alpha=-\sqrt{3}g/(4\beta)$, c_2 — постоянные, фактор-уравнение, описывающее данные решения, имеет вид

$$w\frac{d^2w}{d\xi^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\xi}\right)-\xi w^2+4\alpha w^3-\frac{1}{2}; \tag{1.4}$$

• галилеево-инвариантные решения, порождаемые подалгеброй $\langle X_3\rangle$, имеющие представление

$$u=(x+u_0)/t,\quad h=h_0/t, \tag{1.5}$$

где u_0, h_0 — произвольные постоянные;

• галилеево-инвариантные автомодельные решения, порождаемые подалгеброй $\langle X_1 + \beta X_3, X_4\rangle$, имеющие представление

$$u = \beta t, \quad h = \big(\beta^2/(2g)\big)\big(t^2 - 2x/\beta\big), \tag{1.6}$$

вещественный параметр $\beta \neq 0$;

б) стационарные решения, порождаемые подалгеброй $\langle X_1\rangle$, имеющие представление

$$u = U(x), \quad h = H(x), \;\; UH = c_1, \tag{1.7}$$

где $c_1 \neq 0$ — вещественный параметр. Фактор-уравнение, описывающее такие решения, приводится к эллиптическому интегралу:

$$\int_{h_0}^{H} (-3gc_1^{-2}H^3 + c_2H^2 + c_3H + 3)^{-1/2} dH = c_4 \pm x, \tag{1.8}$$

где c_2, c_3, c_4 — постоянные. Положив в (1.8) $c_1 = j\sqrt{g}$, $c_2 = 3+6/j^2$, $c_3 = -6-3/j^2$, $c_4 = 0$, $h_0 = j^2$, $|j| > 1$, получим односолитонное решение уравнений Грина-Нагди:

$$u = j\sqrt{g}\big(j^2 + (1-j^2)\,\mathrm{th}^2\,\xi\big)^{-1}, \quad h = j^2 + (1-j^2)\,\mathrm{th}^2\,\xi, \quad \xi = \big(\sqrt{3(j^2-1)}/(2j)\big)x;$$

в) автомодельные решения, порождаемые подалгеброй $\langle X_4\rangle$, имеющие представление

$$u = tU(z), \quad h = t^2 H(z), \;\; z = xt^{-2}. \tag{1.9}$$

Фактор-система для функций U и H имеет вид

$$\begin{gathered} (UH)' - 2zH' + 2H = 0, \\ 3H\big(g + (U-2z)U' + U\big) + \big(H^3(U' + U'^2 + (2z-U)U'')\big)' = 0. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Известно ее однопараметрическое частное решение $U = c_1$, $H = (c_1/g)(c_1/2 - z)$. Кроме решений (1.3)–(1.10) имеются тривиальные, для которых $u = u_0 = \mathrm{const}$, $h = h_0 = \mathrm{const}$, при этом возможно $u_0 = 0$ или $h_0 = 0$.

Все частично инвариантные решения редуцируются к инвариантным и, следовательно, либо являются тривиальными, либо принадлежат к одному из указанных типов.

Кроме того, в [11] доказано, что решения (1.3)–(1.10) исчерпывают все множество инвариантных и частично инвариантных решений уравнений (1.1). По оптимальной системе подалгебр алгебры симметрии (1.2) строятся возможные представления инвариантных и частично инвариантных решений, а затем анализируются получающиеся при этом фактор-системы.

Система уравнений Грина–Нагди (1.1) допускает алгебру Ли (1.2), изоморфную алгебре симметрии уравнения Кортевега–де Фриза. Инвариантные решения (1.3)–(1.10) имеют соответствующие аналоги и для этого уравнения. Вопрос о существовании многосолитонных решений для уравнений Грина–Нагди (1.1) на данный момент остается открытым.

§ 2. Дифференциальные инварианты: общая теория

Дифференциально инвариантные решения являются более общими по сравнению с инвариантными и частично инвариантными. Их построение основано на вычислении базиса дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Дифференциально инвариантные решения получаются добавлением к исходной системе дифференциальных уравнений связей между дифференциальными инвариантами. Поэтому первостепенной задачей исследования дифференциально инвариантных решений является вычисление базиса дифференциальных инвариантов.

Основные утверждения теории дифференциальных инвариантов изложены в [7]. Представим далее их краткий обзор.

Пусть $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)\}$, $\mathcal{U} = \{\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m)\}$ — евклидовы пространства независимых и зависимых переменных соответственно. Рассматривается последовательность продолженных пространств:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{U},\ \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 \times \mathcal{U}_1, \ldots,\ \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_{k-1} \times \mathcal{U}_k, \ldots, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{U}_k = \left\{\mathbf{p_k} = \left(\dfrac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial (x^1)^{i_1} \ldots \partial (x^n)^{i_n}}\right)\bigg| i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}, i_1 + \ldots + i_n = k\right\}$ — пространства всех частных производных порядка $k \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathcal{L}_\infty$ формально определяется как бесконечно расширенное по k пространство $\mathcal{L}_k$. Пусть операторы

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(x,u)\partial_{x^i} + \eta^k_\alpha(x,u)\partial_{u^k}, \quad \alpha = 1, \ldots, r \tag{2.2}$$

образуют базис алгебры Ли L_r. Продолженные операторы (2.2), действующие в пространствах (2.1), имеют вид

$$\underset{k}{X_\alpha} = X_\alpha + \sum_{i_1+\ldots+i_n \leqslant k} \zeta^l_{\alpha i_1 \ldots i_n} \partial_{p^l_{i_1 \ldots i_n}}. \tag{2.3}$$

Рассматривается последовательность общих рангов координат операторов (2.3):

$$r_0 = \mathrm{rank}(\xi^i_\alpha \eta^k_\alpha), \quad r_1 = \mathrm{rank}(\xi^i_\alpha \eta^k_\alpha \zeta^l_\alpha), \quad \ldots, \quad r_k = \mathrm{rank}(\xi^i_\alpha \ldots \zeta^l_{\alpha i_1, \ldots, i_n}). \tag{2.4}$$

Эта последовательность не убывает и ограничена сверху размерностью алгебры симметрии L_r:

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_k \leqslant r_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant r. \tag{2.5}$$

В изучении дифференциальных инвариантов важную роль играет условие *стабилизации ранга в цепочке* (2.5). Справедливы утверждения:

- если $r_k = r_{k+1} = r_{k+2}$, то $r_k = r$;
- если $r_\kappa = r_{\kappa+1}$ и $r_\lambda = r_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda > \kappa$, то $r_\mu = r_\lambda$ справедливо для всех $\mu \geqslant \lambda$.

Размерность пространств $\mathcal{L}_k$, выраженная формулой $\nu_k = \dim \mathcal{L}_k = n + m\binom{n+k}{n}$, неограниченно возрастает с ростом k. Поэтому для достаточно больших k расширенная алгебра симметрии $\underset{k}{L_r}$ должна иметь инварианты, которые для $k \geqslant 1$ называются *дифференциальными*.

Пусть J_k — множество дифференциальных инвариантов алгебры $\underset{k}{L_r}$ в пространстве $\mathcal{L}_k$, $t_k = \mathrm{dim} J_k = \nu_k - r_k$ и J — объединение всех таких множеств:

$$J = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k, \quad J_{k+1} \supset J_k. \tag{2.6}$$

На множестве (2.6) определены дифференциальные операторы первого порядка:

$$\delta = \lambda^i D_i, \tag{2.7}$$

где D_i — операторы полного дифференцирования, $\lambda^i \in \mathcal{L}_k$. Операторы (2.7), переводящие один дифференциальный инвариант в другой, называются *операторами инвариантного дифференцирования*. В общем случае они не совпадают с операторами полного дифференцирования D_i. Операторы инвариантного дифференцирования алгебры L_r образуют алгебру Ли. Обозначим ее $\Delta(L_r)$. Справедливы следующие утверждения:

пусть $f \in J$, g — произвольная гладкая функция, δ_1, $\delta_2 \in \Delta(L_r)$, тогда:

- $g(f) \in J$;
- $\delta_i f \in J$ $(i = 1, 2)$;
- $\delta_1(\delta_2 f) \in J$, $\delta_2(\delta_1 f) \in J$;
- $[\delta_1, \delta_2] f \in J$.

Конструктивное описание алгебры $\Delta(L_r)$ дается следующими утверждениями.

Лемма 1. *Любой оператор* (2.7), *коммутирующий с каждым оператором* $\underset{k}{X_\alpha} \in \underset{\infty}{L_r}$, *принадлежит* $\Delta(L_r)$.

Лемма 2. *Для любой алгебры* L_r *имеем* $\dim_J \Delta(L_r) = n$ *: существует* $n = \dim\mathcal{X}$ *операторов инвариантного дифференцирования, линейно независимых над полем* J.

Лемма 1 дает алгоритм для нахождения координат λ^i операторов $\lambda^i D_i \in \Delta(L_r)$. Они определяются из следующего уравнения:

$$\underset{k}{X_\alpha}\lambda^l = (\lambda^l D_l)\xi^i_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Если искать λ^i в неявном виде как $\lambda^i = \lambda^i(z)$ из уравнения $\varphi(z_k, \lambda) = 0$, $z_k \in \mathcal{L}_k$, то система (2.8) принимает вид:

$$\left[\underset{k}{X_\alpha} + (\lambda^l D_l)\xi^i_\alpha \partial_{\lambda^i}\right]\varphi = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{2.9}$$

Для образования новых дифференциальных инвариантов на множестве J существует два способа. Движение «по горизонтали» относительно порядка k дифференциальных инвариантов на множестве всех дифференциальных инвариантов, заключающееся в порождении новых инвариантов как функций от старых, не повышает их порядка. Действие операторов инвариантного дифференцирования повышает, вообще говоря, порядок k и может быть интерпретировано как движение «по вертикали» на множестве дифференциальных инвариантов.

Справедлива следующая

Теорема 1. 1) *Для любой алгебры Ли* L_r *множество* J *порождается операциями инвариантного дифференцирования и конечным числом функциональных операций.*
2) *Конечная система порождающих элементов в* J, *называемая базисом дифференциальных инвариантов, принадлежит* $J_{\kappa+1}$, *где* κ *— наименьшее из чисел, для которых происходит стабилизация* $r_\kappa = r$ *в последовательности* (2.5).

§ 3. Базис дифференциальных инвариантов уравнений Грина–Нагди

Итак, рассматривается система уравнений Грина–Нагди (1.1), допускающая алгебру симметрии с базисом (1.2). Операторы переноса X_1, X_2 — непродолжаемы, для операторов X_3, X_4 построены продолжения до 3-го порядка (табл. 1).

Таблица 1. Продолжения операторов

	∂_t	∂_x	∂_u	∂_h	∂_{u_t}	∂_{u_x}	∂_{h_t}	∂_{h_x}	$\partial_{u_{tt}}$	$\partial_{u_{tx}}$	$\partial_{u_{xx}}$	$\partial_{h_{tt}}$	$\partial_{h_{tx}}$
X_3	0	t	1	0	$-u_x$	0	$-h_x$	0	$-2u_{tx}$	$-u_{xx}$	0	$-2h_{tx}$	$-h_{xx}$
X_4	t	$2x$	u	$2h$	0	$-u_x$	h_t	0	$-u_{tt}$	$-2u_{tx}$	$-3u_{xx}$	0	$-h_{tx}$

	$\partial_{u_{ttt}}$	$\partial_{u_{ttx}}$	$\partial_{u_{txx}}$	$\partial_{u_{xxx}}$	$\partial_{h_{ttt}}$	$\partial_{h_{ttx}}$	$\partial_{h_{txx}}$	$\partial_{h_{xxx}}$	$\partial_{h_{xx}}$
X_3	$-3u_{ttx}$	$-2u_{txx}$	$-u_{xxx}$	0	$-3h_{ttx}$	$-2h_{txx}$	$-h_{xxx}$	0	0
X_4	$-2u_{ttt}$	$-3u_{ttx}$	$-4u_{txx}$	$-5u_{xxx}$	$-h_{ttt}$	$-2h_{ttx}$	$-3h_{txx}$	$-4h_{xxx}$	$-2h_{xx}$

Вычислены размерности расширенных пространств $\mathcal{L}_k$, ранги r_k и число инвариантов $t_k \in J_k$ (табл. 2).

Дифференциальные инварианты — это инварианты группы, продолженной на производные. Следует подчеркнуть, что они существенно зависят от производных [5, 7, 8, 9].

В табл. 2 число инвариантов t_k, принадлежащих $\mathcal{L}_k$, представлено в виде суммы, в которой первый член соответствует числу инвариантов из $\mathcal{L}_{k-1}$, второй — числу новых инвариантов, появляющихся в $\mathcal{L}_k$. Стабилизация наступает при $\kappa = 1$.

Таблица 2. Параметры продолжений

k	ν_k	r_k	t_k
0	4	4	0
1	8	4	4
2	14	4	$10 = 4 + 6$
3	22	4	$18 = 10 + 8$

1. Вычисление дифференциальных инвариантов порядка $k = 1$.

$$\underset{1}{X_3} = t\partial_x + \partial_u + (-u_x)\partial_{u_t} + 0 \cdot \partial_{u_x} + (-h_x)\partial_{h_t} + 0 \cdot \partial_{h_x}.$$

Из соотношений $\dfrac{du}{1} = \dfrac{dh}{0} = \dfrac{du_t}{-u_x} = \dfrac{du_x}{0} = \dfrac{dh_t}{-h_x} = \dfrac{dh_x}{0}$ находятся инварианты оператора $\underset{1}{X_3}$:

$$h,\ \alpha_1 = u_t + uu_x,\ u_x,\ \beta_1 = h_t + uh_x,\ h_x.$$

$$\underset{1}{X_4} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h + 0 \cdot \partial_{u_t} + (-u_x)\partial_{u_x} + (-h_t)\partial_{h_t} + 0 \cdot \partial_{h_x}.$$

Действие оператора $\underset{1}{X_4}$ на инварианты α_1, β_1 оператора $\underset{1}{X_3}$:

$$\underset{1}{X_4}\alpha_1 = 0,$$
$$\underset{1}{X_4}\beta_1 = \beta_1.$$

Оператор $\underset{1}{X_4}$ в терминах инвариантов оператора $\underset{1}{X_3}$:

$$\underset{1}{X_4} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h + 0 \cdot \partial_{\alpha_1} + (-u_x)\partial_{u_x} + \beta_1\partial_{\beta_1} + 0 \cdot \partial_{h_x}.$$

Наконец, из соотношений $\dfrac{dh}{2h} = \dfrac{d\alpha_1}{0} = \dfrac{du_x}{-u_x} = \dfrac{d\beta_1}{\beta_1} = \dfrac{dh_x}{0}$ вычисляются инварианты оператора $\underset{1}{X_4}$ — дифференциальные инварианты порядка $k = 1$:

$$\alpha_1,\ hu_x^2,\ u_x\beta_1,\ h_x. \tag{3.1}$$

2. Вычисление дифференциальных инвариантов порядка $k = 2$.

$$\underset{2}{X_3} = t\partial_x + \partial_u + (-u_x)\partial_{u_t} + 0 \cdot \partial_{u_x} + (-h_x)\partial_{h_t} + 0 \cdot \partial_{h_x} + (-2u_{tx})\partial_{u_{tt}} + (-u_{xx})\partial_{u_{tx}} +$$
$$+ 0 \cdot \partial_{u_{xx}} + (-2h_{tx})\partial_{h_{tt}} + (-h_{xx})\partial_{h_{tx}} + 0 \cdot \partial_{h_{xx}}.$$

Из соотношений $\dfrac{du}{1} = \dfrac{du_{tt}}{-2u_{tx}} = \dfrac{du_{tx}}{-u_{xx}} = \dfrac{du_{xx}}{0} = \dfrac{dh_{tt}}{-2h_{tx}} = \dfrac{dh_{tx}}{-h_{xx}} = \dfrac{dh_{xx}}{0}$ находятся шесть новых инвариантов оператора $\underset{2}{X_3}$:

$$\alpha_2^1 = u_{tt} + 2uu_{tx} + u^2u_{xx},\ \alpha_2^2 = u_{tx} + uu_{xx},\ u_{xx},$$
$$\beta_2^1 = h_{tt} + 2uh_{tx} + u^2h_{xx},\ \beta_2^2 = h_{tx} + uh_{xx},\ h_{xx}.$$

$$\underset{2}{X_4} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h + 0 \cdot \partial_{u_t} + (-u_x)\partial_{u_x} + (-h_t)\partial_{h_t} + 0 \cdot \partial_{h_x} +$$
$$+ (-u_{tt})\partial_{u_{tt}} + (-2u_{tx})\partial_{u_{tx}} + (-3u_{xx})\partial_{u_{xx}} + 0 \cdot \partial_{h_{tt}} + (-h_{tx})\partial_{h_{tx}} + (-2h_{xx})\partial_{h_{xx}}.$$

Действие оператора $\underset{2}{X_4}$ на инварианты $\alpha_2^1,\ \alpha_2^2,\ \beta_2^1,\ \beta_2^2$ оператора $\underset{2}{X_3}$:

$$\begin{aligned}
&\underset{2}{X_4}\alpha_2^1 = -\alpha_2^1,\\
&\underset{2}{X_4}\alpha_2^2 = -2\alpha_2^2,\\
&\underset{2}{X_4}\beta_2^1 = 0,\\
&\underset{2}{X_4}\beta_2^2 = -\beta_2^2.
\end{aligned}$$

Оператор $\underset{2}{X_4}$ в терминах инвариантов оператора $\underset{2}{X_3}$:

$$\underset{2}{X_4} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h + 0\cdot\partial_{\alpha_1} + (-u_x)\partial_{u_x} + \beta_1\partial_{\beta_1} + 0\cdot\partial_{h_x} + (-\alpha_2^1)\partial_{\alpha_2^1} + (-2\alpha_2^2)\partial_{\alpha_2^2} +$$
$$+(-3u_{xx})\partial_{u_{xx}} + 0\cdot\partial_{\beta_2^1} + (-\beta_2^2)\partial_{\beta_2^2} + (-2h_{xx})\partial_{h_{xx}}.$$

Снова из соотношений $\dfrac{u_x}{-u_x} = \dfrac{d\alpha_2^1}{-\alpha_2^1} = \dfrac{d\alpha_2^2}{-2\alpha_2^2} = \dfrac{du_{xx}}{-3u_{xx}} = \dfrac{d\beta_2^1}{0} = \dfrac{d\beta_2^2}{-\beta_2^2} = \dfrac{dh_{xx}}{-2h_{xx}}$ вычисляются инварианты оператора $\underset{2}{X_4}$ — дифференциальные инварианты порядка $k = 2$:

$$u_x^{-1}\alpha_2^1,\ u_x^{-2}\alpha_2^2,\ u_x^{-3}u_{xx}, \beta_2^1,\ u_x^{-1}\beta_2^2,\ u_x^{-2}h_{xx}. \tag{3.2}$$

3. Вычисление дифференциальных инвариантов порядка $k = 3$.

$$\underset{3}{X_3} = t\partial_x + \partial_u + (-u_x)\partial_{u_t} + 0\cdot\partial_{u_x} + (-h_x)\partial_{h_t} + 0\cdot\partial_{h_x} + (-2u_{tx})\partial_{u_{tt}} + (-u_{xx})\partial_{u_{tx}} +$$
$$+0\cdot\partial_{u_{xx}} + (-2h_{tx})\partial_{h_{tt}} + (-h_{xx})\partial_{h_{tx}} + 0\cdot\partial_{h_{xx}} + (-3u_{ttx})\partial_{u_{ttt}} + (-2u_{txx})\partial_{u_{ttx}} + (-u_{xxx})\partial_{u_{txx}} +$$
$$+0\cdot\partial_{u_{xxx}} + (-3h_{ttx})\partial_{h_{ttt}} + (-2h_{txx})\partial_{h_{ttx}} + (-h_{xxx})\partial_{h_{txx}} + 0\cdot\partial_{h_{xxx}}.$$

Из соотношений $\dfrac{du}{1} = \dfrac{du_{ttt}}{-3u_{ttx}} = \dfrac{du_{ttx}}{-2u_{txx}} = \dfrac{du_{txx}}{-u_{xxx}} = \dfrac{du_{xxx}}{0} = \dfrac{dh_{ttt}}{-3h_{ttx}} = \dfrac{dh_{ttx}}{-2h_{txx}} = \dfrac{dh_{txx}}{-h_{xxx}} = $ $= \dfrac{dh_{xxx}}{0}$ находятся восемь новых инвариантов оператора $\underset{3}{X_3}$:

$$\alpha_3^1 = u_{ttt} + 3uu_{ttx} + 3u^2u_{txx} + u^3u_{xxx},\ \alpha_3^2 = u_{ttx} + 2uu_{txx} + u^2u_{xxx},\ \alpha_3^3 = u_{txx} + uu_{xxx},\ u_{xxx},$$
$$\beta_3^1 = h_{ttt} + 3uh_{ttx} + 3u^2h_{txx} + u^3h_{xxx},\ \beta_3^2 = h_{ttx} + 2uh_{txx} + u^2h_{xxx},\ \beta_3^3 = h_{txx} + uh_{xxx},\ h_{xxx}.$$

$$\underset{3}{X_4} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h + 0\cdot\partial_{u_t} + (-u_x)\partial_{u_x} + (-h_t)\partial_{h_t} + 0\cdot\partial_{h_x} + (-u_{tt})\partial_{u_{tt}} +$$
$$+(-2u_{tx})\partial_{u_{tx}} + (-3u_{xx})\partial_{u_{xx}} + 0\cdot\partial_{h_{tt}} + (-h_{tx})\partial_{h_{tx}} + (-2h_{xx})\partial_{h_{xx}} + (-2u_{ttt})\partial_{u_{ttt}} + (-3u_{ttx})\partial_{u_{ttx}} +$$
$$+(-4u_{txx})\partial_{u_{txx}} + (-5u_{xxx})\partial_{u_{xxx}} + (-h_{ttt})\partial_{h_{ttt}} + (-2h_{ttx})\partial_{h_{ttx}} + (-3h_{txx})\partial_{h_{txx}} + (-4h_{xxx})\partial_{h_{xxx}}.$$

Действие оператора $\underset{3}{X_4}$ на инварианты $\alpha_3^1,\ \alpha_3^2,\ \alpha_3^3,\ \beta_3^1,\ \beta_3^2,\ \beta_3^3$ оператора $\underset{3}{X_3}$:

$$\begin{aligned}
&\underset{3}{X_4}\alpha_3^1 = -2\alpha_3^1,\\
&\underset{3}{X_4}\alpha_3^2 = -3\alpha_3^2,\\
&\underset{3}{X_4}\alpha_3^3 = -4\alpha_3^3,\\
&\underset{3}{X_4}\beta_3^1 = -\beta_3^1,\\
&\underset{3}{X_4}\beta_3^2 = -2\beta_3^2.\\
&\underset{3}{X_4}\beta_3^3 = -3\beta_3^3.
\end{aligned}$$

Оператор $\underset{2}{X_4}$ в терминах инвариантов оператора $\underset{2}{X_3}$:

$$\underset{2}{X_4} = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u + 2h\partial_h + 0\cdot\partial_{\alpha_1} + (-u_x)\partial_{u_x} + \beta_1\partial_{\beta_1} + 0\cdot\partial_{h_x} + (-\alpha_2^1)\partial_{\alpha_2^1} + (-2\alpha_2^2)\partial_{\alpha_2^2} +$$
$$+(-3u_{xx})\partial_{u_{xx}} + 0\cdot\partial_{\beta_2^1} + (-\beta_2^2)\partial_{\beta_2^2} + (-2h_{xx})\partial_{h_{xx}} + (-2\alpha_3^1)\partial_{\alpha_3^1} + (-3\alpha_3^2)\partial_{\alpha_3^2} + (-4\alpha_3^3)\partial_{\alpha_3^3} +$$
$$+(-5u_{xxx})\partial_{u_{xxx}} + (-\beta_3^1)\partial_{\beta_3^1} + (-2\beta_3^2)\partial_{\beta_3^2} + (-3\beta_3^3)\partial_{\beta_3^3} + (-4h_{xxx})\partial_{h_{xxx}}.$$

И снова из соотношений $\dfrac{u_x}{-u_x} = \dfrac{d\alpha_3^1}{-2\alpha_3^1} = \dfrac{d\alpha_3^2}{-3\alpha_3^2} = \dfrac{d\alpha_3^3}{-4\alpha_3^3} = \dfrac{du_{xxx}}{-5u_{xxx}} = \dfrac{d\beta_3^1}{-\beta_3^1} = \dfrac{d\beta_3^2}{-2\beta_3^2} = \dfrac{d\beta_3^3}{-3\beta_3^3} =$ $= \dfrac{dh_{xxx}}{-4h_{xxx}}$ вычисляются инварианты оператора $\underset{3}{X_4}$ — дифференциальные инварианты порядка $k=3$:

$$u_x^{-2}\alpha_3^1,\ u_x^{-3}\alpha_3^2,\ u_x^{-4}\alpha_3^3,\ u_x^{-5}u_{xxx}, u_x^{-1}\beta_3^1,\ u_x^{-2}\beta_3^2,\ u_x^{-3}\beta_3^3,\ u_x^{-4}h_{xxx}. \tag{3.3}$$

Ниже приведен список всех дифференциальных инвариантов до третьего порядка (табл. 3).

Таблица 3. Дифференциальные инварианты

$k=1$	$\gamma_1^1 = u_t + uu_x$
	$\gamma_2^1 = hu_x^2$
	$\gamma_3^1 = u_x(h_t + uh_x)$
	$\gamma_4^1 = h_x$
$k=2$	$\gamma_1^2 = u_x^{-1}(u_{tt} + 2uu_{tx} + u^2u_{xx})$
	$\gamma_2^2 = u_x^{-2}(u_{tx} + uu_{xx})$
	$\gamma_3^2 = u_x^{-3}u_{xx}$
	$\gamma_4^2 = h_{tt} + 2uh_{tx} + u^2h_{xx}$
	$\gamma_5^2 = u_x^{-1}(h_{tx} + uh_{xx})$
	$\gamma_6^2 = u_x^{-2}h_{xx}$
$k=3$	$\gamma_1^3 = u_x^{-2}(u_{ttt} + 3uu_{ttx} + 3u^2u_{txx} + u^3u_{xxx})$
	$\gamma_2^3 = u_x^{-3}(u_{ttx} + 2uu_{txx} + u^2u_{xxx})$
	$\gamma_3^3 = u_x^{-4}(u_{txx} + uu_{xxx})$
	$\gamma_4^3 = u_x^{-5}u_{xxx}$
	$\gamma_5^3 = u_x^{-1}(h_{ttt} + 3uh_{ttx} + 3u^h_{txx} + u^3h_{xxx})$
	$\gamma_6^3 = u_x^{-2}(h_{ttx} + 2uh_{txx} + u^2h_{xxx})$
	$\gamma_7^3 = u_x^{-3}(h_{txx} + uh_{xxx})$
	$\gamma_8^3 = u_x^{-4}h_{xxx}$

Инвариантное дифференцирование — это дифференцирование, переводящее дифференциальные инварианты в дифференциальные инварианты.

Уравнения (2.9) на координаты λ^i операторов $\lambda^i D_i$ (2.7) имеют вид

$$\left[\underset{k}{X_\alpha} + (\lambda^1 D_t + \lambda^2 D_x)(\xi_\alpha^t\partial_{\lambda^1} + \xi_\alpha^x\partial_{\lambda^2})\right]\varphi = 0$$

или

$$\left[\underset{k}{X_3} + \lambda^1\partial_{\lambda^2}\right]\varphi = 0, \quad \left[\underset{k}{X_4} + (\lambda^1\partial_{\lambda^1} + 2\lambda^2\partial_{\lambda^2})\right]\varphi = 0. \tag{3.4}$$

Согласно (3.1) операторы инвариантного дифференцирования могут быть выбраны следующим образом:

$$\delta_1 = u_x^{-1}(D_x + uD_t), \quad \delta_2 = u_x^{-2}D_x. \tag{3.5}$$

Следует отметить, что в отличие от операторов полного дифференцирования, коммутатор которых равен нулю $[D_x, D_t] = 0$, операторы инвариантного дифференцирования не коммутируют, а их коммутатор выражается через дифференциальные инварианты:

$$[\delta_1, \delta_2] = \gamma_3^2\delta_1 - (1 + 2\gamma_2^2)\delta_2. \tag{3.6}$$

В табл. 4 показано действие операторов инвариантного дифференцирования на дифференциальные инварианты различных порядков.

Таблица 4. Схема действия операторов δ_1, δ_2 на дифференциальные инварианты

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\gamma_1^1 & & \gamma_2^1 & & & & & \gamma_3^1 & & \gamma_4^1 & & & & \\
\Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & & & & \Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & & & \\
\gamma_1^2 & & \gamma_2^2 & & \gamma_3^2 & & & \gamma_4^2 & & \gamma_5^2 & & \gamma_6^2 & & \\
\Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & & \Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & \Downarrow & \searrow & \\
\gamma_1^3 & & \gamma_2^3 & & \gamma_3^3 & & \gamma_4^3 & \gamma_5^3 & & \gamma_6^3 & & \gamma_7^3 & & \gamma_8^3
\end{array}$$

Следует отметить, что стрелки, ведущие от дифференциальных инвариантов более низкого порядка к дифференциальным инвариантам более высокого порядка не означают равенства. Они показывают, как дифференциальные инварианты могут быть получены с помощью операций инвариантного дифференцирования. Кроме того, эта схема может быть бесконечно продолжена вниз до любого порядка k.

Точные формулы действия операторов инвариантного дифференцирования на дифференциальные инварианты различных порядков также были получены в ходе работы и приведены в табл. 5.

Таблица 5. Точные формулы действия δ_1, δ_2 на дифференциальные инварианты

$\delta_1\gamma_1^1 = \gamma_1^2 + \gamma_1 + 1$	$\delta_2\gamma_1^1 = \gamma_2^2 + 1$
$\delta_1\gamma_2^1 = 2\gamma_2^2\gamma_2^1 + \gamma_3^1$	$\delta_2\gamma_2^1 = 2\gamma_2^3\gamma_2^1 + \gamma_4^1$
$\delta_1\gamma_3^1 = \gamma_2^4 + \gamma_2^2\gamma_3^1 + \gamma_1^1\gamma_4^1$	$\delta_2\gamma_3^1 = \gamma_2^5 + \gamma_3^2\gamma_3^1 + \gamma_4^1$
$\delta_1\gamma_4^1 = \gamma_5^2$	$\delta_2\gamma_4^1 = \gamma_6^2$
$\delta_1\gamma_1^2 = \gamma_1^3 - \gamma_1^2\gamma_2^2 + 2\gamma_2^2\gamma_1^1$	$\delta_2\gamma_1^2 = \gamma_2^3 - \gamma_1^2\gamma_3^2 + 2\gamma_2^2$
$\delta_1\gamma_2^2 = \gamma_2^3 - 2\gamma_2^2\gamma_2^2 + \gamma_3^2\gamma_1^1$	$\delta_2\gamma_2^2 = \gamma_3^3 - 2\gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2$
$\delta_1\gamma_3^2 = \gamma_3^3 - 3\gamma_2^2\gamma_3^2$	$\delta_2\gamma_3^2 = \gamma_4^3 - 3\gamma_3^2\gamma_3^2$
$\delta_1\gamma_4^2 = \gamma_5^3 + 2\gamma_5^2\gamma_1^1$	$\delta_2\gamma_4^2 = \gamma_6^3 + 2\gamma_5^2$
$\delta_1\gamma_5^2 = \gamma_6^3 - \gamma_5^2\gamma_2^2 + \gamma_6^2\gamma_1^1$	$\delta_2\gamma_5^2 = \gamma_7^3 - \gamma_5^2\gamma_3^2 + \gamma_6^2$
$\delta_1\gamma_6^2 = \gamma_7^3 - 2\gamma_6^2\gamma_2^2$	$\delta_2\gamma_6^2 = \gamma_8^3 - 2\gamma_6^2\gamma_3^2$

Базис дифференциальных инвариантов — это конечный набор дифференциальных инвариантов, такой, что все остальные дифференциальные инварианты получаются из него с помощью инвариантного дифференцирования и функциональных операций. В итоге приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Базис дифференциальных инвариантов алгебры симметрии* (1.2) *системы уравнений Грина–Нагди* (1.1) *порождается инвариантами* 1*-го порядка:*

$$\gamma_1^1 = u_t + uu_x,\ \gamma_2^1 = hu_x^2,\ \gamma_3^1 = u_x(h_t + uh_x),\ \gamma_4^1 = h_x. \tag{3.7}$$

Перепишем исходную систему (1.1), вводя дифференциальные инварианты в качестве новых переменных и операторы инвариантного дифференцирования вместо частных дифференцирований. Уравнения Грина–Нагди принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \gamma_2^1 + \gamma_3^1 = 0, \\ \gamma_1^1 + \gamma_4^1 = \dfrac{1}{3}\big[(2\gamma_2^1 - 1)(2\gamma_2^1\gamma_3^2 + \gamma_4^1) + 2\gamma_4^1\gamma_2^1(\gamma_2^1 - 1)\big]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Система уравнений (3.8), выраженная в терминах базисных дифференциальных инвариантов (3.7) и операторов инвариантного дифференцирования (3.5), выглядит следующим образом:

$$
\begin{cases}
\gamma_2^1 + \gamma_3^1 = 0 \\
\gamma_1^1 + \gamma_4^1 = \dfrac{1}{3}\big[(2\gamma_2^1 - 1)\delta_2\gamma_2^1 + 2\gamma_4^1\gamma_2^1(\gamma_2^1 - 1)\big].
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

Выпишем также следствия системы уравнений (3.9), которые получаются из нее действием операторов инвариантного дифференцирования δ_1, δ_2. Полученные выражения также запишем в терминах базисных дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования:

$$
\begin{cases}
\gamma_2^2(2\gamma_2^1 + \gamma_3^1) + \gamma_4^2 + \gamma_3^1 + \gamma_1^1\gamma_4^1 = 0, \\
\gamma_3^2(2\gamma_2^1 + \gamma_3^1) + \gamma_5^2 + 2\gamma_4^1 = 0, \\
\gamma_1^2 + \gamma_1^1 + \gamma_5^2 - \dfrac{1}{3}\Big[8\gamma_2^1(2\gamma_2^1\gamma_2^2 + \gamma_3^1)\gamma_3^2 + 4(\gamma_2^1)^2(\gamma_3^3 - 3\gamma_2^2\gamma_3^2) - 2\gamma_3^2(2\gamma_1^1\gamma_2^2 + \gamma_3^1) - \\
- 2\gamma_2^1(\gamma_3^3 - 3\gamma_2^2\gamma_3^2) + 2\gamma_4^1(2\gamma_2^1\gamma_2^2 + \gamma_3^1) + 2\gamma_2^1\gamma_5^2 - \gamma_5^2 + 4\gamma_2^1\gamma_4^1(2\gamma_2^1\gamma_2^2 + \gamma_3^1) + 2(\gamma_2^1)^2\gamma_5^2 - \\
- 2\gamma_4^1(2\gamma_2^1\gamma_2^2 + \gamma_4^1) - 2\gamma_2^1\gamma_5^2\Big] = 0, \\
\gamma_2^2 + 1 + \gamma_6^2 - \dfrac{1}{3}\Big[8\gamma_2^1(2\gamma_2^1\gamma_3^2 + \gamma_4^1)\gamma_3^2 + 4(\gamma_2^1)^2(\gamma_4^3 - 3(\gamma_3^2)^2) - 2\gamma_3^2(2\gamma_2^1\gamma_3^2 + \gamma_4^1) - \\
- 2\gamma_2^1(\gamma_4^3 - 3(\gamma_3^2)^2) + 2\gamma_4^1(2\gamma_2^1\gamma_2^2 + \gamma_3^1) + 2\gamma_2^1\gamma_6^2 - \gamma_6^2 + 4\gamma_2^1\gamma_4^1(2\gamma_2^1\gamma_3^2 + \gamma_4^1) + 2(\gamma_2^1)^2\gamma_6^2 - \\
- 2\gamma_4^1(2\gamma_2^1\gamma_3^2 + \gamma_4^1) - 2\gamma_2^1\gamma_6^2\Big] = 0.
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

При построении дифференциально инвариантных решений следует учитывать как сами уравнения в виде (3.8) или (3.9), так и их следствия (3.10). Они порождают дополнительные соотношения между дифференциальными инвариантами. Для исследования дифференциально инвариантных решений необходима классификация получающихся многообразий с применением методов дифференциальной алгебры [12].

Заключение

В работе изучаются дифференциальные инварианты алгебры Ли L_4 симметрии уравнений Грина–Нагди.

• Вычислены дифференциальные инварианты алгебры L_4 до третьего порядка включительно.

• Построены операторы инвариантного дифференцирования алгебры L_4.

• Найден базис дифференциальных инвариантов.

• Построены связи между дифференциальными инвариантами алгебры L_4, определяемые уравнениями Грина–Нагди и его инвариантными дифференциальными следствиями.

Полученные результаты являются платформой, на основе которой можно исследовать дифференциально инвариантные решения уравнений Грина–Нагди.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00047а), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2826.2008.1) и СО РАН (Интеграционный проект № 2.15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

2. Овсянников Л. В. Особый вихрь // Прикладная механика и техническая физика. — 1995. — Т. 36, №3. — С. 45–52.

3. Чупахин А. П. О барохронных движениях газа // Доклады РАН. — 1997. — Т. 352, №5. — С. 624–626.

4. Chupakhin A. P. Singular Vortex in Hydro- and Gasdynamics // In Analitical Approaches to Multydimentional Balance Laws. New York: Nova Science Publishers Inc., 2006. — P. 89–119.

5. Olver P. J. Equivalence, invariants and symmetry. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

6. Olver P. J. Generating differential Invariants // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 333, №1. — P. 450–471.

7. Chupakhin A. P. Differential invariants: theorem of commutativity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2004. — Vol. 9. — P. 25-33.

8. Golovin S. V. Applications of differential invariants of finite dimentional groups in hydrodynamics // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2004. — Vol. 9. — P. 35–51.

9. Khabirov S. V. The differential-invariant submodels // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2004. — Vol. 9. — P. 473–480.

10. Su C. H., Gardner C. S. Korteweg de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg de Vries equation and Burgers equation // J. Math. Phys. — 1969. — Vol. 10, №3. — P. 536–539.

11. Багдерина Ю. Ю., Чупахин А. П. Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений Грина–Нагди // Прикладная механика и техническая физика. — 2005. — Т. 46, №6. — С. 26–35.

12. Kaplansky I. Introduction to Differential Algebra. — Paris: Hermann, 1967.

13. Уразбахтина Л. З. Дифференциально инвариантные подмодели трехмерных подалгебр для сжимаемой жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2007. — Т. 10, №2 (30). — С. 128–137.

Поступила в редакцию 10.10.08

N. V. Lyubashevskaya, A. P. Chupakhin
Basis of differential invariants of symmetry group of Green–Naghdi equations

System of Green-Naghdi equations describing long wave propagation on fluid surface is considered. Extensions of operator of Lie algebra of these equations, the differential invariants and the operators of invariant differentiation are calculated. The theorem about the basis of the differential invariants ie proved. In addition, the dependence between the differential invariants is described.

Keywords: Green-Naghdi equation, differential invariants, operators of invariant differentiation, basis of differential invariants.

Mathematical Subject Classifications: 35Q35, 53A55, 76M60

Любашевская Н. В.
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15
E-mail: natti@gorodok.net

Чупахин А. П.
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Россия, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15
E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru