УДК 517.5 + 517.9

© *В. И. Родионов*

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

В параметрическом семействе подпространств пространства прерывистых функций вводится понятие присоединенного интеграла (в каждом подпространстве применяется собственный интеграл). В подпространстве, представляющем их пересечение, также определено понятие присоединенного интеграла. Это подпространство содержит в себе пространство функций ограниченной вариации. В каждом подпространстве на основе присоединенного интеграла определяется понятие обобщенной прерывистой функции и ее присоединенной обобщенной производной. Доказана разрешимость линейных импульсных систем, заданных в терминах присоединенных обобщенных функций.

Ключевые слова: прерывистая функция, обобщенная функция, импульсное уравнение.

Введение

В работе вводится понятие присоединенного интеграла — объекта, двойственного в некотором смысле классическому интегралу Римана–Стилтьеса. На его основе определяется понятие обобщенной прерывистой функции и ее присоединенной обобщенной производной (присоединенных распределений) и исследуются вопросы разрешимости импульсных уравнений.

В основе проблематики лежит известный вопрос о стыковке различных интегральных кривых одного и того же уравнения, последовательно решаемого на разных временны́х участках. Поясним сказанное на примере. Пусть скалярная функция $q = q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференцируемая при $t < \tau$ и при $t > \tau$, терпит разрыв в точке τ. Для достаточно гладкой функции $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ графики двух семейств решений уравнения $\dot{x}(t) = F(t, x(t))\,\dot{q}(t)$ (решаемого отдельно при $t < \tau$ и при $t > \tau$) заполняют всю плоскость $\mathbb{R}^2$, за исключением прямой $t = \tau$. Если же мы изучаем процесс при всех $t \in \mathbb{R}$, то возникает вопрос обоснования «разумной стыковки» графиков этих двух семейств решений. Существующие в настоящее время подходы к решению данной проблемы приводят к противоречащим друг другу результатам. Сразу же отметим, что предлагаемая в настоящей работе концепция пополняет этот ряд противоречий. В то же время она дает строгое математическое обоснование непрерывной стыковки решений.

В пользу нового подхода приведем еще один довод. Всякая функция $x \in \mathrm{BV} \doteq \mathrm{BV}[-1,1]$ имеет производную x', понимаемую как производную почти везде, и обобщенную производную $\dot{x}$, причем суммируемая функция x' сама порождает обобщенную функцию, а равенство обобщенных функций $x' = \dot{x}$ имеет место в том и только в том случае, когда x абсолютно непрерывна [1, с. 348]. На базе присоединенного интеграла мы предлагаем конструкцию присоединенной обобщенной производной $\mathring{x}$, для которой справедливо утверждение: для $x \in \mathrm{BV}$ равенство обобщенных функций $x' = \mathring{x}$ имеет место тогда и только тогда, когда x представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции и функции скачков. Мы видим, что в рамках данной концепции отсекаются нежелательные сингулярные компоненты.

Работа продолжает цикл публикаций [2] – [6]. Она развивает идеи [6] — мы используем основные понятия и обозначения данной работы без дополнительных пояснений.

§ 1. Присоединенные умножение и интеграл в $\mathrm{G}^T[a,b]$

1.1. Присоединенное умножение в $\mathrm{G}^T[a,b]$

Согласно формулам из замечания 8 [6] проекторы $P_{\scriptscriptstyle T} : x \to x_{\scriptscriptstyle T}$ и $P^{\scriptscriptstyle T} : x \to x^{\scriptscriptstyle T}$ являются эндоморфизмами пространства G^T, но не являются эндоморфизмами алгебры G^T. Они будут таковыми, если в G^T ввести новую операцию умножения.

Определение 1. Если $x, y \in \mathrm{G}^T$, то функция $z \doteq x \cdot y \doteq x^T y^T - x_T y_T$ называется *присоединенным произведением* функций x и y, а операция «$\cdot$» называется *присоединенным умножением* в G^T. Легко проверить, что $x \cdot y = x^T y + x y^T - xy = xy - x_T y - x y_T$.

Прежде всего отметим, что функции x_T и x^T зависят от параметра α (см. (2.8) [6]), то есть $x_T = x_T(t,\alpha)$ и $x^T = x^T(t,\alpha)$, поэтому и z из определения 1 зависит от α, то есть $z = z(t,\alpha)$. Это означает, что в G^T определено целое семейство различных присоединенных умножений, зависящих от α. Более того, в соответствии с пунктом 2 леммы 5 [6] равенство $\mathrm{G}^S = \mathrm{G}^T$ равносильно тому, что $S \sim T$, поэтому в пространстве $\mathrm{G}^T (= \mathrm{G}^S)$ определены разные присоединенные умножения, зависящие от параметра $S \sim T$. Таким образом, в пространстве G^T (когда разбиение T фиксировано) имеется двупараметрическое семейство различных присоединенных умножений, зависящих как от точки $\alpha \in K$, так и от разбиения $S \sim T$.

Термин «присоединенное умножение» мы позаимствовали из теории ассоциативных колец и алгебр, где присоединенное умножение определяется равенством $x \circ y \doteq x + y + xy$ и строится из базовых операций сложения и умножения исходного кольца [алгебры] R (см., например, [7, с. 315]). В книге [8, с. 368] такое умножение называется звездным. Иногда присоединенное умножение определяется как $x \circ y \doteq x + y - xy$. Относительно новой операции кольцо [алгебра] R ассоциативно и имеет единицу, роль которой выполняет нулевой элемент (легко проверить, что $x \circ 0 = x = 0 \circ x$). Последнее обстоятельство и отсутствие дистрибутивности (например, имеет место равенство $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z - x$) не позволяют рассматривать самостоятельную алгебраическую систему $\langle R, +, \circ \rangle$ [соответственно $\langle R, +, \circ, \cdot \rangle$], как кольцо [алгебру], хотя операция присоединенного умножения и выполняет существенную роль в теории. Ниже мы увидим, что присоединенное умножение из определения 1, весьма похожее на классическое присоединенное умножение (имеем $x \cdot y = x^T y + x y^T - xy$), лишено отмеченных недостатков.

Лемма 1. *Если* $T \in \mathbb{T}(K)$, $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}$, *то* $(\lambda x)_T = \lambda x_T$, $(\lambda x)^T = \lambda x^T$, $(x+y)_T = x_T + y_T$, $(x+y)^T = x^T + y^T$, $(x \cdot y)_T = x_T \cdot y_T$, $(x \cdot y)^T = x^T \cdot y^T$.

Доказательство. Равенства $x_T \cdot y_T = -x_T y_T$ и $x^T \cdot y^T = x^T y^T$ очевидны из определения 1 и формул (2.9) [6], а в силу следствия 8 [6] справедливы цепочки равенств

$$(x \cdot y)_T = (x^T y^T - x_T y_T)_T = -x_T y_T = x_T \cdot y_T, \quad (x \cdot y)^T = (x^T y^T - x_T y_T)^T = x^T y^T = x^T \cdot y^T.$$

Замечание 1. Попутно мы установили равенства $(x \cdot y)_T = -x_T y_T$ и $(x \cdot y)^T = x^T y^T$.

Лемма 2. *Для любых* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *существуют интегралы* $\int_\alpha^t x_T dy^T$, $\int_\alpha^t y_T dx^T$, $\int_\alpha^t y^T dx_T$, $\int_\alpha^t x^T dy_T$ *и справедливы равенства*

$$x(t)\, y(t) = x^T(t)\, y^T(t) + \int_\alpha^t x_T dy^T + \int_\alpha^t y_T dx^T + \big(xy\big)_T(t),$$

$$x(t) \cdot y(t) = x^T(t)\, y^T(t) + \int_\alpha^t x^T dy_T + \int_\alpha^t y^T dx_T - \big(xy\big)_T(t).$$

Доказательство. Первая формула доказана в лемме 8 [6], а что касается второй, то для ее доказательства достаточно сложить левые и правые части обеих формул.

Теорема 1. *Пространство* $\mathrm{G}^T[a,b]$, *наделенное операцией присоединенного умножения, является коммутативной ассоциативной алгеброй (вообще говоря, без единицы). Она является банаховой по норме* $\|\cdot\|_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ассоциативность присоединенного умножения следует из замечания 1:

$$(x\cdot y)\cdot z=(x\cdot y)^T z^T-(x\cdot y)_{_T} z_{_T}=x^T y^T z^T+x_{_T} y_{_T} z_{_T},$$

$$x\cdot(y\cdot z)=x^T(y\cdot z)^T-x_{_T}(y\cdot z)_{_T}=x^T y^T z^T+x_{_T} y_{_T} z_{_T}.$$

Коммутативность и дистрибутивность очевидны. При $T=\varnothing$ имеем $x\cdot y=xy$, поэтому в G^T (при $T=\varnothing$) единицей является функция $e(t)$, тождественно равная 1 на $[a,b]$. Пусть $T\neq\varnothing$.

А. Если $\alpha\in T$, то функция $e(t)\doteq 1+\int_\alpha^t d\xi_\alpha-\int_\alpha^t d\eta_\alpha$ является единицей алгебры G^T. Действительно, имеем $e(t)=\begin{cases}0, & t\neq\alpha\\ 1, & t=\alpha\end{cases}$, поэтому $e_k^-=e_k^+=-\delta_{km}$ для всех $\tau_k\in T$, где через m обозначен тот индекс, для которого $\alpha=\tau_m$. Следовательно, $e_{_T}(t)=\int_\alpha^t d\xi_\alpha-\int_\alpha^t d\eta_\alpha$, $e^{T}(t)\equiv 1$. Для любого $x\in\mathrm{G}^T$ справедливо $(xe)(t)=x(\alpha)e(t)$, поэтому $(xe)_{_T}(t)=x(\alpha)e_{_T}(t)$, и в силу леммы 2 (а также формул (2.5) [6] и равенств $x^{T}(\alpha)=x(\alpha)$) справедлива цепочка

$$x(t)\cdot e(t)=x^{T}(t)+\int_\alpha^t dx_{_T}+\int_\alpha^t x^{T}de_{_T}-(xe)_{_T}(t)=x(t)+x(\alpha)\int_\alpha^t d\xi_\alpha-x(\alpha)\int_\alpha^t d\eta_\alpha-x(\alpha)e_{_T}(t)=x(t).$$

Б. Пусть $\alpha\notin T$. Имеем $T_{_L}\doteq\{\tau_k\in T:\tau_k<\alpha\}\neq\varnothing$ или $T_{_R}\doteq\{\tau_k\in T:\tau_k>\alpha\}\neq\varnothing$.

1. Если $T_{_L}=\varnothing$, то $T_{_R}\neq\varnothing$ и определена величина $\varrho\doteq\inf T_{_R}$.

Если $\varrho\in T_{_R}$, то функция $e(t)\doteq 1-\int_\alpha^t d\xi_\varrho=\begin{cases}1, & t<\varrho\\ 0, & t\geqslant\varrho\end{cases}$ является единицей алгебры G^T. Действительно, для всех $\tau_k\in T$ имеют место равенства $e_k^-=\delta_{km}$ и $e_k^+=0$, где через m обозначен тот индекс, для которого $\varrho=\tau_m$. Следовательно, $e_{_T}(t)=-\int_\alpha^t d\xi_\varrho$ и $e^{T}(t)\equiv 1$. Для любого $x\in\mathrm{G}^T$ справедливо $(xe)(t)=\begin{cases}x(t), & t<\varrho\\ 0, & t\geqslant\varrho\end{cases}$, поэтому $(xe)_m^-=x(\varrho-0)$, $(xe)_m^+=0$, $(xe)_k^-=(xe)_k^+=0$ для всех $k\neq m$, $(xe)_{_T}(t)=-x(\varrho-0)\int_\alpha^t d\xi_\varrho$ и

$$x(t)\cdot e(t)=x^{T}(t)+\int_\alpha^t dx_{_T}+\int_\alpha^t x^{T}de_{_T}-(xe)_{_T}(t)=x(t)-x^{T}(\varrho)\int_\alpha^t d\xi_\varrho+x(\varrho-0)\int_\alpha^t d\xi_\varrho=x(t).$$

Воспользовались равенством $x^{T}(\varrho)=x(\varrho-0)$, которое имеет место в силу следующих обстоятельств. Так как $\alpha<\varrho=\tau_m<\tau_k$ при всех $k\neq m$, то

$$x_{_T}(\varrho)=-\sum_{\tau_k\in T}x_k^-\int_\alpha^\varrho d\xi_k+\sum_{\tau_k\in T}x_k^+\int_\alpha^\varrho d\eta_k=-\big(x(\tau_m-0)-x(\tau_m)\big)\big(\xi_m(\varrho)-\xi_m(\alpha)\big)=x(\varrho)-x(\varrho-0).$$

Если $\varrho\notin T_{_R}$, то в G^T единицы нет. Предположим противное, то есть существует $e\in\mathrm{G}^T$ такое, что для всех $x\in\mathrm{G}^T$ справедливо $x=x\cdot e=x^{T}e+xe^{T}-xe$. В частности, если $x(t)\equiv 1$, то $x^{T}(t)\equiv 1$, поэтому $e^{T}(t)\equiv 1$. Таким образом, для любого $x\in\mathrm{G}^T$ имеем $(x-x^{T})e=0$.

Пусть $\tau>\varrho$. Так как ϱ — наибольшая из нижних границ $T_{_R}$, то существует $\tau_m\in T_{_R}$, что $\alpha\leqslant\varrho<\tau_m<\tau$. Если $x(t)\doteq M\int_\alpha^t d\eta_m$, то $x^{T}(t)\equiv 0$, следовательно, $\Big[M\int_\alpha^\tau d\eta_m\Big]e(\tau)=0$ или $Me(\tau)=0$. В силу произвольности M имеем $e(\tau)=0$. Таким образом, $e(\tau)=0$ для всех $\tau>\varrho$. Это означает, в частности, что $e(\tau_k-0)=e(\tau_k)=e(\tau_k+0)=0$ для всех $\tau_k\in T_{_R}=T$, следовательно, $e^{T}(t)=e(t)$, поэтому $e^{T}(t)=0$ для всех $t>\varrho$, что противоречит $e^{T}(t)\equiv 1$.

2. Случай $T_{_L}\neq\varnothing, T_{_R}=\varnothing$ симметричен. Здесь определена величина $\lambda\doteq\sup T_{_L}$, и если $\lambda\notin T_{_L}$, то в G^T единицы нет, а если $\lambda\in T_{_L}$, то единицей является функция

$$e(t)\doteq 1+\int_\alpha^t d\eta_\lambda=\begin{cases}0, & t\leqslant\lambda\\ 1, & t>\lambda\end{cases}.$$

3. Наконец, если $T_L \neq \varnothing$, $T_R \neq \varnothing$, то определены величины $\lambda \doteq \sup T_L$ и $\varrho \doteq \inf T_R$. Если $\lambda \notin T_L$ или $\varrho \notin T_R$, то в G^T единицы нет, а в противном случае (то есть если $\lambda \in T_L$ и $\varrho \in T_R$) единицей является функция

$$e(t) \doteq 1 + \int_\alpha^t d\eta_\lambda - \int_\alpha^t d\xi_\varrho = \begin{cases} 1, & t \in (\lambda, \varrho), \\ 0, & t \notin (\lambda, \varrho). \end{cases}$$

Доказательство пунктов 2 и 3 предоставляем читателю.

Осталось доказать непрерывность присоединенного умножения по норме $\|\cdot\|_T$ относительно, например, первой переменной. В силу (3.4) [6] для любых $x, y \in \mathrm{G}^T$ имеем

$$\frac{1}{5}\left\|x \cdot y\right\|_T = \frac{1}{5}\left\|x^T y^T - x_T y_T\right\|_T \leqslant \|x^T\|_T\, \|y^T\|_T + \|x_T\|_T\, \|y_T\|_T =$$

$$= \|x^T\|\, \|y^T\| + \lceil x \rceil_T \lceil y \rceil_T \leqslant \big(\|x^T\| + \lceil x \rceil_T\big)\big(\|y^T\| + \lceil y \rceil_T\big) = \|x\|_T\, \|y\|_T,$$

следовательно, условие $\|x_n - x\|_T \underset{n}{\to} 0$ влечет $\left\|x_n \cdot y - x \cdot y\right\|_T \underset{n}{\to} 0$.

Теорема 2. *Каждый из операторов $P_T : x \to x_T$ и $P^T : x \to x^T$ является эндоморфизмом алгебры G^T с присоединенным умножением. Образ $\operatorname{Im} P_T$ $(= \operatorname{Ker} P^T)$ и ядро $\operatorname{Ker} P_T$ $(= \operatorname{Im} P^T)$ являются двусторонними идеалами алгебры. Операторы P_T и P^T являются непрерывными ортогональными (относительно присоединенного умножения) проекторами.*

Доказательство. Первая часть утверждения составляет содержание леммы 1. Поскольку проекторы P_T и P^T связаны равенством $P_T + P^T = \mathrm{I}$, то $\operatorname{Im} P_T = \operatorname{Ker} P^T$ и $\operatorname{Ker} P_T = \operatorname{Im} P^T$. Включение $x \in \operatorname{Im} P_T$ равносильно тому, что $x_T = x$, следовательно, для любого $y \in \mathrm{G}^T$ справедливо $x \cdot y = -x_T y_T$, а в силу равенства $(x_T y_T)_T = x_T y_T$ из следствия 8 [6] имеем $x \cdot y \in \operatorname{Im} P_T$, то есть $\operatorname{Im} P_T$ — двусторонний идеал в G^T. Для ядра $\operatorname{Ker} P_T$ доказательство аналогично. Равенство $x^T \cdot y_T = 0$ носит элементарный характер, поэтому P_T и P^T — ортогональные проекторы. Для доказательства их непрерывности достаточно показать замкнутость $\operatorname{Im} P_T$ и $\operatorname{Ker} P_T$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}^T$, сходится к $x \in \mathrm{G}^T$ по норме $\|\cdot\|_T$, тогда выполнено $\|(x_n)^T - x^T\| + \operatorname{Var}\big((x_n)_T - x_T\big) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Если все $x_n \in \operatorname{Im} P_T$, то $(x_n)^T = 0$, поэтому $\|x^T\| = 0$, $x^T = 0$, $x \in \operatorname{Im} P_T$. Если же $x_n \in \operatorname{Ker} P_T$, то $(x_n)_T = 0$, поэтому $\operatorname{Var} x_T = 0$, а так как $x_T(\alpha) = 0$, то $x_T = 0$ и $x \in \operatorname{Ker} P_T$. Итак, $\operatorname{Im} P_T$ и $\operatorname{Ker} P_T$ — замкнутые пространства, следовательно,

$$\mathrm{G}^T = \operatorname{Im} P_T \oplus \operatorname{Ker} P_T = \operatorname{Im} P^T \oplus \operatorname{Ker} P^T,$$

а P_T и P^T — непрерывные проекторы [9, с. 151].

1.2. Присоединенный интеграл в $\mathrm{G}^T[a, b]$

Определение 2. Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ и $x, y \in \mathrm{G}^T$. Если существует интеграл $\displaystyle\int_K x\,dy$, то функция

$$\int_\alpha^t x \cdot dy \doteq \int_\alpha^t x^T dy^T - \int_\alpha^t x_T dy_T \tag{1.1}$$

называется *неопределенным присоединенным интегралом* функции x по функции y.

Прежде всего отметим, что определение корректно, поскольку из существования интеграла $\displaystyle\int_K x\,dy$ следует существование интеграла $\displaystyle\int_\alpha^t x\,dy$, а в соответствии со следствием 7 [6] оба интеграла в правой части (1.1) существуют. Как и в случае присоединенного умножения (см. комментарии к определению 1) в пространстве $\mathrm{G}^T (= \mathrm{G}^S$ при $S \sim T)$ определено двупараметрическое семейство различных присоединенных интегралов функции x по функции y, зависящих от точки $\alpha \in K$ и разбиения $S \sim T$. При $T = \varnothing$ имеем $\int_\alpha^t x \cdot dy = \int_\alpha^t xdy$, поэтому интеграл Римана–Стилтьеса также является присоединенным интегралом. Комментарии к определению 2 закончим замечанием, что присоединенный интеграл линеен по каждому аргументу.

Теорема 3. *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Существование одного из интегралов* $\int_\alpha^t x \cdot dy$ *или* $\int_\alpha^t y \cdot dx$ *влечет существование другого и равенство* $\int_\alpha^t x \cdot dy + \int_\alpha^t y \cdot dx = x \cdot y \Big|_\alpha^t$.

Существование присоединенных интегралов следует из существования соответствующих интегралов Римана–Стилтьеса, а цепочка равенств

$$\int_\alpha^t x \cdot dy + \int_\alpha^t y \cdot dx = \int_\alpha^t x^T dy^T - \int_\alpha^t x_T dy_T + \int_\alpha^t y^T dx^T - \int_\alpha^t y_T dx_T = x^T y^T \Big|_\alpha^t - x_T y_T \Big|_\alpha^t = x \cdot y \Big|_\alpha^t$$

справедлива в силу формулы интегрирования по частям.

Лемма 3. *Если* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $z(t) \doteq \int_\alpha^t x \cdot dy$, *то* $z \in \mathrm{G}^T$,

$$z_T(t) = -\int_\alpha^t x_T dy_T \quad \text{и} \quad z^T(t) = \int_\alpha^t x^T dy^T.$$

Первый интеграл в правой части (1.1) является функцией, непрерывной во всех точках разбиения T, а второй является функцией скачков со скачками в T, что и доказывает лемму.

Теорема 4. *Пусть функции* $x, y, z \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $w(t) \doteq \int_\alpha^t y \cdot dz$. *Интегралы* $\int_\alpha^t x \cdot dw$ *и* $\int_\alpha^t (x \cdot y) \cdot dz$ *существуют или нет одновременно. Если они существуют, то*

$$\int_\alpha^t x(s) \cdot d\Big(\int_\alpha^s y \cdot dz \Big) = \int_\alpha^t (x \cdot y) \cdot dz. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3 справедливо $w \in \mathrm{G}^T$, $w_T(t) = -\int_\alpha^t y_T dz_T$, $w^T(t) = \int_\alpha^t y^T dz^T$, поэтому для левой и правой частей (1.2) (обозначим их σ_1 и σ_2) имеем

$$\sigma_1 = \int_\alpha^t x^T dw^T - \int_\alpha^t x_T dw_T = \int_\alpha^t x^T(s)\, d\Big(\int_\alpha^s y^T dz^T \Big) + \int_\alpha^t x_T(s)\, d\Big(\int_\alpha^s y_T dz_T \Big) =$$

$$= \int_\alpha^t x^T y^T dz^T + \int_\alpha^t x_T y_T dz_T,$$

$$\sigma_2 = \int_\alpha^t (x^T y^T - x_T y_T) \cdot dz = \int_\alpha^t x^T y^T dz^T + \int_\alpha^t x_T y_T dz_T.$$

Последнее равенство справедливо в силу замечания 8 [6].

Нашей ближайшей целью является перенесение полученных результатов на пространства Γ и BV, где в соответствии с замечанием 7 [6] определены проекторы $P_c : x \to x_c$ и $P^c : x \to x^c$.

§ 2. Присоединенные умножение и интеграл в $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$

2.1. Присоединенное умножение в $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$

Определение 3. Пусть $x,y\in\Gamma$ [или BV], тогда функция $z\doteq x\circ y\doteq x^c y^c - x_c y_c$ называется *присоединенным произведением* функций x и y, а операция «$\circ$» называется *присоединенным умножением* в Γ [или в BV]. Легко проверить, что $x\circ y = x^c y + x y^c - xy = xy - x_c y - x y_c$.

Замечание 2. Так же, как и в случае присоединенного произведения «$\cdot$», правило вычисления присоединенного произведения «$\circ$» зависит от параметра $\alpha\in K$.

Лемма 4. *Если* $x,y\in\Gamma$ [*или* BV] *и* $\lambda\in\mathbb{C}$, *то* $(\lambda x)_c=\lambda x_c$, $(\lambda x)^c=\lambda x^c$, $(x+y)_c = x_c+y_c$, $(x+y)^c=x^c+y^c$, $(x\circ y)_c = x_c\circ y_c$, $(x\circ y)^c=x^c\circ y^c$.

Лемма 5. *Для любых* $x,y\in\Gamma$ [*или* BV] *существуют интегралы* $\int_\alpha^t x_c dy^c$, $\int_\alpha^t y_c dx^c$, $\int_\alpha^t y^c dx_c$, $\int_\alpha^t x^c dy_c$ *и справедливы равенства*

$$x(t)y(t)=x^c(t)y^c(t)+\int_\alpha^t x_c dy^c+\int_\alpha^t y_c dx^c+(xy)_c(t),$$

$$x(t)\circ y(t)=x^c(t)y^c(t)+\int_\alpha^t x^c dy_c+\int_\alpha^t y^c dx_c-(xy)_c(t).$$

Утверждения следуют из включений $\mathrm{BV}\subset\Gamma\subset\mathrm{G}^T$ и лемм 1 и 2, для этого достаточно взять в качестве T разбиение $T(x)\cup T(y)$, тогда $T(\lambda x)\subseteq T$, $T(x+y)\subseteq T$, $T(xy)\subseteq T$, $x_c=x_{{}_T}$, $y_c=y_{{}_T}$, $(\lambda x)_c=(\lambda x)_{{}_T}$, $(x+y)_c=(x+y)_{{}_T}$ и $(xy)_c=(xy)_{{}_T}$.

Теорема 5. *Пространство* Γ [*или* BV], *наделенное операцией присоединенного умножения, является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей. Она является банаховой по норме* $\|\cdot\|_\Gamma$ [*соответственно* $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$].

Нетривиальным здесь является лишь существование единицы, роль которой выполняет функция $e(t)\doteq 1+\int_\alpha^t d\xi_\alpha-\int_\alpha^t d\eta_\alpha$. Если $x\in\Gamma$ [или BV] и $T\doteq T(x)\cup\{\alpha\}$, то $x,e\in\mathrm{G}^T$, $\alpha\in T$ и $x\circ e=x^c e^c-x_c e_c=x^{T(x)}e^{T(e)}-x_{{}_{T(x)}}e_{{}_{T(e)}}=x^T e^T-x_{{}_T}e_{{}_T}=x$. Последнее равенство справедливо в силу пункта A теоремы 1.

Теорема 6. *Каждый из операторов* $P_c: x\to x_c$ *и* $P^c: x\to x^c$ *является эндоморфизмом алгебры* Γ [*или* BV] *с присоединенным умножением. Образ* $\mathrm{Im}\,P_c$ $(=\mathrm{Ker}\,P^c)$ *и ядро* $\mathrm{Ker}\,P_c$ $(=\mathrm{Im}\,P^c)$ *являются двусторонними идеалами алгебры. Операторы* P_c *и* P^c *являются непрерывными ортогональными* (*относительно присоединенного умножения*) *проекторами.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

2.2. Присоединенный интеграл в $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$

Определение 4. Пусть $x,y\in\Gamma$ [или BV]. Если существует интеграл $\int_K x dy$, то функция

$$\int_\alpha^t x\circ dy\doteq\int_\alpha^t x^c dy^c-\int_\alpha^t x_c dy_c \tag{2.1}$$

называется *неопределенным присоединенным интегралом* функции x по функции y.

Определение корректно, поскольку из существования $\int_K xdy$ следует существование интеграла $\int_\alpha^t xdy$, а в соответствии с замечанием 10 [6] оба интеграла в правой части (2.1) существуют. Как и в случае присоединенного интеграла (1.1), семейство различных присоединенных интегралов (2.1) зависит от $\alpha \in K$. Присоединенный интеграл линеен по каждому аргументу.

Теорема 7. *Пусть* $x, y \in \Gamma$ [*или* BV]. *Существование одного из интегралов* $\int_\alpha^t x \circ dy$ *или* $\int_\alpha^t y \circ dx$ *влечет существование другого и равенство* $\int_\alpha^t x \circ dy + \int_\alpha^t y \circ dx = x \circ y \Big|_\alpha^t$.

Лемма 6. *Если* $x, y \in \Gamma$ [*или* BV] *и существует присоединенный интеграл* $z(t) \doteq \int_\alpha^t x \circ dy$, *то* $z \in \Gamma$ [*соответственно* $z \in \mathrm{BV}$], $z_c(t) = -\int_\alpha^t x_c dy_c$ *и* $z^c(t) = \int_\alpha^t x^c dy^c$.

Теорема 8. *Пусть* $x, y, z \in \Gamma$ [*или* BV] *и существует* $w(t) \doteq \int_\alpha^t y \circ dz$. *Интегралы* $\int_\alpha^t x \circ dw$ *и* $\int_\alpha^t (x \circ y) \circ dz$ *существуют или нет одновременно. Если интегралы существуют, то*

$$\int_\alpha^t x(s) \circ d\Big(\int_\alpha^s y \circ dz\Big) = \int_\alpha^t (x \circ y) \circ dz.$$

Утверждения следуют из включений $\mathrm{BV} \subset \Gamma \subset \mathrm{G}^T$, теорем 3, 4 и леммы 3, для этого достаточно взять в качестве T разбиение $T(x) \cup T(y)$ или $T(x) \cup T(y) \cup T(z)$.

§ 3. Прерывистые функции, заданные на интервале

Зафиксируем интервал $K \doteq (a, b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a, b)$ обозначим пространство [алгебру] *прерывистых* функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0)$ и $x(t+0)$ при всех $t \in K$. Через $\mathrm{G}_L \doteq \mathrm{G}_L(a, b)$ [через $\mathrm{G}_R \doteq \mathrm{G}_R(a, b)$] обозначим подпространство в G, состоящее из непрерывных слева [справа] прерывистых функций. Через $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a, b)$ обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ функция–сужение $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathrm{G}_0[\alpha, \beta]$.

Замечание 3. Аналогично утверждению леммы 3 [6] справедливо утверждение о том, что функция $x \in \mathrm{G}$ единственным образом представима в виде суммы $x = x_L + x_0$ двух функций $x_L \in \mathrm{G}_L$ и $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Симметричное представление $x = x_R + x_0$, где $x_R \in \mathrm{G}_R$, $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, также имеет место. При этом операторы $\mathrm{P} : x(t) \to x_L(t) \doteq x(t-0)$ и $\mathrm{Q} : x(t) \to x_R(t) \doteq x(t+0)$ являются проекторами в G (см. замечание 1 [6]).

Аналог диаграммы (1.1) [6] имеет вид (смысл пространств понятен):

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}} \to \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC}^{\mathrm{loc}} & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
& & \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{G} & \to \mathrm{R}^{\mathrm{loc}} \to \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}. &
\end{array}$$

Замечание 4. Функции $x, y \in \mathrm{G}(a, b)$ будем называть эквивалентными (и писать $x \sim y$), если $x - y \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a, b)$. Это равносильно тому, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ функции–сужения $x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ эквивалентны в пространстве $\mathrm{G}[\alpha, \beta]$. Легко проверить, что если непрерывная функция $f(\cdot)$ действует из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, то эквивалентность $x \sim y$ влечет эквивалентность $f(x(\cdot)) \sim f(y(\cdot))$. Действительно, включения $f(x(\cdot)), f(y(\cdot)) \in \mathrm{G}(a, b)$ очевидны.

Если $z \doteq x-y$, то $z \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$ и $z(t-0)=0$ для любого $t \in K$, а так как $x(t-0)$ и $y(t-0)$ существуют, то $x(t-0)=y(t-0)$. Если $\tau \to t-0$, то $x(\tau) \to x(t-0)$ и $y(\tau) \to y(t-0)$, а поскольку f непрерывна, то $f(x(\tau)) \to f(x(t-0))$ и $f(y(\tau)) \to f(y(t-0))$. Таким образом, $w(\tau) \doteq f(x(\tau)) - f(y(\tau)) \to 0$, то есть $w(t-0)=0$ при $t \in K$, поэтому $w \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$. Остается лишь напомнить, что $f(x(\cdot)),\, f(y(\cdot)) \in \mathrm{G}(a,b)$.

Замечание 5. Произвольное конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ будем называть *разбиением* интервала K, а совокупность всех разбиений K обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в $\mathbb{T}(K)$. Через $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ [через Γ^{loc}] обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ функция–сужение $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathrm{G}^S[\alpha,\beta]$ [соответственно $\Gamma[\alpha,\beta]$], где $S \doteq T \cap [\alpha,\beta]$.

§ 4. Обобщенные прерывистые функции

Пространство $D \doteq D(a,b)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$, будем называть пространством *основных* функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: будем говорить, что последовательность основных функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к основной функции $\varphi \in D$ (и писать $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha,\beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]}(\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$.

Пример 1. Если $K = \mathbb{R}$, последовательность $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n \in \mathbb{C}$ такова, что $\gamma_n \to 0$, $\tau > 0$, $\varphi_n(t) = \gamma_n\,(1 - |\frac{t}{\tau}|)$ при $|\,t\,| \leqslant \tau$ и $\varphi_n(t) = 0$ при $|\,t\,| \geqslant \tau$, то $\varphi_n \xrightarrow{D} 0$. Здесь $[\alpha,\beta]$ — это любой отрезок, содержащий отрезок $[-\tau,\tau]$, а $\varphi(t) \equiv 0$.

Через D' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $\ell : D(a,b) \to \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что сходимость последовательности функций $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ влечет сходимость $(\ell,\varphi_n) \underset{n}{\longrightarrow} (\ell,\varphi)$), а его элементы назовем *обобщенными* функциями (*распределениями*).

Функция $x \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$ порождает обобщенную функцию $\ell_x \in D'$: $(\ell_x,\varphi) = (\mathrm{L})\int_K \varphi(t)x(t)\,dt$, заданную через интеграл Лебега. Линейность функционала ℓ_x очевидна, а непрерывность следует в силу следующего обстоятельства. Если $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то у функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha,\beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]}(\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$. Поскольку $x \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$, то функция $y(t) = \int_\alpha^t x(s)\,ds$ абсолютно непрерывна на $[\alpha,\beta]$, а в соответствии с [10, с. 249] и следствием 3 [6] справедливо

$$(\ell_x,\varphi_n) = (\mathrm{L})\int_K \varphi_n(t)x(t)\,dt = (\mathrm{L})\int_\alpha^\beta \varphi_n(t)x(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi_n\,dy = -\int_\alpha^\beta y\,d\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow}$$

$$-\int_\alpha^\beta y\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \varphi\,dy = (\mathrm{L})\int_\alpha^\beta \varphi(t)x(t)\,dt = (\mathrm{L})\int_K \varphi(t)x(t)\,dt = (\ell_x,\varphi).$$

Если $x \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то x почти всюду дифференцируема, причем $x' \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$ и справедливо $(\ell_{x'},\varphi) = (\mathrm{L})\int_K \varphi(t)\,x'(t)\,dt = \int_K \varphi\,dx$. Последний интеграл существует не только для абсолютно непрерывных функций $x \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, но и для любой прерывистой функции $x \in \mathrm{G}$, и это наблюдение дает нам основание ввести следующее обозначение: $(\ell_{x'},\varphi) = \int_K \varphi\,dx$, $x \in \mathrm{G}$ (доказательство непрерывности этого функционала во многом повторяет доказательство непрерывности функционала $\varphi \to (\ell_x,\varphi)$). Более того, работая в дальнейшем только с прерывистыми функциями $x \in \mathrm{G}$, мы вместо обозначений (ℓ_x,φ) и $(\ell_{x'},\varphi)$ будем использовать обозначения

$$(x,\varphi) \doteq \int_K \varphi(t)\,x(t)\,dt \quad \text{и} \quad (x',\varphi) \doteq \int_K \varphi\,dx, \tag{4.1}$$

называя функционалы *обобщенной прерывистой функцией* и *обобщенной производной прерывистой функции* соответственно.

Замечание 6. Первый из интегралов (4.1) является, вообще говоря, интегралом Лебега, но при $x \in \mathrm{G}$ он совпадает с римановым интегралом. Отметим также следующее обстоятельство. Поскольку $(x,\varphi)=(y',\varphi)$, где $y(t)=\int_\alpha^t x(s)\,ds$, то имеет место следующая диаграмма включения семейств функционалов (4.1):

$$\big\{\,\varphi \to (x,\varphi)\,\big\}_{x\in \mathrm{G}} \;\subset\; \big\{\,\varphi \to (y',\varphi)\,\big\}_{y\in \mathrm{G}} \;\subset\; D'. \tag{4.2}$$

Другими словами, всякая обобщенная прерывистая функция является обобщенной производной от некоторой другой прерывистой функции, причем включения в диаграмме — строгие. В истинности последнего утверждения легко убедиться, показав, что δ-функция $\varphi \to \varphi(0)$ принадлежит второму, но не принадлежит первому семейству.

Утверждение 1. *Пусть $x \in \mathrm{G}(a,b)$. Для того чтобы равенство $(x,\varphi)=0$ имело место при всех $\varphi \in D(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть равенство $(x,\varphi)=0$ выполнено при всех $\varphi \in D$. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha,\beta]\subset K$ и какую-нибудь функцию $\varphi\in D$, носитель которой принадлежит $[\alpha,\beta]$. В силу леммы 4 [6] для функции–сужения $x:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ имеет место представление $x=x_L+x_0$, где $x_L\in \mathrm{G}_L[\alpha,\beta]$, $x_0\in \mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$. Согласно замечанию 2 [6] произведение φx_0 принадлежит $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$, следовательно, в силу леммы 2 [6] имеем $(x_0,\varphi)=0$. Тем самым $(x_L,\varphi)=0$ и, в частности, справедливо равенство $(x_L,\overline{\varphi})=0$, следовательно, $(x_L,\mathrm{Re}\,\varphi)=0$. Таким образом, для любой функции $\varphi\in D$, носитель которой принадлежит $[\alpha,\beta]$, имеем

$$(\mathrm{Re}\,x_L,\mathrm{Re}\,\varphi)=0 \quad \text{и} \quad (\mathrm{Im}\,x_L,\mathrm{Re}\,\varphi)=0. \tag{4.3}$$

Допустим, что существует $t\in(\alpha,\beta]$ такое, что $\mathrm{Re}\,x_L(t)\neq 0$ (можно считать $\mathrm{Re}\,x_L(t)>0$). Поскольку $\mathrm{Re}\,x_L\in \mathrm{G}_L[\alpha,\beta]$, то существует $\delta>0$ такое, что $\mathrm{Re}\,x_L(\tau)>0$ для всех τ из полуинтервала $(t-\delta,\,t\,]\subseteq(\alpha,\beta]$. Если функция $\varphi\in D$ такова, что $\mathrm{Re}\,\varphi(\tau)>0$ при $\tau\in(t-\delta,\,t)$ и $\mathrm{Re}\,\varphi(\tau)=0$ при $\tau\notin(t-\delta,\,t)$, то $(\mathrm{Re}\,x_L,\mathrm{Re}\,\varphi)>0$, что противоречит (4.3). Таким образом, $\mathrm{Re}\,x_L(t)=0$ для любого $t\in(\alpha,\beta]$, следовательно, $\mathrm{Re}\,x_L(t)\equiv 0$. Аналогично $\mathrm{Im}\,x_L(t)\equiv 0$, поэтому $x_L(t)\equiv 0$, а сужение функции x на отрезок $[\alpha,\beta]$ совпадает с функцией x_0 из пространства $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$. Поскольку последнее утверждение справедливо для любого отрезка $[\alpha,\beta]$, то $x\in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

Достаточность. Если $x\in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varphi\in D$ прерывистая функция $y=\varphi x$ финитна, причем в силу замечания 2 [6] справедливо включение $y\in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Согласно лемме 2 [6] имеем $(x,\varphi)=\int_K y(t)\,dt=0$.

Теорема 9. *Пусть $x\in \mathrm{G}(a,b)$. Для того чтобы равенство $(x',\varphi)=0$ имело место при всех $\varphi\in D(a,b)$, необходимо и достаточно, чтобы $x\sim \mathrm{const}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Функция, тождественно равная 1, порождает функционал $(1,\varphi)=\int_K\varphi(s)\,ds$. Покажем, что равенство $(1,\varphi)=0$ выполнено для тех и только тех основных функций $\varphi\in D$, для которых функция $\psi(t)\doteq\int_a^t\varphi(s)\,ds$ также принадлежит пространству D. О функции ψ можно сказать следующее. Включение $\psi\in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ очевидно, более того, $\psi\in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$. Кроме того, если $[\alpha,\beta]\subset K$ — какой-нибудь отрезок, содержащий носитель функции φ, то $\psi(t)=0$ для любого $t<\alpha$ и $\psi(t)$ есть величина постоянная при $t>\beta$ (если обозначить ее через c, то, очевидно, $c=(1,\varphi)$). Таким образом, если $(1,\varphi)=0$, то $c=0$, следовательно, ψ финитна и поэтому $\psi\in D$. И, наоборот, если $\psi\in D$, то ψ финитна, $c=0$ и $(1,\varphi)=0$.

Зафиксируем функцию φ_0 такую, что $(1,\varphi_0)=1$, произвольную функцию $\varphi\in D$, и пусть $c\doteq(1,\varphi)$. Если $\varphi_1=\varphi-c\varphi_0$, то $(1,\varphi_1)=0$, следовательно, функция $\psi_1(t)\doteq\int_a^t\varphi_1(s)\,ds$ принадлежит D. Поскольку $\psi_1\in\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то справедлива цепочка равенств

$$(x,\varphi_1)=\int_K\varphi_1(t)x(t)\,dt=\int_K x\,d\psi_1=-\int_K\psi_1 dx=-(x',\psi_1)=0,$$

поэтому $(x,\varphi)=c\,(x,\varphi_0)=(x,\varphi_0)\,(1,\varphi)$. Таким образом, для любого $\varphi\in D$ выполнено равенство $\big(\,x-(x,\varphi_0),\,\varphi\,\big)=0$, поэтому в соответствии с утверждением 1 справедливо включение $x-(x,\varphi_0)\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ и, следовательно, $x\sim\mathrm{const}$.

Достаточность. Если $x(t)=c+x_0(t)$, $c\in\mathbb{C}$, $x_0\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varphi\in D$ справедливо $(x',\varphi)=\int_K\varphi\,dx_0=-\int_K x_0d\varphi$, а поскольку $x_0\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, то в силу леммы 2 [6] имеем $(x',\varphi)=0$.

§ 5. Присоединенные обобщенные производные

5.1. Канонические уравнения в пространствах присоединенных распределений

Теорема 9 применима при решении абстрактных уравнений, заданных в терминах обобщенных прерывистых функций. В соответствии с этой теоремой произвольная функция $x\in\mathrm{G}$ порождает в $D\doteq D(a,b)$ функционал $x':D\to\mathbb{C}$ вида (4.1), причем $(x',\varphi)=0$ при всех $\varphi\in D$ тогда и только тогда, когда $x\sim\mathrm{const}$.

Зафиксируем разбиение $T\in\mathbb{T}(K)$. Для любых $x\in\mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^T$ (см. замечание 5) и $\varphi\in D$ существует присоединенный интеграл (1.1), поэтому определен линейный непрерывный функционал

$$(\dot x,\varphi)\doteq(\dot x,\varphi)^T\doteq\int_K\varphi\cdot dx. \tag{5.1}$$

Поскольку φ непрерывна, то $\varphi_T=0$, поэтому $\int_K\varphi\cdot dx=\int_K\varphi\,dx^T$, а тождество $(\dot x,\varphi)\equiv0$ справедливо тогда и только тогда, когда $x^T\sim\mathrm{const}$. При $T=\varnothing$ имеем $\dot x=x'$.

Для функций x из Γ^{loc} [или $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] и произвольных $\varphi\in D$ существует присоединенный интеграл $\int_K\varphi\circ dx$, понимаемый в смысле определения 4, поэтому в D' определен функционал

$$(\mathring{x},\varphi)\doteq\int_K\varphi\circ dx. \tag{5.2}$$

Из-за непрерывности φ справедливо $\int_K\varphi\circ dx=\int_K\varphi\,dx^c$, а тождество $(\mathring{x},\varphi)\equiv0$ имеет место тогда и только тогда, когда $x^c\sim\mathrm{const}$ (поэтому $x^c=\mathrm{const}$). Полученные результаты можно свести в следующую таблицу.

Таблица 1

Пространство	$x\in\mathrm{G}$	$x\in\mathrm{G}_{\mathrm{loc}}^T$	$x\in\Gamma^{\mathrm{loc}}$[или $x\in\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$]
Уравнение	$(x',\varphi)\equiv0$	$(\dot x,\varphi)^T\equiv0$	$(\mathring{x},\varphi)\equiv0$
Решение	$x\sim\mathrm{const}$	$x^T\sim\mathrm{const}$	$x^c=\mathrm{const}$
Общее решение	$x(t)=c+r(t)$ $\forall c\in\mathbb{C}$ $\forall r\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$	$x(t)=h(t)+r(t)$ $\forall h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ $\forall r\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T]$	$x(t)=h(t)$ $\forall h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$

В последней строке таблицы использованы следующие обозначения: $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}\doteq\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)$ — пространство [алгебра] таких функций $x:K\to\mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha,\beta]\subset K$ функция–сужение $x:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ является функцией скачков. Функции из $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$ также будем называть *функциями скачков.* Для любого $M\subseteq K$ пространство [алгебра] $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[M]\doteq\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)[M]$ состоит из тех функций $x\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$, что $T(x)\subseteq M$, а $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[M]\doteq\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(K)[M]$ состоит из тех $x\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, что $x(t)=0$ для всех $t\in M$ (что равносильно тому, что x непрерывна в точках M).

Замечание 7. Если $T=\varnothing$, то для функций h из $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]$ выполнено $T(h)=\varnothing$, то есть $h(t)=\mathrm{const}$, поэтому $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]\approx\mathbb{C}$, и в дальнейшем мы будем отождествлять $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]$ и $\mathbb{C}$. Кроме того, $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[\varnothing]=\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, поэтому целесообразно включить вторую колонку таблицы 1 в третью. В пользу такого объединения можно также добавить равенства $x^T=x$ и $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}=\mathrm{G}$, справедливые при $T=\varnothing$, и комментарии к определению 2, в соответствии с которыми при $T=\varnothing$ справедливо $\displaystyle\int_\alpha^t x\cdot dy=\int_\alpha^t x\,dy$, и поэтому $(\dot x,\varphi)^\varnothing=(x',\varphi)$ при всех $x\in\mathrm{G}$ и $\varphi\in D$.

Замечание 8. Согласно (2.6) и (2.8) [6] справедливо $x^T(t,\alpha)-x^T(t,\beta)=\mathrm{const}$, поэтому функционалы (5.1) и (5.2) не зависят от $\alpha\in K$.

Пусть $T\in\mathbb{T}(K)$ и $f\in\mathrm{G}$ — произвольная функция. Уравнение $(\dot x,\varphi)^T\equiv(f,\varphi)$ для $x\in\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ равносильно следующему:

$$\int_K\varphi\cdot dx\equiv\int_K\varphi(t)f(t)\,dt=\int_K\varphi(t)\,d\Big(\int_\alpha^t f(s)\,ds\Big)=\int_K\varphi(t)\cdot d\Big(\int_\alpha^t f(s)\,ds\Big). \qquad (5.3)$$

Последнее равенство справедливо в силу непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\displaystyle\int_\alpha^t f(s)\,ds$. Следовательно, $\displaystyle\Big(x(t)-\int_\alpha^t f(s)\,ds\Big)^T\sim\mathrm{const}$, поэтому $\displaystyle x(t)=\int_\alpha^t f(s)\,ds+h(t)+r(t)$, где $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$, $r\in\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T]$. Если присоединенная производная понимается в смысле определения (5.2), а $x\in\Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $x\in\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$], то решениями уравнения $(\mathring{x},\varphi)\equiv(f,\varphi)$ являются функции $\displaystyle x(t)=\int_\alpha^t f(s)\,ds+h(t)$, $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. Другими словами, семейство «первообразных» функции f, понимаемых в смысле присоединенных распределений, существенно расширяется: вместо констант к интегралам прибавляются функции скачков и, возможно, функции из $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$.

Заметим, что такие же решения мы получим, если $f\in\mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$, однако мы работаем лишь с прерывистыми функциями.

Пусть $X\subseteq\mathrm{G}$ — произвольное подмножество. Каковы бы ни были $T\in\mathbb{T}(K)$, оператор $\mathrm{V}:X\to\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ и функция $x\in X$, они порождают в D функционал $\displaystyle\varphi\to\int_K\varphi\cdot d\mathrm{V}x$. В дальнейшем для этого функционала будем применять обозначение $\dot{\mathrm{V}}x$, то есть

$$(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)\doteq(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^T\doteq\int_K\varphi\cdot d\mathrm{V}x. \qquad (5.4)$$

Оператор $\mathrm{V}:X\to\Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $\mathrm{V}:X\to\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] и произвольная функция $x\in X$ порождают в D линейный непрерывный функционал $\mathring{\mathrm{V}}x$ вида (5.2)

$$(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)\doteq\int_K\varphi\circ d\mathrm{V}x. \qquad (5.5)$$

Для таких V и x определены функционалы (5.5) и (5.4). В соответствии с замечанием 7 семейство (5.4) содержит функционал $((\mathrm{V}x)',\varphi)$, соответствующий разбиению $T=\varnothing$.

Замечание 9. Если $X=\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $\mathrm{V}x=x$, то все решения, приведенные в таблице 1, «схлопываются» в одно общее решение $x(t)=\mathrm{const}$, что согласуется с решением классического уравнения $x'=0$ и с равенством $(\mathring{x},\varphi)=(\dot x,\varphi)^T$, справедливым для любых непрерывных x и $T\in\mathbb{T}(K)$. Если $X=C$, то присоединенная производная определена в $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ и в Γ^{loc} — здесь также $x(t)=\mathrm{const}$. Если $X=\mathrm{BV}_L^{\mathrm{loc}}$ — пространство [алгебра] непрерывных слева функций локально ограниченной вариации (легко проверить равенство $\mathrm{BV}_L^{\mathrm{loc}}=\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\cap\mathrm{G}_L$), то решения $x(t)=\mathrm{const}$ остаются лишь для первого уравнения, а во втором и третьем случае решениями являются непрерывные слева функции скачков $x(t)=h(t)$ (соответственно $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]\cap\mathrm{G}_L$ и $h\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}\cap\mathrm{G}_L$).

Обобщая данные таблицы 1 на произвольный оператор V с областью задания X, справедливо утверждать, что для уравнений $\dot{\mathrm{V}}x=0$ и $\mathring{\mathrm{V}}x=0$ имеет место таблица 2. Отметим, что в последней строке таблицы 1 приведены все решения соответствующих уравнений, а в последней строке таблицы 2 выписаны лишь совокупности уравнений, эквивалентные этим уравнениям.

Таблица 2

Пространство	$\mathrm{V}x\in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$	$\mathrm{V}x\in \Gamma^{\mathrm{loc}}\ \big[\ \mathrm{V}x\in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\big]$
Уравнение	$(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{\scriptscriptstyle T}\equiv 0$	$(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)\equiv 0$
Эквивалентное уравнение	$(\mathrm{V}x)^{\scriptscriptstyle T}\sim \mathrm{const}$	$(\mathrm{V}x)^c=\mathrm{const}$
Эквивалентная система	$\begin{cases}(\mathrm{V}x)^{\scriptscriptstyle T}(t)=c+r(t)\\ x\in X\end{cases}$ $\forall c\in\mathbb{C}\ \ \forall r\in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0$	$\begin{cases}(\mathrm{V}x)^{c}(t)=c\\ x\in X\end{cases}$ $\forall c\in\mathbb{C}$

Пример 2. Пусть $T\in\mathbb{T}(K)$ (допускается $T=\varnothing$), $\alpha\in K$, $X=\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$, $q\in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $(\mathrm{V}x)(t)\doteq x(t)-\displaystyle\int_\alpha^t x\,dq$. В частном случае, когда $q\in\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, справедливо

$$(\mathrm{V}x)(t)=x(t)-\int_\alpha^t q'(s)x(s)\,ds \quad \text{и} \quad (\mathrm{V}x)'=x'-q'x,$$

поэтому уравнение $((\mathrm{V}x)',\varphi)\equiv 0$ равносильно уравнению $(x',\varphi)\equiv(q'x,\varphi)$ или $x'=q'x$.

Уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{\scriptscriptstyle T}\equiv 0$ эквивалентно уравнению $(\mathrm{V}x)^{\scriptscriptstyle T}\sim\mathrm{const}$ или совокупности

$$x(t)-\int_\alpha^t x\,dq=v(t)+r(t),\qquad \forall\, v\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T],\qquad \forall\, r\in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[T],$$

а в силу (1.2) [6] и леммы 2 [6] справедливо $x(t)=\Big[v(\alpha)\,e^{-q(\alpha)}+\displaystyle\int_\alpha^t e^{-q(s)}\,dv(s)\Big]\,e^{q(t)}+r(t)$. Через h обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках. Очевидно, она является функцией скачков и $h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$. Легко проверить, что отображение $v\to h$ является биекцией $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$, поэтому всякое решение уравнения $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{\scriptscriptstyle T}\equiv 0$ представимо в виде $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}+r(t)$ через произвольные $h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ и $r\in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[T]$. Если $T=\varnothing$, то согласно замечанию 7 справедливо $x(t)=c\,e^{q(t)}+r(t)$. Если $X=\Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $X=\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$], то уравнение $(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)\equiv 0$ равносильно уравнению $(\mathrm{V}x)^c=\mathrm{const}$ или совокупности уравнений

$$x(t)-\int_\alpha^t x\,dq=v(t),\qquad \forall\, v\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}.$$

Повторив выкладки, получим, что $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}$, где $h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. Таким образом, имеет место

Таблица 3

Пространство	$x\in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$	$x\in \Gamma^{\mathrm{loc}}\ \big[\ x\in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\big]$
Уравнение	$(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{\scriptscriptstyle T}\equiv 0$	$(\mathring{\mathrm{V}}x,\varphi)\equiv 0$
Общее решение	$x(t)=h(t)\,e^{q(t)}+r(t)$ $\forall h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]\ \ \forall r\in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[T]$	$x(t)=h(t)\,e^{q(t)}$ $\forall h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$

5.2. Об импульсных уравнениях

Следуя [11], [12], *импульсным* будем называть уравнение

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))\,\dot{Q}(t),$$

заданное в терминах обобщенных функций. Через x и Q обозначены соответственно n-мерная и m-мерная векторные функции, а матричнозначная функция $f:\Omega\to\mathbb{C}^{n\times m}$ задана в области $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$. Простейшим представителем является импульсное уравнение $\dot x=\delta(t)x$, однако уже для его решения существующие в настоящее время подходы дают зачастую противоречащие друг другу результаты. Мы вернемся к этому уравнению ниже в примере 3 и в замечании 11.

С позиций присоединенных распределений появляется еще два «импульсных» уравнения $\dot{\mathrm{V}}x=0$ и $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x=0$, где оператор $\mathrm{V}:X^n\to\mathrm{G}^n$ имеет вид $(\mathrm{V}x)(t)\doteq x(t)-\displaystyle\int_\alpha^t f(s,x(s))\,dQ(s)$. (Конечно же, первое уравнение — это семейство уравнений, зависящее от разбиений T.) Здесь $X\subseteq\mathrm{G}$, компоненты вектора Q принадлежат $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, а f — непрерывная функция. В рамках работы мы ограничиваемся достаточно простым случаем таких уравнений, прототипом которых служит система обыкновенных дифференциальных уравнений $x'=Q'Ax$, где A — квадратная матрица, $Q\in\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$ — скалярная функция.

Пусть $T\in\mathbb{T}(K)$, $\alpha\in K$, $Q\in\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$ (допускается $T=\varnothing$ и $T(Q)=\varnothing$), A — квадратная матрица порядка n с элементами $A_{ij}\in\mathbb{C}$, $X=\{x\in\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}:T(x)\cap T(Q)=\varnothing\}$. Для оператора $(\mathrm{V}x)(t)\doteq x(t)-\displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dQ$, действующего из X^n в $\mathrm{G}^{T,n}_{\mathrm{loc}}$ (в прямое произведение n одинаковых пространств $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$), и любого $y\in\mathrm{G}^{T,n}_{\mathrm{loc}}$ определено уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^T\equiv(\dot y,\varphi)^T$ или $\dot{\mathrm{V}}x=\dot y$.

Замечание 10. В силу следствия 5 [6] оператор V определен корректно. В семейство уравнений $\dot{\mathrm{V}}x=\dot y$ (с разными $y\in\mathrm{G}^{T,n}_{\mathrm{loc}}$) входит уравнение $\dot{\mathrm{V}}x=f$, где f — произвольная прерывистая векторная функция. Дело в том, что в соответствии с (5.3) каждая компонента вектор-функционала (f,φ) равна правой части этой цепочки.

Уравнение $\dot{\mathrm{V}}x=\dot y$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases}(\mathrm{V}x)^T-y^T=\gamma+\varrho,\\ x\in X^n,\end{cases}\qquad\forall\gamma\in\mathbb{C}^n,\ \forall\varrho\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,n}.$$

В силу уравнения ϱ непрерывна в точках T, поэтому $\varrho\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,n}[T]$. Пусть $P\doteq T\cap T(Q)$, $R\doteq T(Q)\backslash T$, $S\doteq T\backslash T(Q)$, $U\doteq T\cup T(Q)$. Справедливо $y^T=y^U+y_R$ и $Q=q+Q_R+Q_P$, где $q\doteq Q^c\in\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$, поэтому уравнения из совокупности имеют вид

$$x(t)-\int_\alpha^t Ax\,dq=y^U(t)+\Big[y_R(t)+\int_\alpha^t Ax\,dQ_R\Big]+\big[x_T(t)+\gamma\big]+\varrho(t). \tag{5.6}$$

Воспользовались тем, что поскольку $P\subseteq T$, то $\Big(\displaystyle\int_\alpha^t x\,dQ_P\Big)^T=0$. Согласно лемме 7 [6] функции, стоящие в квадратных скобках, являются функциями скачков, причем если обозначить их через u и v соответственно, то $u\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[R]$ и $v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T]$. Все функции (кроме v), входящие в (5.6), непрерывны во всех точках $t\in P$, поэтому и v непрерывна там, то есть $v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]$. Следовательно, совокупность уравнений превращается в совокупность систем:

$$\begin{cases}x(t)-\displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dq=y^U(t)+u(t)+v(t)+\varrho(t),\\ u(t)=y_R(t)+\displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dQ_R, & \forall v\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S],\quad\forall\varrho\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,n}[T]\,.\\ x\in X^n,\end{cases} \tag{5.7}$$

Все функции (кроме u и ϱ), входящие в первое уравнение (5.7), непрерывны во всех точках $t\in R$, поэтому функция $z\doteq u+\varrho$, а вместе с ней и z_L (напомним, что $z_L(t)=z(t-0)$) также непрерывны в точках разбиения R. В соответствии с замечанием 3 имеет место представление $u=u_L+u_0$, где $u_L\in\mathrm{G}^n_L$, $u_0\in\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,n}[K\backslash R]$. Поскольку $u_L\in\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[R]$, $u_L=z_L$, а z_L непрерывна в R, то $u_{{}_L}(t)$ — вектор-константа ($= u_{{}_L}(\alpha)$), поэтому $u(t) = u_{{}_L}(\alpha) + u_{{}_0}(t)$, то есть u — функция, эквивалентная вектор-константе ($u \sim c \in \mathbb{C}^{\,n}$).

Если $\vartheta(\cdot) \doteq u_{{}_L}(\alpha) + v(\cdot)$ (легко убедиться, что $\vartheta \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S]$) и $r \doteq u_{{}_0} + \varrho$ (функция r, очевидно, непрерывна в точках разбиения T), то первое уравнение (5.7) принимает вид $x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dq = y^{{}_U}(t) + \vartheta(t) + r(t)$. В силу последнего уравнения функция r непрерывна во всех точках разбиения $T(Q)$, поэтому $r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T \cup T(Q)] = \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U]$. Таким образом, уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dq = y^{{}_U}(t) + \vartheta(t) + r(t), \\ x \in Y^n, \end{cases} \qquad \forall\, \vartheta \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S],\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U]\,,$$

где через Y^n обозначено линейное многообразие $Y^n \doteq \Big\{x \in X^n \;\Big|\; y_{{}_R}(t) + \displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dQ_{{}_R} \sim c \in \mathbb{C}^{\,n}\Big\}$. Согласно (1.2) [6] каждое уравнение совокупности эквивалентно

$$x(t) = \Phi(t) + e^{Aq(t)}\Big[e^{-Aq(\alpha)}(y^{{}_U}(\alpha) + \vartheta(\alpha)) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,d\vartheta\Big] + r(t), \tag{5.8}$$

где $\Phi(t) \doteq \displaystyle\int_\alpha^t e^{A(q(t)-q(s))}\,dy^{{}_U}(s)$ — функция, зависящая лишь от исходных параметров. Через h обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках (5.8). Отображение $\vartheta \to h$ является биекцией $\mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S]$, поэтому уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t) + e^{Aq(t)}\,h(t) + r(t), \\ x \in Y^n, \end{cases} \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S],\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U]\,.$$

Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{{}_U}\Big] + r(t), \quad \forall h \in \mathrm{H},\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U], \tag{5.9}$$

где через H обозначено линейное многообразие

$$\mathrm{H} \doteq \Big\{h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\Big|\; y_{{}_R}(t) + \int_\alpha^t A\,[\Phi(s) + e^{Aq(s)}h(s)\,]\,dQ_{{}_R}(s) \sim c \in \mathbb{C}^{\,n}\Big\} =$$

$$= \Big\{h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\Big|\; y_{{}_R}(t) + \int_\alpha^t Ae^{Aq(s)}[h(s) + \int_\alpha^s e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{{}_U}]\,dQ_{{}_R}(s) \sim c \in \mathbb{C}^{\,n}\Big\}.$$

Таким образом, доказано

Утверждение 2. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, A — *квадратная матрица порядка* n *с элементами* $A_{ij} \in \mathbb{C}$, $X = \big\{x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\big\}$. *Для оператора* $\mathrm{V} : X^n \to \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}$ *такого, что* $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t Ax\,dQ$, *и для любого* $y \in \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}$ *уравнение* $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{{}_T} \equiv (\dot{y}, \varphi)^{{}_T}$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\mathrm{H} \neq \varnothing$. *При этом семейством решений является многообразие* (5.9).

Следствие 1. *Если* $T \supseteq T(Q)$, *то* $R = \varnothing$, *поэтому* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[T \backslash T(Q)]$, *а семейством решений уравнения* $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{{}_T} \equiv (\dot{y}, \varphi)^{{}_T}$ *является многообразие* (5.9), *в котором* $U = T$:

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{{}_T}\Big] + r(t), \quad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[T \backslash T(Q)], \quad \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T]\,.$$

Если к тому же справедливо включение $T \supseteq T(y)$, *то* $y^{{}_T} = y^c$ — *непрерывная функция, а совокупность* $x(t) = e^{Aq(t)}\Big[c + \displaystyle\int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^c\Big]$, $c \in \mathbb{C}^{\,n}$ *является в этом случае семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Пример 3. Функция $Q \doteq (1-\mu)\xi + \mu\eta$ порождает δ-функцию $\varphi \to \varphi(0)$, поскольку

$$(Q', \varphi) = \int_K \varphi\, dQ = (1-\mu)\int_K \varphi\, d\xi + \mu \int_K \varphi\, d\eta = \varphi(0).$$

Другими словами, $Q' = \delta$ для любого μ. Если $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t x\, dQ$, то при любом $T \in \mathbb{T}(K)$ уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \equiv 0$ можно интерпретировать как импульсное уравнение $\dot{x} = \delta(t)x$. Здесь мы имеем $n = 1$, $A = 1$, $y = 0$, $T(Q) = \{0\}$ и $q = \mathrm{const}$. Следовательно, если $0 \in T$, то множество всех решений уравнения имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t), \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T \backslash \{0\}],\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T].$$

Константы, и только они, являются непрерывными решениями уравнения. Если же $0 \notin T$, то $U = T \cup \{0\}$, $S = T$, $R = \{0\}$ и

$$\mathrm{H} = \Big\{ h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \ \Big|\ \int_\alpha^t e^{q(\cdot)} h\, dQ \sim \mathrm{const} \Big\} = \big\{ h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \ \big|\ h(0) = 0 \big\},$$

а множество всех решений уравнения имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}[T \cup \{0\}].$$

Единственным непрерывным решением при $0 \notin T$ является $x = 0$.

Теорема 10. *Пусть* $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, A *— квадратная матрица порядка* n *с элементами* $A_{ij} \in \mathbb{C}$. *Для оператора* $\mathrm{V} : X^n \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *такого, что* $X = \{ x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing \}$, $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t Ax\, dQ$, *и для любого* $y \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство решений уравнения* $(\mathring{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\mathring{y}, \varphi)$ *представимо в виде (где использовано обозначение* $q \doteq Q^c$*)*

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\, dy^c \Big] \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[\, K \backslash T(Q)]. \tag{5.10}$$

Совокупность $x(t) = e^{Aq(t)}\Big[c + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\, dy^c \Big]$, $c \in \mathbb{C}^n$ *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $\mathring{\mathrm{V}}x = \mathring{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^c - y^c = \gamma, \\ x \in X^n, \end{cases} \qquad \forall\, \gamma \in \mathbb{C}^n.$$

Так как $Q = q + Q_c$, $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $\Big(\int_\alpha^t Ax\, dQ_c\Big)^c = 0$, то каждое из уравнений имеет вид $x(t) - \int_\alpha^t Ax\, dq = y^c(t) + \big[\, x_c(t) + \gamma\,\big]$. Функция, стоящая в квадратных скобках (обозначим ее v), является функцией скачков, то есть $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}$. Все функции (кроме v), входящие в уравнение, непрерывны во всех точках $t \in T(Q)$, поэтому и v непрерывна там, то есть $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)]$. Согласно (1.2) [6] уравнение эквивалентно (учитывая, что введенное ниже отображение $v \to h$ является биекцией $\mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)]$)

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big\{ \Big[e^{-Aq(\alpha)}(y^c(\alpha) + v(\alpha)) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)} dv \Big] + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)} dy^c \Big\} = e^{Aq(t)}\Big[h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\, dy^c \Big].$$

Замечание 11. Решениями импульсного уравнения $\dot{x} = \delta(t)x$ из примера 3 (то есть уравнения $(\mathring{\mathrm{V}}, \varphi) \equiv 0$) являются непрерывные в нуле функции скачков $x = h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[K \backslash \{0\}]$, а непрерывные решения — это функции–константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: учеб. для вузов. — 5-е изд. — М.: Наука, 1981. — 544 с.

2. Родионов В. И. О пространстве регулярно дифференцируемых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2004. — Вып. 1 (29). — С. 3–32.

3. Родионов В. И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2005. — Вып. 1 (31). — С. 3–78.

4. Родионов В. И. О сильных и слабых операторах в пространстве прерывистых функций // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 1 (35). — С. 3–32.

5. Родионов В. И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса // Известия вузов. Математика. — 2007. — № 2 (537). — С. 79–82; англ. пер.: Rodionov V. I. The adjoint Riemann-Stieltjes integral // Russian Mathematics (Iz. VUZ). — 2007. — Vol. 51, № 2. — С. 75–79. `http://www.springerlink.com/content/b5724677n40w88h0`

6. Родионов В. И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 4. — С. 7–24.

7. Общая алгебра. Т. 1 / Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Под общ. ред. Л. А. Скорнякова — М.: Наука, 1990. — 592 с.

8. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. — М.: Наука, 1976. — 648 с.

9. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 448 с.

10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — 3-е изд. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

11. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

12. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.

Поступила в редакцию 26.11.09

V. I. Rodionov
On solvability of impulse systems

In parametrical family of subspaces of space of regulated functions the concept of the adjoint integral (in everyone subspace own integral is applied) is defined. In subspace, representing their crossing, the concept of the adjoint integral also is defined. This subspace includes the space of functions of the bounded variation. In any subspace on the basis of the adjoint integral the concept of the generalized regulated function and its adjoint generalized derivative is defined. Solvability of linear impulse systems in terms of adjoint generalized functions is proved.

Keywords: regulated function, distribution, impulse equation.

Mathematical Subject Classifications: 46F05, 34A37

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), e-mail: rodionov@uni.udm.ru