МАТЕМАТИКА 2010. Вып. 2

УДК 517.972.8

© *А. Г. Ченцов*

# К ВОПРОСУ О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ СОБЛЮДЕНИИ ОГРАНИЧЕНИЙ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ [1]

Рассматривается абстрактная задача управления и ее релаксации, связанные с ослаблением ограничений на выбор управляющих программ. Исследуются соотношения, связывающие множества допустимых элементов исходной задачи и ее расширения. Получены условия, достаточные для устойчивости (с точностью до замыкания) достижимого множества невозмущенной задачи.

*Ключевые слова*: конечно-аддитивная мера, множество притяжения, ограничения моментного характера.

## Введение

Основные сокращения: в/з (вещественнозначная), к.-а. (конечно-аддитивная), МП (множество притяжения), НМ (направленное множество), п/м (подмножество), п/п (подпространство), ТП (топологическое пространство).

В задачах управления нередко отсутствует свойство устойчивости при возмущении системы ограничений. Упомянутые возмущения зачастую сводятся к ослаблению стандартных ограничений. Режимы управления «на грани фола» представляют в ряде случаев практический интерес. Возникает, однако, вопрос: какой ценой достигается в этом случае тот или иной результат? Соблюдаются ли ограничения исходной задачи или необходимы их «малые» нарушения? Важную роль в исследовании такого рода вопросов играют расширения исходной задачи, которые часто реализуются в том или ином классе мер, рассматриваемых в этом случае в качестве обобщенных управлений (см., в частности, [1–3]).

Управления–меры (в традиционном понимании) широко используются при построении расширений задач управления с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л. С. Понтрягиным. В задачах импульсного управления отметим оригинальный подход Н. Н. Красовского, связанный с применением аппарата теории обобщенных функций (см. [4]).

Элементы теории расширений широко использовались в игровых задачах управления (см. [1], [5–7]). В частности, фундаментальное понятие стабильности мостов Н. Н. Красовского в теории дифференциальных игр предполагает применение обобщенных элементов в форме управлений–мер, решений «овыпукленных» дифференциальных включений для организации воздействий, парирующих обычные управления одного из игроков. Это обстоятельство сыграло, наряду с правилом экстремального сдвига, важную роль в обосновании основополагающей теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [5]).

В настоящей работе систематически исследуется целый ряд вопросов, связанных с расширениями. Прежде всего здесь рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью (с точностью до замыкания) задачи, являющейся абстрактным аналогом задачи о построении области достижимости в теории управления; исследуется влияние ослабления ограничений моментного характера. Конкретная природа таких ограничений может быть весьма различной. В частности, они могут соответствовать краевым и промежуточным условиям в линейных задачах управления. В дальнейшем используются конструкции [8–11].

[1] Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00436, 08-08-00981).

## § 1. Сводка обозначений и определений общего характера

Используем кванторы и пропозициональные связки; $\exists!$ заменяет фразу «существует и единственно», def — фразу «по определению». В дальнейшем $\triangleq$ — равенство по определению. Множество, все элементы которого сами являются множествами, называем семейством. Принимаем аксиому выбора. Выражение $\exists_T S[T \neq \varnothing]$ заменяет высказывание: существует непустое множество $T$; разумеется, здесь вместо $T$ может использоваться произвольная буква.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$ ) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества $X$, $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех непустых конечных п/м $X$. Если $A$ и $B$ — множества, то через $B^A$ обозначаем [12] множество всех отображений из $A$ в $B$; если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x):\ x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества $C$ при действии $f$.

Если $A$ — множество, то через $\beta[A]$ (через $\beta_0[A]$ ) обозначаем множество всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(A))$ ), для каждого из которых

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Семейства из $\beta_0[A]$ — суть базы фильтров $A$ (см. [13, 14]) и только они. Семейства — элементы $\beta[A]$ — могут рассматриваться как направленные двойственно к вложению. Через $\mathfrak{F}[A]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(A))$, для каждого из которых $(\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \in \mathcal{F}\ \ \forall \widetilde{A} \in \mathcal{F}\ \forall \widetilde{B} \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall G \in \mathcal{P}(A)\ \ ((F \subset G) \Longrightarrow (G \in \mathcal{F})))$; $\mathfrak{F}[A]$ — множество всех фильтров множества $A$.

**Элементы топологии.** Если $(X, \tau)$ есть ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то:

1) $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание множества $A$ в ТП $(X, \tau)$;

2) $\tau|_A \triangleq \{A \cap G : G \in \tau\}$ есть топология множества $A$, индуцированная из $(X, \tau)$, а ТП $(A, \tau|_A)$ — п/п исходного ТП $(X, \tau)$;

3) в терминах семейства $\mathcal{N}^0_\tau[A] \triangleq \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ определяется семейство $\mathcal{N}_\tau[A] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in \mathcal{N}^0_\tau[A]:\ G \subset H\}$ всех окрестностей [13, гл. I] множества $A$ в ТП $(X, \tau)$.

Если $(X, \tau)$ — ТП, то через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных [14, с. 196, 197] в $(X, \tau)$ п/м множества $X$. Компактом, следуя традиции [14, с. 208], называем компактное хаусдофово ТП. Если $(X, \tau)$ — ТП и $x \in X$, то $N^0_\tau(x) \triangleq \mathcal{N}^0_\tau[\{x\}]$ и $N_\tau(x) \triangleq \mathcal{N}_\tau[\{x\}]$ (фильтр окрестностей точки в ТП $(X, \tau)$ ). Если $(A, \tau_1)$ и $(B, \tau_2)$ — два ТП, то через $C(A, \tau_1, B, \tau_2)$ обозначаем множество всех $(\tau_1, \tau_2)$-непрерывных отображений из множества $B^A$: $\ C(A, \tau_1, B, \tau_2) \triangleq \{f \in B^A \mid f^{-1}(G) \in \tau_1\ \forall G \in \tau_2\}$.

**Направленности.** Если $T$ — непустое множество, то через $(\mathrm{DIR})[T]$ обозначаем множество всех направлений на $T$ (см. [15, с. 95]); данное обозначение соответствует [10, (2.2.4)]. Если $\preceq \in (\mathrm{DIR})[T]$, $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$, то, как обычно, $t_1 \preceq t_2$ обозначает [10, (2.2.1)] свойство $(t_1, t_2) \in \preceq$ (напомним, что $\preceq$ есть непустое п/м $T \times T$ ); иными словами, $t_2$ мажорирует $t_1$ в смысле НМ $(T, \preceq)$. Направленностью в множестве $X$ называем всякий триплет $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, f)$, где $\mathbb{D}$ — непустое множество, $\sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}]$ и $f \in X^{\mathbb{D}}$. Если $(\mathbf{D}, \preceq, g)$ есть направленность в множестве $X$, то

$$\begin{gathered}(X - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \preceq; g] \triangleq \{M \in \mathcal{P}(X) \mid \exists d \in \mathbf{D}\ \forall \delta \in \mathbf{D}\\ ((d \preceq \delta) \Longrightarrow (g(\delta) \in M))\} \in \mathfrak{F}[X]\end{gathered} \tag{1.1}$$

(фильтр $X$, ассоциированный с $(\mathbf{D}, \preceq, g)$ ). Полагаем, что (см. [13, гл. I]) при всяком выборе ТП $(X, \tau)$, фильтра $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ и точки $x \in X$

$$\left(\mathcal{F} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\right) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset \mathcal{F}). \tag{1.2}$$

Данное определение сходимости фильтра согласуется с [13, с. 97], где введено более общее понятие сходимости базы фильтра (заметим, что $\mathfrak{F}[X] \subset \beta_0[X]$ ). Сходимость (направленностей) по Мору–Смиту определяется в терминах (1.1), (1.2): если $(X,\tau)$ есть ТП, $(\mathbb{D},\preceq,f)$ — направленность в $X$ и $x\in X$, то

$$\Big((\mathbb{D},\preceq,f)\stackrel{\tau}{\longrightarrow}x\Big)\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\Big((X-\text{ass})\,[\mathbb{D};\preceq;f]\stackrel{\tau}{\Longrightarrow}x\Big). \tag{1.3}$$

Из (1.1)–(1.3) имеем, конечно, при тех же условиях на $(X,\tau)$, $(\mathbb{D},\preceq,f)$ и $x$, что

$$\Big((\mathbb{D},\preceq,f)\stackrel{\tau}{\longrightarrow}x\Big)\Longleftrightarrow\big(N_\tau(x)\subset(X-\text{ass})[\mathbb{D};\preceq;f]\big). \tag{1.4}$$

Представление (1.4) соответствует [15, гл. 2] (см. (1.1)).

**Множества притяжения в ТП.** Если $A$ — непустое множество, $(X,\tau)$ — ТП, $r\in X^A$ и $\mathcal{A}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то

$$\begin{gathered}(\mathbf{as})[A;X;\tau;r;\mathcal{A}]\stackrel{\triangle}{=}\Big\{x\in X\mid\exists_{\mathbb{D}}\,S[\mathbb{D}\neq\varnothing]\,\exists\preceq\in(\text{DIR})[\mathbb{D}]\,\exists\,h\in X^A:\\(\mathcal{A}\subset(A-\text{ass})[\mathbb{D};\preceq;h])\ \&\ \Big((\mathbb{D},\preceq,r\circ h)\stackrel{\tau}{\longrightarrow}x\Big)\Big\}\end{gathered} \tag{1.5}$$

(здесь и ниже $\circ$ — символ суперпозиции). В случае $\mathcal{A}\in\beta[A]$ множество (1.5), именуемое далее МП, совпадает с пересечением всех множеств $\text{cl}\big(r^1(B),\tau\big)$, $B\in\mathcal{A}$. В этой связи см., например, [8–11]).

**Дополнительные обозначения.** Всюду в дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, оснащаемая обычной $|\cdot|$-топологией $\tau_{\mathbb{R}}$ и дискретной топологией $\tau_\partial\stackrel{\triangle}{=}\mathcal{P}(\mathbb{R})$; $\mathbb{N}\stackrel{\triangle}{=}\{1;2;\ldots\}$ (натуральный ряд). В дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций (то есть функций со значениями в $\mathbb{R}$) определяются поточечно. Если $k\in\mathbb{N}$, то полагаем, что $\overline{1,k}\stackrel{\triangle}{=}\{i\in\mathbb{N}\mid i\leqslant k\}$. С целью исключения двусмысленности в традиционных обозначениях постулируем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами. С учетом этого полагаем, как обычно, при всяком выборе множества $T$ и числа $m\in\mathbb{N}$, что $T^m\stackrel{\triangle}{=}T^{\overline{1,m}}$, получая (в виде $T^m$) множество всех кортежей

$$(t_i)_{i\in\overline{1,m}}:\ \overline{1,m}\longrightarrow T \tag{1.6}$$

(здесь и ниже используем индексную форму записи отображений, принятую, в частности, в [1]). Каждый кортеж (1.6) является, строго говоря, отображением из $\overline{1,m}$ в $T$. В частности, при $m\in\mathbb{N}$ элементы $\mathbb{R}^m$, то есть $m$-мерные векторы, рассматриваем как кортежи вида (1.6), что доставляет некоторые удобства в дальнейшем, не влияя на существо дела; оснащаем $\mathbb{R}^m$ топологией покоординатной сходимости $\tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$, получая «векторный аналог» топологии $\tau_{\mathbb{R}}$. Для дальнейшего удобно также условиться о соглашении: при $x\in\mathbb{R}^m$ через $\|x\|_m$ обозначаем наибольшее среди всех значений модулей компонент вектора $x$.

## § 2. Конечно-аддитивные меры и проблема допустимости в случае ограничений моментного характера

Фиксируем непустое множество $E$ и полуалгебру (см. [16, гл. I], [17, гл. 2]) $\mathcal{L}$ п/м $E$, получая измеримое пространство $(E,\mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. Через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию; $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (как линейное пространство) порождено конусом $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ всевозможных неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$. Если $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$, то $\mathbf{v}_\mu\in(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ есть def вариация $\mu$ как функции множеств (см. [8, (3.3.8)], [9, (3.4.8)], [17, (4.11.7)]). Зависимость

$$\mu\longmapsto\mathbf{v}_\mu(E):\ \mathbb{A}(\mathcal{L})\longrightarrow[0,\infty[$$

есть сильная норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; см. [17, с. 151–152]. Через $\chi_L$ условимся обозначать индикатор множества $L\in\mathcal{L}$ (см. [16, с. 56], [17, (1.5.12)]): $\chi_L\in\mathbb{R}^E$ и при этом $\chi_L(x)\stackrel{\triangle}{=}1$ для $x\in L$ и

$\chi_L(y) \triangleq 0$ для $y \in E \setminus L$. Линейную оболочку множества $\{\chi_L : L \in \mathcal{L}\}$ обозначаем через $B_0(E,\mathcal{L})$, получая (линейное) многообразие всевозможных ступенчатых, в смысле $(E,\mathcal{L})$, в/з функций на $E$. При этом $B_0(E,\mathcal{L}) \subset \mathbb{B}(E)$, где $\mathbb{B}(E)$ — множество всех ограниченных в/з функций на $E$, оснащаемое традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$ (см. [17, (2.6.3)], [18, гл. IV]). Замыкание $B_0(E,\mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $\|\cdot\|$ обозначаем через $B(E,\mathcal{L})$ (см. [17, гл. 2]), что согласуется с [18, гл. IV] в случае пространства с алгеброй множеств. Через $B_0^+(E,\mathcal{L})$ (через $B^+(E,\mathcal{L})$ ) обозначаем множество всех неотрицательных функций из $B_0(E,\mathcal{L})$ (из $B(E,\mathcal{L})$ ). Если $f \in B_0(E,\mathcal{L})$, то

$$\mathbf{|}f\mathbf{|} \triangleq (|f(x)|)_{x\in E} \in B_0^+(E,\mathcal{L}).$$

Отметим, что (см. [17, гл. 3], [18, гл. IV]) $B(E,\mathcal{L})$ как п/п $(\mathbb{B}(E),\|\cdot\|)$ само является банаховым пространством, а пространство $B^*(E,\mathcal{L})$ — топологическое сопряженное $B(E,\mathcal{L})$ — изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме; см. [17, с. 152]. Двойственность $(B(E,\mathcal{L}),\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ позволяет ввести стандартную $*$-слабую топологию $\tau_*(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; при этом реализуется локально выпуклый $\sigma$-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L})) \tag{2.1}$$

(условия компактности в ТП (2.1) определяются известной теоремой Алаоглу; см. [18, гл. V]). Рассматриваем также топологию $\tau_0(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (см. [8, (4.2.9)]):

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_0(\mathcal{L})) \tag{2.2}$$

есть п/п тихоновской степени ТП $(\mathbb{R},\tau_\partial)$ при использовании $\mathcal{L}$ в качестве индексного множества. В связи со сравнением ТП (2.1), (2.2) отметим, что (2.1) естественно в конструкциях расширения абстрактных задач управления; при этом обычные управления, рассматриваемые как элементы $B^*(E,\mathcal{L})$, «замыкаются» в ТП (2.1), чем во многих практически интересных случаях реализуется компактификация пространства обычных управлений. Поэтому в конструкциях расширений ТП (2.1) может рассматриваться в качестве основного, что согласуется с общими положениями функционального анализа. Роль топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ иная: ТП (2.2) оказалось полезным с точки зрения исследования вопросов устойчивости и асимптотической нечувствительности задач о достижимости при ослаблении части ограничений (см. [8, 9]). Заметим, что ТП (2.1) и (2.2), вообще говоря, несравнимы; см. [8, § 4.4]. В этой связи введем

$$\mathfrak{K}[\mathcal{L}] \triangleq \left\{K \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \tau_*(\mathcal{L})|_K \subset \tau_0(\mathcal{L})|_K\right\}, \tag{2.3}$$

получая (весьма обширное; см. [8, 9, 11]) семейство множеств сравнимости.

Всюду в дальнейшем используем простейшую схему интегрирования [17, гл. 3] (ярусных) функций из $B(E,\mathcal{L})$ по к.-а. мерам из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. На этой основе, в частности, определяется изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E,\mathcal{L})$; см. [17, § 3.6]. Упомянутая схема согласуется с конструкцией интегрирования по к.-а. мере, используемой в [18, гл. III, IV] в случае измеримого пространства с алгеброй множеств (в этой связи см. теорему об изометрическом изоморфизме в [18, с. 280]).

В дальнейшем используется конструкция неопределенного интеграла [17, § 3.7]: если $f \in B(E,\mathcal{L})$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то $f * \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ есть неопределенный $\mu$-интеграл $f$ (см. [17, с. 158]).

Всюду в дальнейшем фиксируем число $n \in \mathbb{N}$, кортеж $(s_i)_{i\in\overline{1,n}} \in B(E,\mathcal{L})^n$, а также множество $Y \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, замкнутое в $\left(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\right)$. Рассматриваем следующее моментное ограничение

$$\left(\int_E s_i d\mu\right)_{i\in\overline{1,n}} \in Y \tag{2.4}$$

на выбор $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$; предполагается также, что к.-а. мера $\mu$ в (2.4) должна быть элементом того или иного непустого п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. В этой связи полагаем, что

$$(\mathrm{ADM})\,[H] \triangleq \left\{\mu \in H \mid \left(\int_E s_i d\mu\right)_{i\in\overline{1,n}} \in Y\right\} \quad \forall\, H \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L})). \tag{2.5}$$

Если $T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, то (2.5) можно использовать при $H = T$ и $H = \mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L}))$; последний вариант может быть полезен для целей расширения соответствующей задачи о достижимости в условиях ограничений (2.4). Вполне очевидно следующее общее свойство:

$$\mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[T], \tau_*(\mathcal{L})) \subset (\mathrm{ADM})[\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L}))] \;\; \forall\, T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L})). \tag{2.6}$$

При доказательстве (2.6) используются свойства [10, (2.3.16), (4.6.16)] и замкнутость множества $Y$. Наиболее интересен случай, когда в (2.6) реализуется равенство (при соответствующем выборе множества $T$). В этой связи полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \Big\{ T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \forall\, \mu \in (\mathrm{ADM})[\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L}))] \; \exists_{\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing] \\ \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}] \; \exists\, g \in T^{\mathbb{D}} : \; \Big( (\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu \Big) \; \& \; \Big( (\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu \Big) \Big\}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Легко видеть, что справедливо следующее свойство: $\forall\, T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$,

$$\begin{gathered}((\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L})) \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]) \; \& \; (\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(T, \tau_0(\mathcal{L})))) \Longrightarrow (\forall\, \mu \in \mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L})) \; \exists_{\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing] \\ \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}] \; \exists\, g \in T^{\mathbb{D}} : \; ((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu) \; \& \; ((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu)).\end{gathered} \tag{2.8}$$

**Замечание 1.** Для доказательства (2.8) фиксируем $T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$. Пусть истинно утверждение посылки доказываемой импликации (2.8). Поэтому (см. (2.3))

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{T}} \subset \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{T}}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{T} \overset{\triangle}{=} \mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L}))$. Тогда $\mathbf{T} = \mathrm{cl}(T, \tau_0(\mathcal{L}))$. Пусть $\nu \in \mathbf{T}$ и, следовательно, $\nu \in \mathrm{cl}(T, \tau_0(\mathcal{L}))$. Поэтому (см. [10, (2.3.11)]) для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, h)$ в множестве $T$ имеем сходимость

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, h) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu. \tag{2.10}$$

При этом $\mathbf{D}$ — непустое множество, $\sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}]$ и $h \in T^{\mathbf{D}}$. В частности, $h \in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}$, а потому [10, (2.3.9)]

$$(\mathbf{D}, \sqsubseteq, h) \overset{\tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{T}}}{\longrightarrow} \nu. \tag{2.11}$$

Тогда с учетом (2.9) и (2.11) имеем сходимость $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, h) \overset{\tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{T}}}{\longrightarrow} \nu$. Поскольку $h \in \mathbf{T}^{\mathbf{D}}$ и $\nu \in \mathbf{T}$, то (см. [10, (2.3.9)]) $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, h) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu$. Следовательно (см. (2.10)),

$$\Big( (\mathbf{D}, \sqsubseteq, h) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu \Big) \; \& \; \Big( (\mathbf{D}, \sqsubseteq, h) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu \Big).$$

Поскольку выбор $\nu$ был произвольным, следствие импликации (2.8) установлено. □

Из (2.5), (2.7) и (2.8) вытекает с очевидностью, что $\forall\, T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$:

$$((\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L})) \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]) \; \& \; (\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(T, \tau_0(\mathcal{L})))) \Longrightarrow \big( T \in \mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}] \big). \tag{2.12}$$

Далее будет показано, что семейство $\mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}]$ может содержать множества $T \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, для которых $\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L})) \notin \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$.

**Условие 1.** $s_j \in B_0(E, \mathcal{L}) \;\; \forall\, j \in \overline{1, n}$.

**Замечание 2.** Отметим, что в качестве ограничений, удовлетворяющих условию 1 может использоваться следующее: $(\mu(L_i))_{i \in \overline{1,n}} \in Y$, где $(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n$. Здесь можно полагать $s_j = \chi_{L_j} \;\; \forall\, j \in \overline{1, n}$.

**Предложение 1.** *Если выполнено условие* 1 *и* $T \in \mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}]$, *то справедливо равенство*

$$\mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[T], \tau_*(\mathcal{L})) = (\mathrm{ADM})[\mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L}))]. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{T} \overset{\triangle}{=} \mathrm{cl}(T, \tau_*(\mathcal{L}))$. Тогда согласно (2.6)

$$\mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[T], \tau_*(\mathcal{L})) \subset (\mathrm{ADM})[\mathbf{T}]. \tag{2.14}$$

Пусть $\nu \in (\mathrm{ADM})[\mathbf{T}]$. Тогда $\nu \in \mathbf{T}$ и согласно (2.5)

$$\left(\int_E s_i d\nu\right)_{i \in \overline{1,n}} \in Y. \tag{2.15}$$

Согласно (2.7) имеем для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \preceq, g)$ в множестве $T$ следующие свойства сходимости:

$$\left((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu\right) \ \& \ \left((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \nu\right). \tag{2.16}$$

Поскольку при $j \in \overline{1,n}$ справедливо $s_j \in B_0(E, \mathcal{L})$, имеем с учетом (2.16) и [17, (3.2.7)] свойство: $\exists\, d \in \mathbb{D}\, \forall\, \delta \in \mathbb{D}$

$$(d \preceq \delta) \Longrightarrow \left(\int_E s_j d\nu = \int_E s_j dg(\delta)\right) \tag{2.17}$$

(учитываем также представление топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ в [8, с. 81]). С использованием аксиом НМ из (2.17) извлекается тот факт, что $\exists\, \mathbf{d} \in \mathbb{D}\, \forall\, \delta \in \mathbb{D}$

$$(\mathbf{d} \preceq \delta) \Longrightarrow \left(\left(\int_E s_i dg(\delta)\right)_{i \in \overline{1,n}} = \left(\int_E s_i d\nu\right)_{i \in \overline{1,n}}\right).$$

Поэтому согласно (2.15) имеем с некоторого момента (то есть при $\delta \in \mathbb{D}$ со свойством $\mathbf{d} \preceq \delta$, где $\mathbf{d} \in \mathbb{D}$ ) включение

$$\left(\int_E s_i dg(\delta)\right)_{i \in \overline{1,n}} \in Y.$$

Из (2.5) следует теперь, что $\exists\, d \in \mathbb{D}\, \forall\, \delta \in \mathbb{D}$

$$(d \preceq \delta) \Longrightarrow (g(\delta) \in (\mathrm{ADM})[T]). \tag{2.18}$$

Из (2.18) и первого положения в (2.16) вытекает очевидное включение $\nu \in \mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[T], \tau_*(\mathcal{L}))$. Вложение $(\mathrm{ADM})[\mathbf{T}] \subset \mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[T], \tau_*(\mathcal{L}))$ установлено, откуда с учетом (2.14) вытекает равенство (2.13). □

В заключении раздела напомним естественный вариант условия (2.4):

$$(\mu(L_i))_{i \in \overline{1,n}} \in Y, \tag{2.19}$$

где $(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n$; сведение (2.19) к (2.4) реализуется посредством соглашения $s_j = \chi_{L_j} \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}$.

## § 3. Задача о соблюдении ограничения моментного характера и ее расширение

Всюду в дальнейшем фиксируем $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и рассматриваем линейное п/п $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, порожденное конусом

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \overset{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall\, L \in \mathcal{L} \ \ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\} \tag{3.1}$$

(разумеется, $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ есть множество всех к.-а. мер

$$\mu_1 - \mu_2, \ \ \mu_1 \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta], \ \mu_2 \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta];$$

имеется в виду линейное пространство, порожденное конусом). Легко видеть, что $f * \eta \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ при $f \in B(E, \mathcal{L})$; если к тому же $h \in B(E, \mathcal{L})$, то $hf \in B(E, \mathcal{L})$ и (см. [8, (3.4.11)]):

$$\int_E h d(f * \eta) = \int_E h f d\eta = \int_E f h d\eta. \tag{3.2}$$

Всюду в дальнейшем фиксируем множество $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(B(E, \mathcal{L}))$. Тогда

$$\mathbb{F} \stackrel{\triangle}{=} \{f * \eta : \ f \in \mathbf{F}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]) \tag{3.3}$$

и, с учетом положений § 4.3 монографии [8], имеем

$$\tilde{\mathbf{F}} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\mathbb{F}, \tau_*(\mathcal{L})) \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]). \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) имеем вложение $\mathbb{F} \subset \tilde{\mathbf{F}}$. Элементы множеств $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$ играют роль обычных и обобщенных управлений соответственно. Тогда

$$(\mathrm{adm})[\mathbf{F}] \stackrel{\triangle}{=} \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \left( \int_E s_i f d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} \in Y \right\} \in \mathcal{P}(\mathbf{F}) \tag{3.5}$$

можно рассматривать как множество допустимых обычных управлений. Разумеется,

$$(\mathrm{ADM})[\mathbb{F}] = \{f * \eta : \ f \in (\mathrm{adm})[\mathbf{F}]\} \tag{3.6}$$

(см. (2.4), (2.5), (3.2)). Для удобства в последующих обозначениях введем отображение

$$\mathcal{I} \stackrel{\triangle}{=} (f * \eta)_{f \in \mathbf{F}} \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]^{\mathbf{F}},$$

получая из (3.3) и (3.6) следующие два равенства: $\mathbb{F} = \mathcal{I}^1(\mathbf{F})$,

$$(\mathrm{ADM})[\mathbb{F}] = \mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]). \tag{3.7}$$

Согласно (2.6), (3.3) и (3.4) $\mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[\mathbb{F}], \tau_*(\mathcal{L})) \subset (\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]$, откуда с учетом (3.7) следует вложение

$$\mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})\right) \subset (\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]. \tag{3.8}$$

**Замечание 3.** В связи с (2.19) отметим, что моментное ограничение, используемое в (3.5), принимает при $(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n$ и $(s_i)_{i \in \overline{1,n}} = (\chi_{L_i})_{i \in \overline{1,n}}$ следующий вид

$$\left( \int_{L_i} f d\eta \right)_{i \in \overline{1,n}} \in Y, \tag{3.9}$$

где $f \in \mathbf{F}$. В связи с возможным использованием ограничений типа (3.9) отметим примеры в [8, гл. 1] и [9, гл. 2] (см., в частности, раздел 2.5 в монографии [9]). $\square$

**Условие 2.** $\forall \mu \in \mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] \, \exists_{\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing] \, \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}] \, \exists h \in \mathbf{F}^{\mathbb{D}}$ :

$$\left( (\mathbb{D}, \preceq, \mathcal{I} \circ h) \stackrel{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu \right) \ \& \ \left( (\mathbb{D}, \preceq, \mathcal{I} \circ h) \stackrel{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu \right).$$

**Предложение 2.** *Если выполнено условие* 2, *то* $\mathbb{F} \in \mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие 2 и $\mu_* \in (\mathrm{ADM})[\mathrm{cl}(\mathbb{F}, \tau_*(\mathcal{L}))]$. Тогда $\mu_* \in (\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]$ (см. (3.4)). С учетом условия 2 подберем направленность $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, \varphi)$ в $\mathbf{F}$, для которой

$$\left( (\mathbf{D}, \sqsubseteq, \mathcal{I} \circ \varphi) \stackrel{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_* \right) \ \& \ \left( (\mathbf{D}, \sqsubseteq, \mathcal{I} \circ \varphi) \stackrel{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_* \right). \tag{3.10}$$

При этом $\varphi \in \mathbf{F}^{\mathbf{D}}$, а тогда $\mathcal{I} \circ \varphi \in \mathbb{F}^{\mathbf{D}}$ по свойствам $\mathbb{F}$ и $\mathcal{I}$. В этом случае согласно (3.10) $\exists_{\,\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing]\, \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}]\, \exists\, g \in \mathbb{F}^{\mathbb{D}}$ :

$$\left((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_*\right) \ \& \ \left((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_*\right).$$

Поскольку выбор $\mu_*$ был произвольным, из (2.7) и (3.3) следует требуемое включение $\mathbb{F} \in \mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}]$. □

**Следствие 1.** *Если выполнены условия* 1 *и* 2*, то справедливо равенство*

$$(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = \mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия 1 и 2 выполнены. Тогда согласно предложению 2 $\mathbb{F} \in \mathbf{A}^0_*[\mathcal{L}]$, а потому (см. предложение 1) с учетом (3.4) имеем $\mathrm{cl}((\mathrm{ADM})[\mathbb{F}], \tau_*(\mathcal{L})) = (\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]$. С учетом (3.7) получаем требуемое равенство $(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = \mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})\right)$. □

**Замечание 4.** Условие 2 выполнено в случае, когда

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathrm{cl}(\mathbb{F}, \tau_0(\mathcal{L})) \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \tag{3.11}$$

В самом деле, допустим, что (3.11) выполнено. Коль скоро $\mathbb{F} \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ (см. (3.4)), имеем из (2.8), (3.4) и (3.11), что

$$\begin{gathered}\forall\, \mu \in \tilde{\mathbf{F}}\ \exists_{\,\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing]\, \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}]\, \exists\, g \in \mathbb{F}^{\mathbb{D}} : \\ \left((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu\right) \ \& \ \left((\mathbb{D}, \preceq, g) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu\right).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Пусть $\mu_0 \in (\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]$. Тогда, в частности, $\mu_0 \in \tilde{\mathbf{F}}$ (см. (2.5)). С учетом (3.12) подберем направленность $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, p)$ в $\mathbb{F}$, для которой

$$\left((\mathbf{D}, \sqsubseteq, p) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_0\right) \ \& \ \left((\mathbf{D}, \sqsubseteq, p) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_0\right). \tag{3.13}$$

Тогда $p(\delta) \in \mathbb{F}$ при $\delta \in \mathbf{D}$. С учетом (3.3) и определения отображения $\mathcal{I}$ получаем, что

$$\mathcal{I}^{-1}(\{p(\delta)\}) \in \mathcal{P}'(\mathbf{F}) \ \ \forall\, \delta \in \mathbf{D} \tag{3.14}$$

(здесь, как обычно, при $\nu \in \mathbb{F}$ через $\{\nu\}$ обозначается одноэлементное множество, содержащее $\nu$). Тогда по аксиоме выбора имеем, что

$$\prod_{\delta \in \mathbf{D}} \mathcal{I}^{-1}(\{p(\delta)\}) \in \mathcal{P}'\left(\mathbf{F}^{\mathbf{D}}\right).$$

С учетом этого выберем произвольный селектор

$$q \in \prod_{\delta \in \mathbf{D}} \mathcal{I}^{-1}(\{p(\delta)\})$$

мультифункции $\delta \longmapsto \mathcal{I}^{-1}(\{p(\delta)\}) : \mathbf{D} \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbf{F})$. Тогда, в частности, $q \in \mathbf{F}^{\mathbf{D}}$, причем $p(\delta) = \mathcal{I}(q(\delta)) = (\mathcal{I} \circ q)(\delta)\ \ \forall\, \delta \in \mathbf{D}$. Следовательно, $p = \mathcal{I} \circ q$; $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, q)$ — направленность в $\mathbf{F}$. С учетом (3.13) получаем, в частности, что

$$\exists_{\,\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing]\, \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}]\, \exists\, h \in \mathbf{F}^{\mathbb{D}} : \left((\mathbb{D}, \preceq, \mathcal{I} \circ h) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_0\right) \ \& \ \left((\mathbb{D}, \preceq, \mathcal{I} \circ h) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu_0\right). \tag{3.15}$$

Поскольку выбор $\mu_0$ был произвольным, справедливость условия 2 установлена. Итак, (3.11) гарантирует выполнение условия 2. □

**Замечание 5.** Заметим, что возможен тот случай, когда $\tilde{\mathbf{F}} \notin \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$, но условие 2 выполнено. Рассмотрим соответствующий пример. Пусть (в данном примере) $E = \mathbb{N}$. Семейство всех множеств

$$\overline{p,q} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid (p \leqslant i) \ \& \ (i \leqslant q)\}, \ p \in \mathbb{N}, \ q \in \mathbb{N},$$

обозначаем через $\mathcal{L}_1$. Кроме того, рассмотрим семейство $\mathcal{L}_2$ всех множеств

$$\overrightarrow{n,\infty} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid n \leqslant i\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ есть полуалгебра п/м $E = \mathbb{N}$. Полагаем в данном примере, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. В виде $(E, \mathcal{L})$ мы получили измеримое пространство примера 4.4.2 монографии [8] (см. также [17, с. 63]). Для данного конкретного пространства $(E, \mathcal{L}) = (\mathbb{N}, \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$ в [8, § 4.4] установлена несравнимость топологий $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$. Тогда, в частности, $\mathbb{A}(\mathcal{L}) \notin \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ (см. (2.3)), так как $\big(\tau_*(\mathcal{L}) = \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})}\big)$ & $\big(\tau_0(\mathcal{L}) = \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbb{A}(\mathcal{L})}\big)$. Пусть для данного примера $\eta$ определяется как сумма ряда, «составленного» из мер Дирака, определяемых на полуалгебре $\mathcal{L}$ (более точно, речь идет о сужениях мер Дирака на $\mathcal{L}$, но для краткости будем говорить о мерах Дирака). Итак, полагаем (в данном Замечании), что при $k \in \mathbb{N}$ мера $\delta_k \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ (на самом деле, $\delta_k$ счетно-аддитивна, но для нас это несущественно) определяется традиционными условиями: если $L \in \mathcal{L}$, то $\delta_k(L) \stackrel{\triangle}{=} 0$ при $k \notin L$ и $\delta_k(L) \stackrel{\triangle}{=} 1$ в случае $k \in L$. Тогда для всякого $L \in \mathcal{L}$ определено значение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k(L) = \lim_{m \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \delta_k(L) \in [0,1].$$

Как обычно определяем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k$ посредством правила:

$$L \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k(L) : \ \mathcal{L} \longrightarrow [0,1];$$

тогда, в частности, имеем следующее свойство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$$

(на самом деле, справедливо более сильное свойство). Полагаем в данном примере, что $\eta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k$. При этом, конечно, $\forall\, L \in \mathcal{L}:$

$$(\eta(L) = 0) \Longleftrightarrow (L = \varnothing).$$

Тогда [10, (4.9.4)] $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] = \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Следовательно, $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \notin \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ (в рассматриваемом сейчас примере). Заметим, что согласно теореме 3.7.4 монографии [9] в рассматриваемом примере имеем при $\mathbf{F} = B_0(E, \mathcal{L})$ равенство $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. Принимаем упомянутое соглашение: $\mathbf{F} = B_0(E, \mathcal{L})$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{F}} \notin \mathfrak{K}[\mathcal{L}]. \tag{3.16}$$

При этом согласно построениям [9, с. 244, 245]

$$\forall\, \mu \in \tilde{\mathbf{F}}\ \exists_{\mathbb{D}} S[\mathbb{D} \neq \varnothing]\ \exists \preceq \in (\mathrm{DIR})[\mathbb{D}]\ \exists\, g \in \mathbf{F}^{\mathbb{D}} :$$
$$\left( (\mathbb{D}, \preceq, \mathcal{I} \circ g) \stackrel{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu \right) \ \& \ \left( (\mathbb{D}, \preceq, \mathcal{I} \circ g) \stackrel{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu \right)$$

(см. [9, (6.2.10)]), тем более, что выполнено требуемое условие 2. Итак, в случае (3.16) установлено условие 2 (для рассматриваемого сейчас примера). □

Возвращаясь к общему случаю, введем при $\varepsilon \in ]0,\infty[$ открытую $\varepsilon$-окрестность

$$\mathbb{O}_Y^{(n)}[\varepsilon] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, y \in Y:\ \|x-y\| < \varepsilon\} \in \mathcal{N}^0_{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}}[Y] \tag{3.17}$$

множества $Y$; кроме того, полагаем, что

$$\mathbf{F}_\partial[\varepsilon] \triangleq \left\{ f \in \mathbf{F} \mid \left(\int_E s_i f d\eta\right)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{O}_Y^{(n)}[\varepsilon] \right\}.$$

Легко видеть, что справедливо следующее свойство:

$$\mathcal{F} \triangleq \{\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]:\ \varepsilon \in ]0,\infty[\} \in \beta[\mathbf{F}]. \tag{3.18}$$

Семейство (3.18) рассматриваем в качестве ограничения асимптотического характера. Заметим, что в силу непустоты и замкнутости множества $Y$ семейство $\mathcal{O} \triangleq \left\{\mathbb{O}_Y^{(n)}[\varepsilon]:\ \varepsilon \in ]0,\infty[\right\} \in \beta_0[\mathbb{R}^n]$ обладает естественным свойством отделимости с «запасом» в виде окрестностей:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus Y\ \exists\, O_1 \in N_{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}}(x)\ \exists\, O_2 \in \mathcal{O}:\ O_1 \cap O_2 = \varnothing. \tag{3.19}$$

Для удобства в обозначениях введем отображение $\tilde{\mathbf{s}}:\ \tilde{\mathbf{F}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ по следующему правилу:

$$\tilde{\mathbf{s}}(\mu) \triangleq \left(\int_E s_i d\mu\right)_{i\in\overline{1,n}} \quad \forall\, \mu \in \tilde{\mathbf{F}}. \tag{3.20}$$

Тогда отображение $\mathbf{s} \triangleq \tilde{\mathbf{s}} \circ \mathcal{I}$, $\mathbf{s}:\ \mathbf{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, таково, что [8, (3.4.11)]

$$\mathbf{s}(f) = \left(\int_E s_i f d\eta\right)_{i\in\overline{1,n}} \quad \forall\, f \in \mathbf{F}. \tag{3.21}$$

Из (3.20), (3.21) видно, что $\tilde{\mathbf{s}}$ может рассматриваться как естественное расширение отображения $\mathbf{s}$; последнее моделирует, в частности, интегральные преобразования управляющих воздействий в линейных системах. Из (2.5) и (3.20) вытекает, что

$$(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = \tilde{\mathbf{s}}^{-1}(Y). \tag{3.22}$$

В свою очередь, из (3.5) и (3.21) следует равенство

$$(\mathrm{adm})[\mathbf{F}] = \mathbf{s}^{-1}(Y). \tag{3.23}$$

Посредством (3.22) и (3.23) определены множества допустимых обобщенных и обычных управлений соответственно.

**Предложение 3.** $(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\tilde{\mathbf{F}};\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}};\mathcal{I};\mathcal{F}]$.

Доказательство легко следует из общих положений [11, 19] (см., например, следствие 19.1 в монографии [11]); при этом надо учитывать (3.19), определение $\tilde{\mathbf{F}}$, а также тот легко проверяемый факт, что

$$\tilde{\mathbf{s}} \in C\left(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}, \mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}\right);$$

кроме того, следует иметь в виду систему равенств

$$\mathbf{F}_\partial[\varepsilon] = \mathbf{s}^{-1}\left(\mathbb{O}_Y^{(n)}[\varepsilon]\right) \quad \forall\, \varepsilon \in ]0,\infty[,$$

откуда вытекает, что $\mathcal{F} = \left\{\mathbf{s}^{-1}(O):\ O \in \mathcal{O}\right\}$ (в обозначениях [11] $\mathcal{F} = \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{O}]$ ).

Отметим также, что из (1.5) и [10, (2.3.9)] легко следует равенство

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\tilde{\mathbf{F}};\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}};\mathcal{I};\mathcal{F}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbb{A}(\mathcal{L});\tau_*(\mathcal{L});\mathcal{I};\mathcal{F}], \tag{3.24}$$

которое характеризует (см. предложение 3) $(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]$ как МП в ТП (2.1).

**Предложение 4.** *Если выполнены условия* 1 *и* 2, *то*

$$(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \tilde{\mathbf{F}}; \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}; \mathcal{I}; \mathcal{F}] = \\ = (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbb{A}(\mathcal{L}); \tau_*(\mathcal{L}); \mathcal{I}; \mathcal{F}] = \mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})\right).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией следствия 1, (3.24) и предложения 3. По своему смыслу предложение 4 может рассматриваться, с одной стороны, как утверждение о плотности обычных допустимых управлений в множестве аналогичных обобщенных управлений, а с другой — как положение о своеобразной устойчивости (с точностью до замыкания) множества обычных допустимых управлений при ослаблении моментных ограничений.

## § 4. Одна конструкция аппроксимирующей направленности

В построениях предыдущего раздела использовалось весьма экзотическое на первый взгляд условие 2. Сейчас напомним одну конструкцию [9, гл. 6], которая указывает на естественность данного условия для целого ряда практически интересных постановок, связанных с содержательными задачами о соблюдении ограничений различных типов.

Если $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, то [9, с. 244] полагаем, что $\theta[\mu] \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ определяется правилом: если $L \in \mathcal{L}$, то

$$\left((\eta(L) \neq 0) \Longrightarrow \left(\theta[\mu](L) \triangleq \frac{\mu(L)}{\eta(L)}\right)\right) \;\&\; \left((\eta(L) = 0) \Longrightarrow \left(\theta[\mu](L) \triangleq 0\right)\right);$$

согласно [10, (4.9.4)] во всех возможных случаях $\mu(L) = \theta[\mu](L)\eta(L)$.

Через $\mathbf{D}$ обозначаем в дальнейшем множество всех неупорядоченных конечных $\mathcal{L}$-разбиений множества $E$ (см. [9, (3.6.10)]):

$$\mathbf{D} \triangleq \left\{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \mid \left(E = \bigcup_{L \in \mathcal{K}} L\right) \;\&\; (\forall\, A \in \mathcal{K}\; \forall\, B \in \mathcal{K}\;\; ((A \cap B \neq \varnothing) \Longrightarrow (A = B)))\right\}. \tag{4.1}$$

При этом $\{E\} \in \mathbf{D}$; поэтому $\mathbf{D} \neq \varnothing$. Если $z \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}$, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первую и вторую компоненты $z$ (определяемые единственным образом): $\mathrm{pr}_1(z) \in \mathbf{D}$, $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbf{D}$ и при этом $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. В этих терминах определяем направление на $\mathbf{D}$, порожденное вписанностью (одного разбиения в другое):

$$\prec \triangleq \{z \in \mathbf{D} \times \mathbf{D} \mid \forall\, B \in \mathrm{pr}_2(z)\; \exists\, A \in \mathrm{pr}_1(z):\; B \subset A\} \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}]. \tag{4.2}$$

Если $\mathcal{A} \in \mathbf{D}$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{D}$, то, как обычно (см. раздел 1), используем соглашение $(\mathcal{A} \prec \mathcal{B}) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \prec)$; следовательно, имеем

$$(\mathcal{A} \prec \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\forall\, B \in \mathcal{B}\; \exists\, A \in \mathcal{A}:\; B \subset A).$$

Итак, $(\mathbf{D}, \prec)$ есть непустое НМ. Если $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$, то $\Theta_\mu[\mathcal{K}] \in B_0(E, \mathcal{L})$ определяется правилом:

$$\Theta_\mu[\mathcal{K}](x) \triangleq \theta[\mu](L)\;\; \forall\, L \in \mathcal{K}\; \forall\, x \in L. \tag{4.3}$$

Как обычно, полагаем при $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, что $\Theta_\mu[\cdot] \triangleq (\Theta_\mu[\mathcal{K}])_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}$; мы в виде

$$(\mathbf{D}, \prec, \Theta_\mu[\cdot]) \tag{4.4}$$

получаем направленность в $B_0(E, \mathcal{L})$ и, в частности, — в $B(E, \mathcal{L})$; соответственно $(\mathbf{D}, \prec, \mathcal{I} \circ \Theta_\mu[\cdot])$ есть направленность в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, где $\mathcal{I} \circ \Theta_\mu[\cdot]$ есть отображение $\mathcal{K} \longmapsto \Theta_\mu[\mathcal{K}] * \eta :$ $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. С учетом этого имеем согласно [9, (6.2.10)] следующее свойство: $\forall\, \mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$

$$\left((\mathbf{D}, \prec, \mathcal{I} \circ \Theta_\mu[\cdot]) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu\right) \;\&\; \left((\mathbf{D}, \prec, \mathcal{I} \circ \Theta_\mu[\cdot]) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu\right). \tag{4.5}$$

Направленность (4.2)–(4.4) со свойством (4.5) фактически уже использовалась в замечании 5. Отметим в этой связи, что в случае $\mathbf{F} = B_0(E,\mathcal{L})$ непременно справедливо равенство $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ (см. (3.3), (3.4), [9, с. 53]), а потому согласно (4.5) в данном случае (то есть при $\mathbf{F} = B_0(E,\mathcal{L})$ ) условие 2 выполнено. Аналогичное положение справедливо в случае $\mathbf{F} = B(E,\mathcal{L})$.

На самом же деле конструкция на основе (4.4) оказывается применимой (в смысле справедливости условия 2) и во многих других случаях; это легко следует из утверждений [9, § 3.7]. Перечислим некоторые из упомянутых случаев:

1) $\mathbf{F} = \{f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta \leqslant b\}$, где $b \in [0,\infty[$;
2) $\mathbf{F} = \{f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \mid \int_E f d\eta = b\}$, где $b \in [0,\infty[$;
3) $\mathbf{F} = B_0^+(E,\mathcal{L})$;
4) $\mathbf{F} = \{f \in B_0(E,\mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leqslant b\}$, где $b \in [0,\infty[$.

В упомянутых случаях 1)–4) выполнено условие (3.11), реализующее, как уже отмечалось, условие 2 (выше было показано, что последнее может выполняться и в случае, когда (3.11) нарушено). Итак, условие 2 выполнено в целом ряде случаев, представляющих практический интерес (имеются в виду задачи управления с ограничениями импульсного характера).

## § 5. Абстрактный вариант свойства устойчивости множества достижимости

Рассмотрим вариант задачи об исследовании свойств множества достижимости в ТП. Всюду в дальнейшем $(\mathbf{T},\mathcal{T})$, $\mathbf{T} \neq \varnothing$, — фиксированное ТП и $W \in \mathbf{T}^{\mathbf{F}}$. Итак, $W$ сопоставляет обычному управлению точку в ТП. При этом множество $W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]) = \{W(f) : f \in (\mathrm{adm})[\mathbf{F}]\} \in \mathcal{P}(\mathbf{T})$ может рассматриваться в качестве абстрактной версии области достижимости в задачах управления (имеется в виду достижимость при точном соблюдении ограничений); поэтому называем $W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}])$ множеством достижимости. В свою очередь, $(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbf{T};\mathcal{T};W;\mathcal{F}] \in \mathcal{P}(\mathbf{T})$ есть МП, которое связано (объективно) с достижимостью точек ТП $(\mathbf{T},\mathcal{T})$ в условиях, когда возможно «исчезающе малое» нарушение моментных ограничений. Коль скоро $\mathcal{F} \in \beta[\mathbf{F}]$, то (см. раздел 1, [8, (2.5.1)])

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbf{T};\mathcal{T};W;\mathcal{F}] = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(W^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]),\mathcal{T}\right). \tag{5.1}$$

С учетом (3.5), (3.17) имеем при $\varepsilon \in]0,\infty[$, что $(\mathrm{adm})[\mathbf{F}] \subset \mathbf{F}_\partial[\varepsilon]$ и, как следствие,

$$\mathrm{cl}\left(W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]),\mathcal{T}\right) \subset \mathrm{cl}\left(W^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]),\mathcal{T}\right). \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) вытекает, что всегда справедливо следующее вложение

$$\mathrm{cl}\left(W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]),\mathcal{T}\right) \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F};\mathbf{T};\mathcal{T};W;\mathcal{F}]. \tag{5.3}$$

Множества в левой и правой частях (5.3) могут различаться; см. примеры в [9, гл. 1, 2]. Полагаем в дальнейшем, что для некоторого отображения $w \in \mathbf{T}^{\tilde{\mathbf{F}}}$ справедливо следующее равенство

$$W = w \circ \mathcal{I}. \tag{5.4}$$

Это означает, что при $f \in \mathbf{F}$ справедливо равенство $W(f) = w(f * \eta)$. Такого рода зависимости возникают, в частности, в линейных задачах управления при использовании формулы Коши. Отметим следующий

**Пример 5.1.** Пусть $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{N}$ и $\omega \in C\left(\mathbb{R}^{\mathbf{p}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{p})}, \mathbb{R}^{\mathbf{q}}, \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{q})}\right)$. Итак, $\omega$ есть отображение из $\mathbb{R}^{\mathbf{p}}$ в $\mathbb{R}^{\mathbf{q}}$, непрерывное в смысле обычных топологий покоординатной сходимости. Пусть, кроме того,

$$(\pi_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{p}}} : \overline{1,\mathbf{p}} \longrightarrow B(E,\mathcal{L}).$$

Полагая в данном примере, что $\mathbf{T} = \mathbb{R}^{\mathbf{q}}$ и $\mathcal{T} = \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{q})}$, принимаем, что

$$W(f) \stackrel{\triangle}{=} \omega\left(\left(\int_E \pi_i f d\eta\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{p}}}\right) \quad \forall\, f \in \mathbf{F}. \tag{5.5}$$

Отметим, что такой вариант $W$ является типичным для линейных задач управления с фиксированным временем окончания в случае, когда исследуется область достижимости в последний момент времени (в этом частном случае обычно можно полагать, что $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, а $\omega$ — тождественное отображение; более общие варианты (5.5) можно связать, например, с действием нелинейных безинерционных преобразований в радиотехнических цепях, см. [20, гл. 11]). Введем $w$ по следующему правилу:

$$w(\mu) \overset{\triangle}{=} \omega\left(\left(\int_E \pi_i d\mu\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{p}}}\right) \ \forall\, \mu \in \tilde{\mathbf{F}};$$

при этом $w \in C(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}, \mathbf{T}, \mathcal{T})$. Тогда (см. (3.2), (5.5), [8, (3.4.11)]) справедливо (5.4). $\square$

Возвращаясь к общему случаю, отметим следующее положение оценочного характера.

**Предложение 5.** *Если* $w \in C(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}, \mathbf{T}, \mathcal{T})$, *то* $w^1((\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]) \subset (\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbf{T}; \mathcal{T}; W; \mathcal{F}]$.

Доказательство легко следует из общих положений [8–10], но все же приведем его схему. Согласно (1.5), (3.18) и [9, (3.3.10)] имеем следующие два представления (см. также предложение 3): (5.1) и

$$(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]), \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}\right). \tag{5.6}$$

Тогда согласно (5.4), (5.6) и [10, (2.5.4)] получаем, что справедлива цепочка равенств:

$$w^1((\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]) = w^1\left(\bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]), \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}\right)\right) \subset$$
$$\subset \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} w^1\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]), \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}\right)\right) \subset \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(w^1(\mathcal{I}^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon])), \mathcal{T}\right) =$$
$$= \bigcap_{\varepsilon\in]0,\infty[} \mathrm{cl}\left(W^1(\mathbf{F}_\partial[\varepsilon]), \mathcal{T}\right).$$

С учетом (5.1) получаем требуемое утверждение. $\square$

Всюду до конца настоящего раздела полагаем, что $w$ есть совершенное отображение из $(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}})$ в $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$ :

1) $w \in C(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}, \mathbf{T}, \mathcal{T})$;

2) для всякого множества $F \in \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{F}})$, замкнутого в ТП $(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}})$, его образ $w^1(F) \in \mathcal{P}(\mathbf{T})$ замкнут в $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$;

3) $w^{-1}(\{t\}) \in (\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}} - \mathrm{comp})[\tilde{\mathbf{F}}] \ \ \forall\, t \in \mathbf{T}$.

**Замечание 6.** Если $\tilde{\mathbf{F}} \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]$ и $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$ — хаусдорфово ТП, то свойство 1) гарантирует совершенность $w$ (см. [10, (2.8.7)]). Итак, при вышеупомянутых дополнительных условиях (традиционных в теории управляемых систем) для справедливости всех последующих утверждений достаточна непрерывность $w$; вариант такого отображения $w$ рассмотрен в примере 5.1. $\square$

Из (5.4), предложения 3 и общих положений [9–11, 19] вытекает (при условиях 1)–3), то есть в случае совершенности $w$), что справедливо (см., например, предложение 3.1 в [19]) следующее

**Предложение 6.** *В общем случае справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbf{T}; \mathcal{T}; W; \mathcal{F}] = w^1((\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}]).$$

**Теорема 1.** *Если выполнены условия* 1 *и* 2, *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbf{T}; \mathcal{T}; W; \mathcal{F}] = \mathrm{cl}\left(W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \mathcal{T}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 4 получаем равенство

$$(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = \mathrm{cl}(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})).$$

С учетом предложения 6 получаем поэтому следующую цепочку равенств (см. также (5.4) и [10, (2.8.4)]):

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbf{T}; \mathcal{T}; W; \mathcal{F}] = w^1\left(\mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})\right)\right) = \mathrm{cl}\left(w^1(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}])), \mathcal{T}\right) =$$

$$= \mathrm{cl}\left((w \circ \mathcal{I})^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \mathcal{T}\right) = \mathrm{cl}\left(W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \mathcal{T}\right).$$

Требуемое равенство установлено. □

По своему смыслу теорема 1 является утверждением об устойчивости с точностью до замыкания множества достижимости невозмущенной задачи.

## § 6. Пример

Сначала условимся о следующем общем соглашении: если $M$ — непустое множество, $A \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^M)$ и $B \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^M)$, то $A \oplus B$ есть def множество всех функций $u+v \in \mathbb{R}^M$, $u \in A$, $v \in B$; иными словами, $A \oplus B$ — сумма Минковского. В качестве $M$ можно, в частности, использовать $E$ и $\mathcal{L}$. В связи с последним случаем отметим, что [11, (23.36)]

$$A \oplus B \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}] \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}'((\mathrm{add})_+[\mathcal{L}])\ \forall\, B \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\varnothing\}. \tag{6.1}$$

На основе (6.1) можно построить целый ряд неограниченных в сильной норме множеств сравнимости, представляющих практический интерес. Мы рассматриваем только один вариант, связанный с погружением ступенчатых в/з функций на $E$ в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. Пусть $\kappa \in [0, \infty[$ и

$$U \overset{\triangle}{=} \left\{ f \in B_0(E, \mathcal{L}) \mid \int_E |f| d\eta \leqslant \kappa \right\}; \tag{6.2}$$

тогда $U \in \mathcal{P}'(B_0(E, \mathcal{L}))$ (в/з функция на $E$, тождественно равная нулю, содержится в $U$). Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathbf{F} \overset{\triangle}{=} B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U, \tag{6.3}$$

получая (в силу линейности $B_0(E, \mathcal{L})$) непустое п/м $B_0(E, \mathcal{L})$. С учетом теоремы 23.1 монографии [11] имеем

$$\tilde{\mathbf{F}} = (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \oplus \mathfrak{W} = \mathrm{cl}(\mathbb{F}, \tau_0(\mathcal{L})), \tag{6.4}$$

где $\mathfrak{W} \overset{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \mid \mathbf{v}_\mu(E) \leqslant \kappa\}$. С учетом (6.1) и (6.4) имеем также следующее свойство $\tilde{\mathbf{F}}$ (6.4): $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathfrak{K}[\mathcal{L}]$ (учитываем $*$-слабую компактность $\mathfrak{W}$; см. [9, (3.7.6)]). Итак, конструкция на основе (6.2), (6.3) приводит к (3.11): $\mathbf{F}$ (6.3) реализует $\mathbb{F} = \mathcal{I}^1(\mathbf{F})$ и $\tilde{\mathbf{F}}$ (3.4) со свойством (3.11). Тогда, в частности, имеем (см. замечание 4) справедливость условия 2 в рассматриваемом сейчас случае (6.3). Вернемся к ограничению (2.4). Тогда при условии 1 имеем из предложения 4 равенство

$$(\mathrm{ADM})[\tilde{\mathbf{F}}] = \mathrm{cl}\left(\mathcal{I}^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \tau_*(\mathcal{L})\right). \tag{6.5}$$

Рассмотрим теперь управляемую материальную точку на единичном промежутке времени:

$$\dot{x}_1\,(t) = x_2(t), \ \ \dot{x}_2\,(t) = \beta(t) f(t); \tag{6.6}$$

$t \in [0,1]$, $x_1(0) = x_1^0 \in \mathbb{R}$, $x_2(0) = x_2^0 \in \mathbb{R}$. Функция $\beta = \beta(\cdot)$, определенная на множестве $E \overset{\triangle}{=} [0,1[$ (в пределах рассматриваемого примера) такова, что $\beta \in B(E, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ есть такая полуалгебра «стрелки» $E = [0,1[$, что: 1) $[t_1, t_2[ \in \mathcal{L} \ \ \forall\, t_1 \in [0,1]\ \forall\, t_2 \in [0,1]$; 2) $\mathcal{L}$ содержится в $\sigma$-алгебре борелевских п/м $E$. Кроме того, условимся, что всюду в дальнейшем $\eta$ есть след обычной меры Бореля–Лебега на полуалгебру $\mathcal{L}$. В качестве $f$ будем использовать ступенчатые в смысле $(E, \mathcal{L})$ в/з функции на «стрелке» $E$. Кроме того, ниже используется конкретизация (6.2), (6.3), отвечающая «стрелке» в упомянутом оснащении. Обозначения $U, \kappa$ и $\mathfrak{W}$ понимаются в смысле, оговоренном выше.

Рассмотрим задачу об исследовании свойств области достижимости в момент $t = 1$. Следуя на идейном уровне конструкции [21, § 8], введем при $\mathbf{T} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ отображение $w$ раздела 5 по следующему правилу:

$$w(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \left(x_1^0 + x_2^0 + \int_E (1-t)\beta(t)\mu(dt), x_2^0 + \int_E \beta(t)\mu(dt)\right) \quad \forall \mu \in \tilde{\mathbf{F}}. \tag{6.7}$$

Ясно, что при $f \in \mathbf{F}$ плоский вектор $W(f) = (w \circ \mathcal{I})(f)$ определяет терминальное состояние системы (6.6), стартующей из состояния $x^0 \stackrel{\triangle}{=} (x_1^0, x_2^0)$. В свою очередь, (6.7) определяет терминальное состояние системы при воздействии обобщенных управлений — к.-а. мер из $\tilde{\mathbf{F}}$. Полагаем далее, что для некоторого числа $b \in ]0, \infty[$ имеет место свойство: $b \leqslant \beta(t) \ \ \forall t \in E$. Оказывается, что в рассматриваемом случае отображение $w$ (6.7) совершенно в смысле ТП $(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}})$ и $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$, где $\mathcal{T}$ определяется (здесь и ниже) как топология покоординатной сходимости плоскости $\mathbf{T} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (данное соглашение выдерживается до конца статьи). Данное положение легко извлекается из предложения 24.1 монографии [11], где рассматривался более общий случай.

**Замечание 7.** В целях полноты изложения рассмотрим схему доказательства совершенности $w$ (6.7). Свойство 1) извлекается из (6.7) непосредственно. Проверим свойство 2), фиксируя множество $F \in \mathcal{P}(\tilde{\mathbf{F}})$, замкнутое в ТП $(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}})$. Рассмотрим образ $F$, то есть множество $w^1(F) \in \mathcal{P}(\mathbf{T})$. Пространство $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$ метризуемо; конкретную метрику $\rho: \ \mathbf{T} \times \mathbf{T} \longrightarrow [0, \infty[$, порождающую топологию $\mathcal{T}$, удобно определить здесь по правилу:

$$\rho((x_1', x_2'), (x_1'', x_2'')) \stackrel{\triangle}{=} \sup\left(\left\{\left|x_1' - x_1''\right|; \left|x_2' - x_2''\right|\right\}\right) \quad \forall x_1' \in \mathbb{R}\, \forall x_2' \in \mathbb{R}\, \forall x_1'' \in \mathbb{R}\, \forall x_2'' \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $\left(y^{(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}} \in w^1(F)^{\mathbb{N}}$ и $y \in \mathbf{T}$ таковы, что

$$\left(\rho(y^{(i)}, y)\right)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0 \tag{6.8}$$

(это эквивалентно сходимости в $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$). С использованием (счетной) аксиомы выбора подберем последовательность

$$(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}: \ \mathbb{N} \longrightarrow F,$$

для которой $y^{(j)} = w(\mu_j) \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Из (6.7) и (6.8) следует, в частности, что

$$\left(\left|\left(x_2^0 + \int_E \beta(t)\mu_i(dt)\right) - y_2\right|\right)_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0,$$

где $y_2$ есть вторая компонента вектора $y$ : полагаем, что $y_1 \in \mathbb{R}$ и $y_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $y = (y_1, y_2)$. Тогда можно указать такое число $m \in \mathbb{N}$, что

$$\left|\int_E \beta(t)\mu_j(dt)\right| \leqslant \left|y_2 - x_2^0\right| + 1 \ \ \forall j \in \overrightarrow{m, \infty}. \tag{6.9}$$

Из (6.9) следует, что для некоторого числа $\bar{\mathbf{c}} \in ]0, \infty[$

$$\left|\int_E \beta(t)\mu_j(dt)\right| \leqslant \bar{\mathbf{c}} \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Используя (счетную) аксиому выбора, можно (согласно (6.4)) указать последовательности

$$\left(\mu_j^{(1)}\right)_{j \in \mathbb{N}}: \ \mathbb{N} \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta], \tag{6.10}$$

$$\left(\mu_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{W}, \tag{6.11}$$

для которых $\mu_j = \mu_j^{(1)} + \mu_j^{(2)} \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Отметим, что в силу неотрицательности к.-а. мер $\mu_j^{(1)}$, $j \in \mathbb{N}$, и свойств функции $\beta$ имеем следующие оценки. Именно,

$$b\mu_j^{(1)}(E) \leqslant \int_E \beta(t)\mu_j^{(1)}(dt) \;\; \forall j \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

С другой стороны, по определению $\mathfrak{W}$ имеем (см. предложение 3.4.2 в [17]), что

$$\left|\int_E \beta(t)\mu_j^{(2)}(dt)\right| \leqslant \|\beta\|\mathbf{v}_{\mu_j^{(2)}}(E) \leqslant \|\beta\|\kappa \;\; \forall j \in \mathbb{N}. \tag{6.13}$$

При этом, как легко видеть с учетом (6.13), имеет место следующая система оценок: при $j \in \mathbb{N}$

$$\left|\int_E \beta(t)\mu_j^{(1)}(dt)\right| = \left|\left(\int_E \beta(t)\mu_j^{(1)}(dt) + \int_E \beta(t)\mu_j^{(2)}(dt)\right) - \int_E \beta(t)\mu_j^{(2)}(dt)\right| =$$

$$= \left|\int_E \beta(t)\mu_j(dt) + \left(-\int_E \beta(t)\mu_j^{(2)}(dt)\right)\right| \leqslant \left|\int_E \beta(t)\mu_j(dt)\right| + \left|\int_E \beta(t)\mu_j^{(2)}(dt)\right|.$$

С учетом (6.13) при $\mathbf{c} \stackrel{\triangle}{=} \bar{\mathbf{c}} + \|\beta\|\kappa$ получаем для $j \in \mathbb{N}$, что

$$b\mu_j^{(1)}(E) \leqslant \int_E \beta(t)\mu_j^{(1)}(dt) \leqslant \mathbf{c},$$

а тогда справедливо следующее неравенство

$$\mu_j^{(1)}(E) \leqslant \frac{\mathbf{c}}{b}\;;$$

поэтому по аксиомам нормы получаем очевидное свойство

$$\mathbf{v}_{\mu_j}(E) \leqslant \mathbf{v}_{\mu_j^{(1)}}(E) + \mathbf{v}_{\mu_j^{(2)}}(E) = \mu_j^{(1)}(E) + \mathbf{v}_{\mu_j^{(2)}}(E) \leqslant \frac{\mathbf{c}}{b} + \kappa.$$

Это означает, что $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность в шаре

$$\mathbf{B} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \mathbf{v}_\mu(E) \leqslant \frac{\mathbf{c}}{b} + \kappa\right\} \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})];$$

см. [9, (3.7.6)]. Тогда согласно [10, (2.3.21),(2.3.22)] можно указать к.-а. меру $\nu \in \mathbf{B}$, а также направленность $(\mathbf{D}, \preceq, h)$ в $\mathbb{N}$, для которых (см. также [10, (2.2.50)]):

$1')$ $\forall k \in \mathbb{N}\; \exists d \in \mathbf{D} :\; k \leqslant h(d)$;

$2')$ $\forall d_1 \in \mathbf{D}\; \forall d_2 \in \mathbf{D}\; ((d_1 \preceq d_2) \Longrightarrow (h(d_1) \leqslant h(d_2)))$;

$3')$ $(\mathbf{D}, \preceq, (\mu_{h(d)})_{d\in\mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \nu$.

Ясно, что направленность в $3')$ есть поднаправленность исходной последовательности $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$; кроме того, $\mu_{h(\delta)} \in \tilde{\mathbf{F}}$ при $\delta \in \mathbf{D}$, поскольку $F \subset \tilde{\mathbf{F}}$. Тогда имеем свойство: направленность в $3')$ принимает значения в $\tilde{\mathbf{F}}$, следовательно, в силу $*$-слабой замкнутости $\tilde{\mathbf{F}}$ имеем из $3')$, что $\nu \in \tilde{\mathbf{F}}$ и, как следствие (см. [10, (2.3.9)]),

$$(\mathbf{D}, \preceq, (\mu_{h(\delta)})_{\delta\in\mathbf{D}}) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}} \nu. \tag{6.14}$$

Итак, мы имеем направленность в $F$, сходящуюся к $\nu$ в смысле $\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}$. Учитывая замкнутость $F$ в топологии, используемой в (6.14), получаем, что $\nu \in F$. В этом случае по свойству 1) раздела 5, которому удовлетворяет $w$, имеем сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, (w(\mu_{h(d)}))_{d\in\mathbf{D}}) \xrightarrow{\mathcal{T}} w(\nu). \tag{6.15}$$

С другой стороны, из (6.8) с учетом $1')$ и $2')$ вытекает сходимость

$$(\mathbf{D}, \preceq, (y^{(h(d))})_{d \in \mathbf{D}}) \xrightarrow{\mathcal{T}} y \tag{6.16}$$

(в (6.16) используется поднаправленность сходящейся последовательности). Из (6.15), (6.16) имеем в силу отделимости $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$ равенство $y = w(\nu)$, где $w(\nu) \in w^1(F)$. Стало быть, $y \in w^1(F)$. Поскольку выбор $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и $y$ был произвольным, установлено (см. [10, (2.7.12)]) свойство замкнутости множества $w^1(F)$ в $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$. Коль скоро и выбор $F$ был произвольным, свойство 2) раздела 5 установлено.

Проверим свойство 3), фиксируя вектор $z \in \mathbf{T}$; тогда $z = (z_1, z_2)$ для некоторых $z_1 \in \mathbb{R}$ и $z_2 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{gathered} w^{-1}(\{z\}) = \{\mu \in \tilde{\mathbf{F}} \mid w(\mu) = z\} = \{\mu \in \tilde{\mathbf{F}} \mid (x_1^0 + x_2^0 + \\ + \textstyle\int_E (1-t)\beta(t)\mu(dt) = z_1) \;\&\; (x_2^0 + \textstyle\int_E \beta(t)\mu(dt) = z_2)\}. \end{gathered} \tag{6.17}$$

В силу свойства 1) раздела 5 и замкнутости множества $\{z\}$ имеем, что $w^{-1}(\{z\})$ (6.17) есть множество, замкнутое в топологии $\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}$. Поскольку само множество $\tilde{\mathbf{F}}$ замкнуто в ТП (2.1), то (см. [10, (2.2.17),(2.3.2)]) и $w^{-1}(\{z\})$ замкнуто в ТП (2.1), то есть замкнуто в топологии $\tau_*(\mathcal{L})$. Осталось установить сильную ограниченность множества (6.17). В этой связи отметим, что (см. (6.17)) справедливо свойство

$$\int_E \beta(t)\mu(dt) = \int_E \beta d\mu = z_2 - x_2^0 \quad \forall\, \mu \in w^{-1}(\{z\}). \tag{6.18}$$

Введем в рассмотрение следующую константу

$$\gamma \triangleq \frac{|z_2 - x_2^0| + \|\beta\|\kappa}{b} \in [0, \infty[. \tag{6.19}$$

Тогда $\gamma + \kappa \in [0, \infty[$. Пусть теперь $\mu_0 \in w^{-1}(\{z\})$. Тогда, в частности, согласно (6.17) $\mu_0 \in \tilde{\mathbf{F}}$, а потому (см. (6.4)) $\mu_0 = \mu_0' + \mu_0''$, где $\mu_0' \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ и $\mu_0'' \in \mathfrak{W}$. Значит, согласно (6.18)

$$\int_E \beta d\mu_0' = (z_2 - x_2^0) - \int_E \beta d\mu_0''.$$

Как следствие получаем с учетом (6.19) очевидную оценку (см. в этой связи [17, с. 137])

$$\begin{gathered} \textstyle\int_E \beta d\mu_0' = |\int_E \beta d\mu_0'| \leqslant |z_2 - x_2^0| + |\int_E \beta d\mu_0''| \leqslant \\ \leqslant |z_2 - x_2^0| + \|\beta\| \mathbf{v}_{\mu_0''}(E) \leqslant |z_2 - x_2^0| + \|\beta\|\kappa = \gamma b. \end{gathered} \tag{6.20}$$

С другой стороны, имеем по свойствам функции $\beta$, что

$$b\mu_0'(E) \leqslant \int_E \beta d\mu_0'.$$

Из последнего неравенства получаем с учетом (6.20), что $b\mu_0'(E) \leqslant b\gamma$, откуда в силу строгой положительности $b$ вытекает неравенство $\mu_0'(E) \leqslant \gamma$. Тогда по аксиомам нормы

$$\mathbf{v}_{\mu_0}(E) \leqslant \mathbf{v}_{\mu_0'}(E) + \mathbf{v}_{\mu_0''}(E) = \mu_0'(E) + \mathbf{v}_{\mu_0''}(E) \leqslant \gamma + \kappa.$$

Поскольку выбор $\mu_0$ был произвольным, установлено, что

$$\mathbf{v}_\mu(E) \leqslant \gamma + \kappa \quad \forall\, \mu \in w^{-1}(\{z\}). \tag{6.21}$$

Согласно (6.21) множество $w^{-1}(\{z\})$ сильно ограничено, то есть ограничено в сильной норме $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Поскольку оно к тому же замкнуто в ТП (2.1), то (см. [9, (3.4.19)])

$$w^{-1}(\{z\}) \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})], \tag{6.22}$$

причем $w^{-1}(\{z\}) \subset \tilde{\mathbf{F}}$. При этом, конечно,

$$\tau_*(\mathcal{L})|_{w^{-1}(\{z\})} = \Theta|_{w^{-1}(\{z\})}, \tag{6.23}$$

где $\Theta \overset{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}$ (см. [10, с. 36]). Однако согласно (6.22) $\tau_*(\mathcal{L})|_{w^{-1}(\{z\})}$ есть компактная топология множества $w^{-1}(\{z\})$. Стало быть, согласно (6.23) $\Theta|_{w^{-1}(\{z\})}$ — компактная топология этого множества, то есть $(w^{-1}(\{z\}), \Theta|_{w^{-1}(\{z\})})$ — компактное ТП, являющееся п/п ТП

$$(\tilde{\mathbf{F}}, \Theta) = (\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}}),$$

а потому $w^{-1}(\{z\}) \in (\tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}} - \mathrm{comp})[\tilde{\mathbf{F}}]$. Поскольку выбор $z$ был произвольным, установлено, что $w$ (6.7) обладает свойством 3).

Итак, $w$ (6.7) обладает свойствами 1)– 3), то есть в рассматриваемом сейчас примере $w$ является совершенным отображением из $(\tilde{\mathbf{F}}, \tau_*(\mathcal{L})|_{\tilde{\mathbf{F}}})$ в $(\mathbf{T}, \mathcal{T})$. □

Напомним, что (в данном примере) справедливость условия 2 была установлена ранее. Поэтому для рассматриваемого примера задачи управления системой (6.6) имеем очевидное следствие теоремы 1: если выполнено условие 1, то

$$(\mathbf{as})[\mathbf{F}; \mathbf{T}; \mathcal{T}; W; \mathcal{F}] = \mathrm{cl}\left(W^1((\mathrm{adm})[\mathbf{F}]), \mathcal{T}\right),$$

то есть (при отсутствии обычного ресурсного ограничения; см. (6.3)) имеет место свойство устойчивости с точностью до замыкания. В связи с условием 1 напомним полезный с практической точки зрения вариант, указанный в замечании 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.— 624 с.
2. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 229 с.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
6. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.
7. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 287 с.
8. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York–London–Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. — 244 p.
9. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. — 322 p.
10. Chentsov A. G. and Morina S. I. Extensions and Relaxations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 с.
11. Chentsov A. G. Finitely Additive Measures and Extensions of Abstract Control Problems // Journal of Mathematical Sciences, 2006. — Vol. 133. — №2. — P. 1045–1206 (Contemporary Mathematics and its Applications, vol. 17, Optimal Control, 2006).
12. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
13. Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
14. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.— 751 с.
15. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 431 с.
16. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
17. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. — Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2008. — 388 с.
18. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. — 895 с.

19. Ченцов А. Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2007. — Т. 13. — № 2. — С. 184–217.
20. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 2005. — 462 с.
21. Ченцов А. Г. К вопросу о расширении абстрактных задач о достижимости // Известия Уральского государственного университета. — 2006. — Т. 46. — Вып. 10. — С. 220–241.

Поступила в редакцию 25.02.10

***A. G. Chentsov***

**To the question about precise and approximate validity in abstract control problem**

The abstract problem of control and its relaxations connected with a weakening of constraints on the choice of programmed strategies are considered. Relations connecting the sets of admissible elements of the initial problem and its extension are investigated. Conditions sufficient for the stability of the initial attainable set (with the exactness until a closure) are obtained.

*Keywords*: finitely additive measure, attraction set, moment constraints.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, e-mail: chentsov@imm.uran.ru