

УДК 536.24

© *И. А. Алешкова, М. А. Шеремет***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СОПРЯЖЕННОЙ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ
КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ¹**

Проведен численный анализ сопряженной естественной конвекции в пористой среде, насыщенной газом, окруженной твердыми стенками конечной толщины при наличии локального источника тепла. Краевая задача сформулирована в безразмерных переменных «функция тока — вектор завихренности — температура» и решена методом конечных разностей. Установлены масштабы влияния источника тепла, проницаемости внутреннего объема, фактора нестационарности и теплофизических характеристик ограждающих стенок на режимы течения и теплопереноса.

Ключевые слова: сопряженный теплоперенос, естественная конвекция, пористая среда, приближение Буссинеска, источник тепла.

Введение

В последнее время наблюдается интенсивное изучение особенностей естественной конвекции в пористых средах, ограниченных твердыми стенками конечной толщины [1, 2, 3, 4, 5]. При этом исследователи уделяют недостаточно внимания анализу воздействия внешней среды и возможных внутренних зон температурной неоднородности. Влияние твердой стенки и сил инерции на течение и теплоперенос в пористой среде показано в [1]. Установлено, что воздействие анализируемых факторов наиболее значительно в средах с высокой проницаемостью, в жидкостях с большими значениями числа Прандтля, а также в области пограничного слоя вблизи передней кромки обтекаемых тел. Стационарная сопряженная естественная конвекция в прямоугольной полости, заполненной пористым материалом, с адиабатическими горизонтальными стенками конечной толщины и изотермическими вертикальными стенками численно исследована в [2]. Показано существенное влияние числа Рэлея, относительного коэффициента теплопроводности, пористости среды и геометрических параметров полости на локальные и интегральные параметры задачи. Влияние теплопроводных горизонтальных стенок конечной толщины на режимы естественной конвекции в пористой среде проанализировано в [3]. Исследования проведены в широком диапазоне изменения числа Рэлея и относительного коэффициента теплопроводности. Установлено, что горизонтальные стенки способствуют снижению интенсивности теплопередачи внутри полости при высоких значениях числа Рэлея. Показано также, что использование тепловых линий для визуализации термических режимов в сопряженных задачах теплопереноса позволяет отразить наиболее существенные особенности процесса. Результаты анализа двумерной стационарной сопряженной задачи естественной конвекции в пористой среде, ограниченной вертикальными стенками конечной толщины, представлены в [4]. Установлено, что увеличение толщины стенок приводит к уменьшению среднего числа Нуссельта, а интенсивность конвективных ячеек в полости растет с уменьшением толщины стенок.

Целью настоящей работы является математическое моделирование сопряженной естественной конвекции в пористой среде, ограниченной теплопроводными стенками конечной толщины, при наличии локального источника тепла постоянной температуры в условиях неоднородного теплообмена с окружающей средой.

¹Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК № П357).

§ 1. Математическая модель

Рассматривается краевая задача нестационарного конвективно-кондуктивного теплообмена в замкнутой прямоугольной области (см. рис. 1). Область исследования включает как элементы твердой стенки (1 на рис. 1), так и газовую полость с пористым материалом (2 на рис. 1). Во все время процесса температура источника тепловыделения постоянна. Горизонтальные стенки ($y = 0$, $y = L_y$) и вертикальная стенка ($x = L_x$) предполагаются теплоизолированными. На границе ($x = 0$) осуществляется теплообмен с окружающей средой за счет механизмов конвекции и излучения.

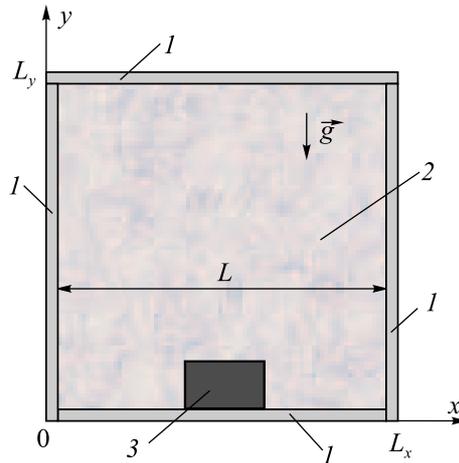


Рис. 1. Область решения: 1 — элементы твердой стенки; 2 — газовая полость, заполненная пористым материалом; 3 — источник тепловыделения

Предполагается, что теплофизические характеристики ограждающих твердых стенок и газа не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Газ, занимающий внутреннюю полость, считается вязкой, теплопроводной, ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска; теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенками — пренебрежимо малым по сравнению с конвективным теплообменом.

Для описания процесса теплопереноса используются двумерные нестационарные уравнения конвекции в приближении Буссинеска [6, 7] в пористой среде и нестационарное двумерное уравнение теплопроводности в твердых стенках [8]. Для моделирования силы сопротивления, действующей со стороны твердого скелета крупноячеистой среды на жидкость, в уравнении движения используется дополнительное слагаемое. В некоторых работах данное слагаемое определяет модель Дарси–Форхгеймера [9].

Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных «функция тока — вектор завихренности скорости — температура». В качестве масштабов расстояния, времени, скорости, температуры, функции тока и завихренности были выбраны L , $\sqrt{L/g_y\beta\Delta T}$, $\sqrt{g_y\beta\Delta TL}$, $\Delta T = T_{hs} - T_0$, $\sqrt{g_y\beta\Delta TL^3}$, $\sqrt{g_y\beta\Delta T/L}$. Безразмерные переменные имели вид

$$X = x/L, Y = y/L, \tau = t\sqrt{g_y\beta\Delta T/L}, U = u/\sqrt{g_y\beta\Delta TL}, V = v/\sqrt{g_y\beta\Delta TL},$$

$$\Theta = (T - T_0)/\Delta T, \Psi = \psi/\sqrt{g_y\beta\Delta TL^3}, \Omega = \omega\sqrt{L/g_y\beta\Delta T},$$

где L — длина газовой полости по оси x ; g_y — составляющая ускорения силы тяжести в проекции на ось y ($g_x = 0$); β — температурный коэффициент объемного расширения; x , y — координаты декартовой системы координат; X , Y — безразмерные координаты, соответствующие координатам x , y ; t — время; T — температура; T_{hs} — температура источника тепла; T_0 — начальная температура области решения; τ — безразмерное время; u , v — составляющие скорости в проекции на оси x , y соответственно; U , V — безразмерные скорости,

соответствующие скоростям u , v ; Θ — безразмерная температура; ψ — функция тока; Ψ — безразмерный аналог функции тока; ω — вихрь скорости; Ω — безразмерный аналог вектора вихря.

Уравнения сопряженного теплопереноса:

- в пористой среде (2 на рис. 1)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Omega)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Omega)}{\partial Y} = \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{1}{Da} \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Theta)}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right), \quad (3)$$

- для элементов твердой стенки (1 на рис. 1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a_{1,2}}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right). \quad (4)$$

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(4) рассматривались в следующем виде.

Начальные условия:

$$\Psi(X, Y, 0) = \Omega(X, Y, 0) = \Theta(X, Y, 0) = 0, \quad (5)$$

за исключением источника тепловыделения, на котором в течение всего процесса $\Theta = 1$.

Граничные условия:

- на границе $X = 0$ моделировался конвективно-радиационный теплообмен с внешней средой:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = Bi \cdot \Theta - Bi \cdot \Theta_e + Sk \cdot \left[\left(\Theta + \frac{T_0}{\Delta T} \right)^4 - \left(\frac{T_e}{\Delta T} \right)^4 \right]; \quad (6)$$

- на остальных внешних границах — условия теплоизоляции:

$$\frac{\partial \Theta(X^*, Y, \tau)}{\partial X} = 0 \text{ или } \frac{\partial \Theta(X, Y^*, \tau)}{\partial Y} = 0 \text{ в зависимости от положения границы}; \quad (7)$$

- на внутренних границах твердого материала и газа, параллельных оси OX :

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \lambda_{2,1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial Y}; \quad (8)$$

- на внутренних границах твердого материала и газа, параллельных оси OY :

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = \lambda_{2,1} \frac{\partial \Theta_2}{\partial X}. \quad (9)$$

Здесь $Pr = \nu/a$ — число Прандтля; ν — коэффициент кинематической вязкости; $Ra = g_y \beta \Delta T L^3 / \nu a$ — число Рэлея; $Da = K/L^2$ — число Дарси; K — проницаемость среды; $Bi = \alpha L / \lambda$ — число Био; α — коэффициент теплообмена между внешней средой и рассматриваемой областью решения; T_e — температура окружающей среды; $Sk = \epsilon \sigma L (\Delta T)^3 / \lambda$ — число Старка; ϵ — приведенная степень черноты; σ — постоянная Стефана–Больцмана;

$\lambda_{2,1} = \lambda_2/\lambda_1$ — относительный коэффициент теплопроводности; λ_i — коэффициент теплопроводности i -ой подобласти; $a_{2,1} = a_2/a_1$ — относительный коэффициент температуропроводности; a_i — коэффициент температуропроводности i -ой подобласти.

Уравнения (1)–(4) с соответствующими начальными (5) и граничными (6)–(9) условиями решались конечно-разностным методом [10, 11, 12] с использованием неявной двухслойной схемы. Разработанный метод решения был протестирован на ряде модельных задач как свободноконвективного теплопереноса, так и сопряженного теплообмена [9, 13, 14].

§ 2. Результаты и обсуждение

Численные исследования рассматриваемой краевой задачи с соответствующими начальными и граничными условиями проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$; $Pr = 0.7$; $0 < \tau < 1000$; $Da = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \infty$; $\lambda_{2,1} = 3.7 \cdot 10^{-2}, 5.7 \cdot 10^{-4}, 6.8 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 2 представлены линии тока и поля температуры, соответствующие режимам конвективного теплопереноса, при различных значениях числа Рэлея. Сплошные линии тока определяют движение газа в направлении против часовой стрелки, а штриховые линии тока — в направлении по часовой стрелке. Увеличение Ra приводит к росту скорости движения газа, максимальное значение функции тока находится в ядре циркуляционного течения. Прогрев полости отражается на увеличении градиента температуры на внутренней поверхности левой стенки, что проявляется в интенсивном развитии левой конвективной ячейки. При $Ra = 10^6$ повышается чувствительность термического факела к возмущениям, распространяющимся от левой стенки, вследствие ее охлаждения внешней средой.

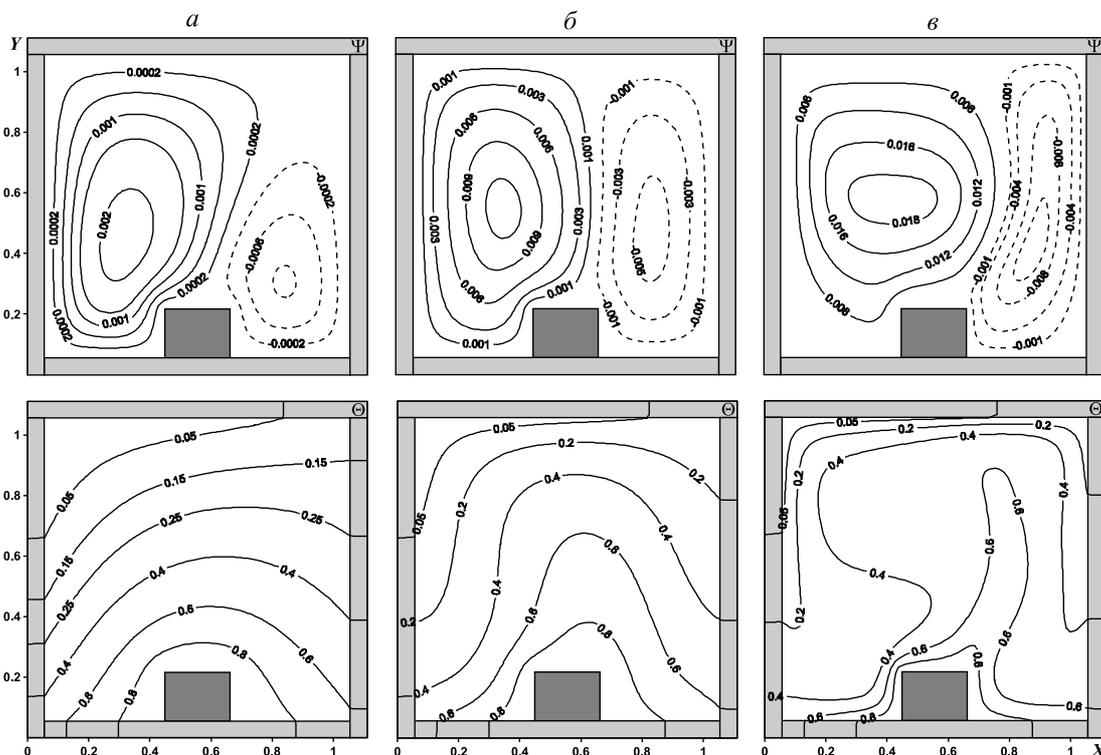


Рис. 2. Линии тока Ψ и поля температуры Θ при $Da = 10^{-3}$, $\lambda_{2,1} = 5.7 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 1000$: $Ra = 10^4$ — а; $Ra = 10^5$ — б; $Ra = 10^6$ — в

Динамику термогидродинамических параметров с ростом безразмерного времени можно проследить по рис. 3 и рис. 2в при $\lambda_{2,1} = 5.7 \cdot 10^{-4}$, $Ra = 10^6$, $Da = 10^{-3}$, $\tau = 50, 300$ (рис. 3) и $\tau = 1000$ (рис. 2в).

Продвижение фронта пониженной температуры от границы $X = 0$ приводит к увеличению размеров левого вихря вследствие роста градиента температуры на внутренней поверхности левой стенки. Газовая полость и твердые стенки прогреваются с течением времени (рис. 3). Смещение термического факела к правой стенке объясняется воздействием внешней среды на газовую полость.

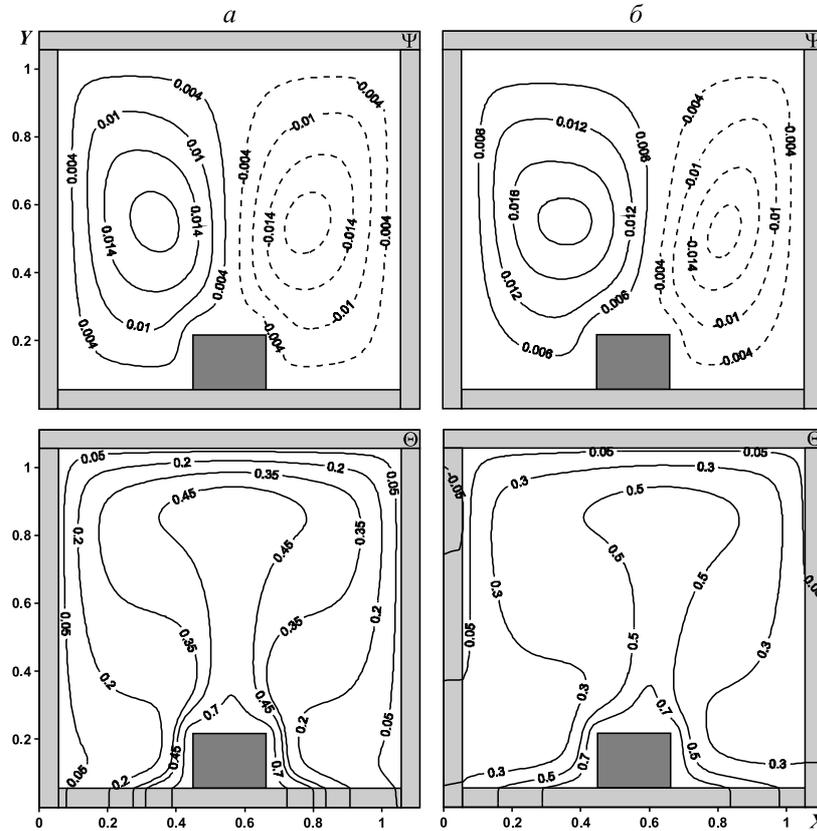


Рис. 3. Линии тока Ψ и поля температуры Θ при $Da = 10^{-3}$, $\lambda_{2,1} = 5.7 \cdot 10^{-4}$, $Ra = 10^6$: $\tau = 50$ — а; $\tau = 300$ — б

Большое значение при анализе сопряженных задач конвективного теплопереноса имеет относительный коэффициент теплопроводности, который характеризует степень воздействия окружающей среды на газовую полость. Влияние $\lambda_{2,1}$ представлено на рис. 4. Прогрев газовой области и твердых стенок гораздо более интенсивный при больших значениях коэффициента теплопроводности материала стенок, однако скорость движения газа уменьшается, что связано с уменьшением температурного напора в полости.

Сравнивая полученные результаты с данными [15], можно сделать выводы, что наличие пористого материала приводит к увеличению температуры в газовой полости, а также отражается на подавлении конвективного механизма переноса тепла.

На рис. 5 продемонстрировано влияние числа Дарси на распределения линий тока и поля температуры. Необходимо отметить, что уменьшение числа Дарси проявляется в доминировании механизма теплопроводности над конвекцией и, соответственно, в уменьшении скорости движения газа в полости. Распределение температуры существенно неравномерно при больших значениях Da вследствие интенсификации конвективного теплопереноса.

В таблице 1 представлена зависимость среднего числа Нуссельта $\bar{Nu} = \int_{0.06}^{1.06} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=1.06} dX$ от числа Дарси на границе раздела верхней стенки и газовой полости ($Y = 1.06$).

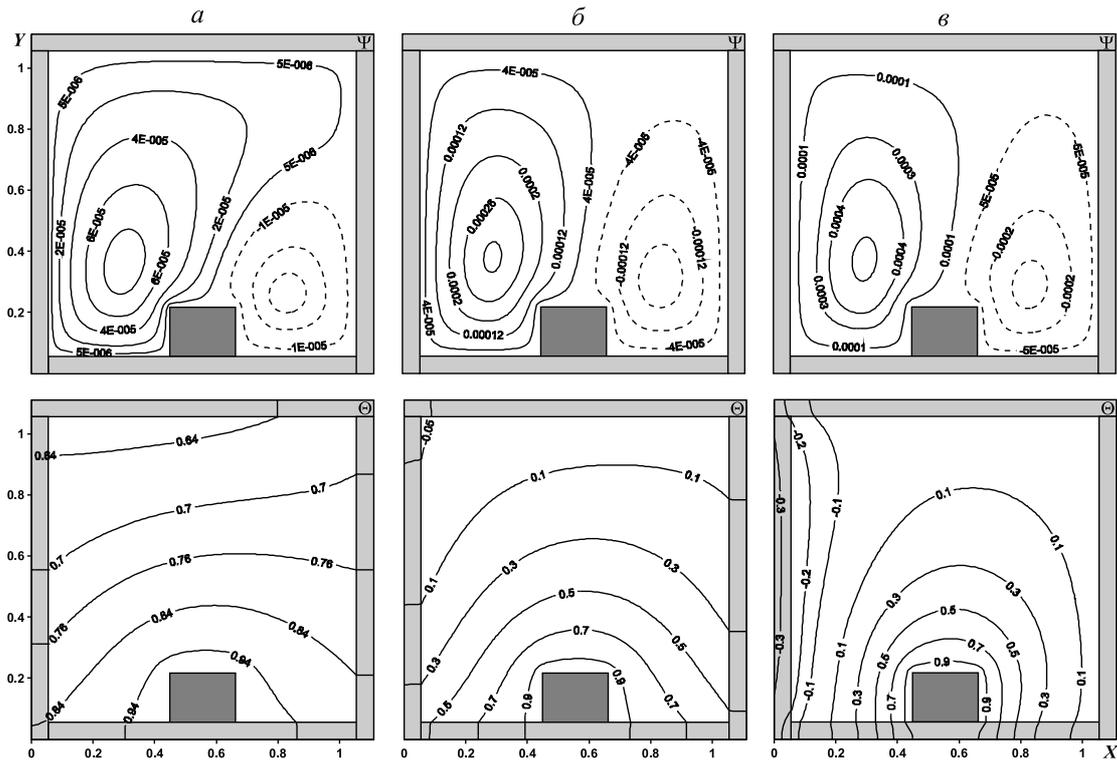


Рис. 4. Линии тока Ψ и поля температуры Θ при $Da = 10^{-5}$, $Ra = 10^6$, $\tau = 600$: $\lambda_{2,1} = 6.8 \cdot 10^{-5}$ — а; $\lambda_{2,1} = 5.7 \cdot 10^{-4}$ — б; $\lambda_{2,1} = 3.7 \cdot 10^{-2}$ — в

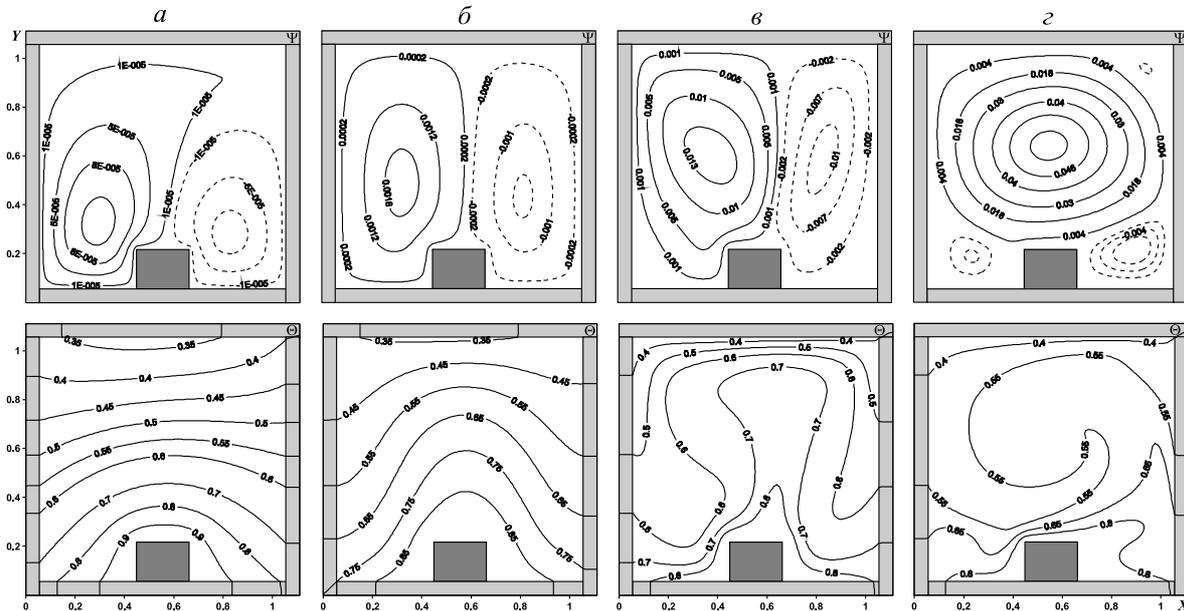


Рис. 5. Линии тока Ψ и поля температуры Θ при $Ra = 10^6$, $\tau = 300$, $\lambda_{2,1} = 6.8 \cdot 10^{-5}$: $Da = 10^{-5}$ — а; $Da = 10^{-4}$ — б; $Da = 10^{-3}$ — в; $Da = \infty$ — г

§ 3. Заключение

В работе проведено математическое моделирование нестационарного сопряженного теплопереноса в замкнутой области, заполненной пористым материалом, с локальным источником тепловыделения и твердыми стенками конечной толщины с учетом конвективно-радиационного

Таблица 1. Значения \overline{Nu} на границе $Y = 1.06$ при $Ra = 10^6$, $\tau = 150$ и различных Da

Da	\overline{Nu}
∞	4.828
10^{-3}	4.009
10^{-4}	1.379
10^{-5}	0.414

теплообмена с внешней средой в достаточно широком диапазоне изменения определяющих параметров. Получены распределения линий тока и поля температуры, характеризующие особенности анализируемого процесса. Установлено, что при фиксированном значении проницаемости среды увеличение числа Рэлея приводит к формированию неустойчивого термического факела, который смещается к правой стенке (рис. 2). Показано также, что увеличение безразмерного времени приводит к прогреву полости и предотвращению охлаждения объекта исследования вследствие воздействия внешней среды (рис. 3). С ростом коэффициента теплопроводности материала твердых стенок заметен более интенсивный прогрев области решения (рис. 4). С уменьшением проницаемости среды кондукция начинает доминировать над конвективным механизмом переноса тепла (рис. 5), что также приводит к понижению среднего числа Нуссельта на одной из границ раздела сред (таблица 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vafai K., Tien C.L. Boundary and inertial effects on flow and heat transfer in porous media // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1981. — Vol. 25. — P. 195–203.
2. Al-Amiri A., Khanafer K., Pop I. Steady-state conjugate natural convection in a fluid-saturated porous cavity // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2008. — Vol. 51. — P. 4260–4275.
3. Mobedi M. Conjugate natural convection in a square cavity with finite thickness horizontal walls // Int. Comm. Heat Mass Transfer. — 2008. — Vol. 35. — P. 503–513.
4. Saeid N.H. Conjugate natural convection in a vertical porous layer sandwiched by finite thickness walls // Int. Comm. Heat Mass Transfer. — 2007. — Vol. 34. — P. 210–216.
5. Saeid N.H. Conjugate natural convection in a porous enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls // Int. J. Thermal Sciences. — 2007. — Vol. 46. — P. 531–539.
6. Джалурия Й. Естественная конвекция. — М.: Мир, 1983. — 400 с.
7. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. — М.: Институт компьютерных исследований, 2004. — 628 с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
9. Basak T., Roy S., Paul T., Pop I. Natural convection in a square cavity filled with a porous medium: Effects of various thermal boundary conditions // Int. J. Heat Mass Transfer. — 2006. — Vol. 49. — P. 1430–1441.
10. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1987. — 285 с.
11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
12. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Двумерная задача естественной конвекции в прямоугольной области при локальном нагреве и теплопроводных границах конечной толщины // Известия РАН. МЖГ. — 2006. — № 6. — С. 29–39.
13. de Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench numerical solution // Int. J. Numerical Methods of Fluids. — 1983. — Vol. 3. — P. 249–264.
14. Kaminski D. A., Prakash C. Conjugate natural convection in a square enclosure effect of conduction on one of the vertical walls // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1986. — Vol. 29. — P. 1979–1988.
15. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Об одном подходе к математическому моделированию тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники // Микроэлектроника. — 2008. — Т. 37. — № 2. — С. 150–158.

Поступила в редакцию 13.11.09

*I. A. Aleshkova, M. A. Sheremet***Mathematical simulation of conjugate natural convection in a porous medium**

Conjugate natural convection in a porous medium saturated with a gas surrounded by the finite thickness solid walls at presence of a local heat source has been numerically analyzed. Boundary problem has been formulated in dimensionless variables such as «stream function — vorticity vector — temperature» and it has been solved by finite difference method. The effect levels of the heat source, the medium permeability, the transient factor and the heat conductivity of the solid walls on flow patterns and heat transfer modes have been determined.

Keywords: conjugate heat transfer, natural convection, porous medium, Boussinesq approximation, heat source.

Mathematical Subject Classifications: 76R10, 76S05

Алешкова Инна Александровна, студент механико-математического факультета, Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36

Шеремет Михаил Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры теоретической механики, Томский государственный университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, e-mail: Michael-she@yandex.ru