МЕХАНИКА 2010. Вып. 2

УДК 62.534(031)

© *О. А. Мысина*

ОБ ОДНООСНОЙ И ТРЕХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИИ СООСНЫХ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

В работе ставится задача об одноосной и трехосной ориентации системы двух соосных тел с моментами инерции, зависящими от времени (переменной структуры). Ориентация исследуется относительно кениговой и произвольной неинерциальной систем координат. Задача решена аналитически построением активного управления, приложенного к системе тел, по принципу обратной связи, реализуемой, например, двигателями малой тяги. Получены стабилизирующие управления и условия, при которых возможна желаемая ориентация, обладающая свойством асимптотической устойчивости. Поставленная задача решалась на основе метода функций Ляпунова и метода предельных уравнений и предельных систем, позволяющих использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова: соосные тела, одноосная ориентация, трехосная ориентация, знакопостоянная функция, функция Ляпунова.

Введение

Задачи о пространственной ориентации спутников и летательных аппаратов на орбите имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются различными авторами во многих работах. Основные способы и принципы управления вращательным движением тел были обозначены уже давно, например в работе [1]. Данная работа посвящена исследованию возможностей асимптотически устойчивой одно- и трехосной ориентации системы соосных тел переменной структуры. Под одноосной ориентацией системы понимается асимптотическое совпадение заданного орта в твердом теле с желаемым ортом, фиксированным в пространственной кениговой или произвольной неинерциальной системе координат. Трехосная ориентация заключается в совпадении двух ортонормированных реперов — одного, неподвижного в теле, и второго, фиксированного относительно подвижной системы координат. В качестве системы соосных тел переменной структуры рассматриваются два тела с моментами инерции, зависящими от времени, имеющие общий центр масс и допускающие относительное вращение вокруг общей оси. В работе задача ориентации решается активным внешним управлением по принципу обратной связи, и требуется выполнение асимптотически устойчивой по Ляпунову полученных решений. Представленные результаты получены на основе метода функций Ляпунова классической теории устойчивости [2] с применением метода предельных уравнений и предельных систем [3], который позволяет использовать функции Ляпунова со знакопостоянными, а не со знакоопределенными производными, существенно облегчая и расширяя их выбор. Данная работа развивает результаты из работы [4], в которой были решены задачи об одноосной и трехосной активной стабилизации твердого тела с переменными моментами инерции.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ есть инерциальная система координат; $O\alpha\beta\gamma$ — произвольно движущаяся в общем случае система координат по отношению к инерциальной системе координат; $Oxyz$ — неинерциальная система координат, неизменно связанная с составным телом (спутником). Составное тело представляет собой систему двух твердых тел: носитель T_1 и тело T_2, которое вращается вокруг T_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}^{02}$, направленной по оси Oz. Предположим, что центры масс обоих тел совпадают и находятся в точке O, таким образом, точка O — центр масс всего спутника (рисунок 1). Будем считать, что оба тела имеют моменты инерции, зависящие от времени. Условие о зависимости тензоров инерции тел от времени позволяет характеризовать перераспределение масс в космическом аппарате, вызванное, например, изменением режима работы гиросиловых стабилизаторов, либо иными перемещениями масс в аппарате.

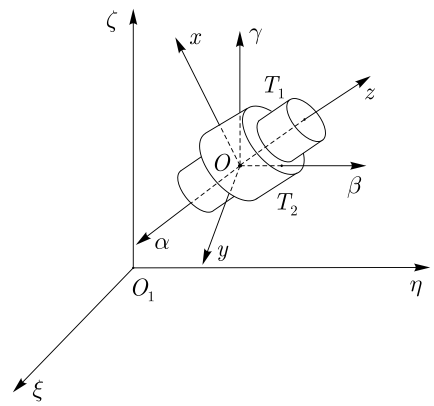

Рис. 1. Система двух соосных тел

Пусть далее заданы два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$, причем орт $\bar{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\bar{r}_0$ занимает неизменное положение в системе $Oxyz$.

Поставим задачу об одноосной ориентации составного тела — определить управляющий внешний момент $\bar{M}^y$, приложенный к системе, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$.

Пусть теперь заданы два взаимно перпендикулярных орта $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два орта $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, неизменно связанные с системой координат $Oxyz$. Положим

$$\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}, \quad \bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02}.$$

Поставим задачу о трехосной ориентации — определить управляющий момент $\bar{M}^y$, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$, а орт $\bar{r}_{02}$ — в направлении $\bar{s}_{02}$. Тогда, соответственно, орт $\bar{r}_{03}$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_{03}$.

§ 2. Ориентация относительно кениговой системы координат

Пусть $O\alpha\beta\gamma$ — система координат, совершающая поступательное движение относительно неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$, то есть является кениговой. Рассмотрим задачу об одноосной ориентации спутника, при которой ось $\bar{r}_0$ должна быть направлена по оси $\bar{s}_0$.

Согласно теореме об изменении кинетического момента системы, уравнения движения первого тела возьмем в виде [1]

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_1}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_1 = \bar{M'}_1 + \bar{M}^y + \bar{M}_2, \tag{2.1}$$

где $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения первого тела относительно системы координат $Oxyz$; $\bar{K}_1 = I_1\bar{\omega}$ — кинетический момент носителя, $I_1 = I_1(t)$ — его тензор инерции; $\bar{M'}_1$ — момент внешних сил, приложенных к носителю, $\bar{M}^y$ — управляющий момент, создающийся реактивными двигателями, $\bar{M}_2$ — момент, действующий на носитель со стороны второго тела.

Таким образом, уравнение движения (2.1) можно переписать в виде

$$I_1\dot{\bar{\omega}} + \dot{I}_1\bar{\omega} + \bar{\omega} \times I_1\bar{\omega} = \bar{M}'_1 + \bar{M}^y + \bar{M}_2, \tag{2.2}$$

где $\dot{()} = \frac{d}{dt}$. При решении данной задачи принятое условие о зависимости тензора инерции носителя от времени $I_1 = I_1(t)$ позволяет охарактеризовать перераспределение масс в космическом аппарате, вызванное либо изменением режима работы гиросиловых стабилизаторов, либо иными перемещениями масс в аппарате. Уравнение движения второго тела в жестко связанной с первым телом системе координат $Oxyz$

$$\hat{\delta}\left[\frac{\tilde{d}\bar{K}_2}{dt}+(\bar{\omega}_2\times\bar{K}_2)\right]=\bar{M'}_2-\bar{M}_2, \tag{2.3}$$

где $\bar{\omega}_2=\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})$ — абсолютная угловая скорость второго тела в жестко связанной с ним системе координат; $\bar{K}_2=I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})$ его кинетический момент, причем момент инерции $I_2=I_2(t)$ может зависеть от времени; $\bar{\omega}^{02}=(0,0,\dot{\delta})$ — угловая скорость вращения второго тела относительно первого; $\bar{M'}_2$ — момент внешних сил, приложенных ко второму телу, и $-\bar{M}_2$ — момент, крутящий второе тело относительно носителя. Матрица $\hat{\delta}=\begin{pmatrix} cos\delta & -\sin\delta & 0\\ \sin\delta & cos\delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ — тензор перехода от жестко связанной со вторым телом системы координат к жестко связанной с первым телом системе координат [5]. Перепишем уравнение (2.3) в виде

$$\begin{gathered}\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}(\dot{\bar{\omega}}+\dot{\bar{\omega}}^{02})+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})+\\+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})=\bar{M'}_2-\bar{M}_2.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.2) и (2.4) получим уравнения движения всего спутника относительно центра масс:

$$\begin{gathered}(I_1+\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}}+(\dot{I}_1+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}+\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}\dot{\bar{\omega}}^{02}+\\+(\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}^{02}+\bar{\omega}\times I_1\bar{\omega}+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}+\\+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02}=\bar{M'}+\bar{M}^y,\end{gathered} \tag{2.5}$$

где величина $\bar{M'}=\bar{M}'_1+\bar{M}'_2$ характеризует воздействие внешних сил на весь спутник.

В дальнейшем будем предполагать, что внешние силы отсутствуют, то есть $\bar{M'}=0$.

Покажем, что решения задачи об одноосной ориентации можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\begin{gathered}\bar{M}^y=-B\bar{\omega}-\dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}+\alpha(\bar{r}_0\times\bar{s}_0)+\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}\dot{\bar{\omega}}^{02}+\\+(\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}^{02}+\bar{\omega}^{02}\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02},\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $B=B(t)$ — симметричная матрица размера 3×3, подлежащая определению.

Утверждение 1. *При выборе управляющего момента M^y в виде* (2.6) *любое движение спутника асимптотически приближается к состоянию покоя $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=\bar{r}_0$. Причем это состояние покоя асимптотически устойчиво по Ляпунову, а состояние покоя $\bar{\omega}=0$, $\bar{s}_0=-$ $-\bar{r}_0$ не устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Заметим, что вектор $\bar{s}_0$ вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\bar{\omega}$. Следовательно, его изменение можно описать уравнением

$$\frac{d\bar{s}_0}{dt}=\frac{\tilde{d}\bar{s}_0}{dt}+(-\bar{\omega}_0\times\bar{s}_0),$$

и так как $\bar{s}_0$ фиксирован в подвижной системе координат, это уравнение примет вид

$$\dot{\bar{s}}_0=-\bar{\omega}\times\bar{s}_0. \tag{2.7}$$

Уравнения движения (2.5) при управлении (2.6) имеют вид

$$\begin{gathered}(I_1+\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}}+(\dot{I}_1+\dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}+\bar{\omega}\times I_1\bar{\omega}+\\+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}+\bar{\omega}\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02}=-B\bar{\omega}+\alpha(\bar{r}_0\times\bar{s}_0).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Система (2.8) имеет два положения равновесия:
1) $\bar\omega = 0$, $\bar s_0 = \bar r_0$;
2) $\bar\omega = 0$, $\bar s_0 = -\bar r_0$.
Причем других решений система (2.8) на множестве $\{\omega = 0\}$ не имеет.
Выберем скалярную функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar\omega^\top (I_1 + \hat\delta I_2 \hat\delta^{-1})\bar\omega + \alpha(\bar r_0 - \bar s_0)^2\right).$$

Ее производная в силу уравнений (2.7), (2.8) без учета слагаемых выше второго порядка малости будет иметь следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} \cong -\bar\omega^\top B\bar\omega - \frac{1}{2}\bar\omega^\top (\dot I_1 + \dot{\hat\delta} I_2 \hat\delta^{-1} + \hat\delta \dot I_2 \hat\delta^{-1} + \hat\delta I_2 \dot{\hat\delta}^{-1})\bar\omega - \bar\omega^\top C\bar\omega,$$

где $C = \{c_{ij}\}$ — симметричная матрица с элементами, определяемыми по формулам:

$$c_{11} = \omega_2^{02}(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + \omega_3^{02}(I_{2yx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),$$

$$c_{22} = \omega_3^{02}(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) - \omega_1^{02}(I_{2zx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),$$

$$c_{33} = \omega_1^{02} I_{2yz} - \omega_2^{02} I_{2xz},$$

$$\begin{gathered}2c_{12} = 2c_{21} = -\omega_1^{02}(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + \omega_2^{02}(I_{2zx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta) + \\ +\omega_3^{02}((I_{2xx} - I_{2yy})\cos\delta - 2I_{2xy}\sin\delta),\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$2c_{13} = 2c_{31} = \omega_1^{02}(I_{2yx}\cos\delta - I_{2yy}\sin\delta) + \omega_2^{02}(I_{2zz} - I_{2xx}cos\delta + I_{2yx}\sin\delta) - \omega_3^{02} I_{2yz},$$

$$2c_{23} = 2c_{32} = \omega_1^{02}(I_{2yx}\sin\delta + I_{2yy}\cos\delta - I_{2zz}) - \omega_2^{02}(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) + \omega_3^{02} I_{2xz}.$$

Подбором элементов матрицы B создадим управляющий момент (2.6) таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$\bar\omega^\top \left[B + C + \frac{1}{2}(\dot I_1 + \dot{\hat\delta} I_2 \hat\delta^{-1} + \hat\delta \dot I_2 \hat\delta^{-1} + \hat\delta I_2 \dot{\hat\delta}^{-1})\right]\bar\omega \geqslant b_0 \|\bar\omega\|^2, \qquad b_0 > 0. \tag{2.10}$$

Тогда матрица $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot I_1 + \dot{\hat\delta} I_2 \hat\delta^{-1} + \hat\delta \dot I_2 \hat\delta^{-1} + \hat\delta I_2 \dot{\hat\delta}^{-1})\right]$ будет определенно–положительной, и, соответственно, производная функции Ляпунова будет иметь оценку

$$\dot V \leqslant -b_0 \|\bar\omega\|^2 \leqslant 0,$$

то есть будет определенно–отрицательной по скоростям. Производная $\dot V = 0$ на множестве $\{\omega = 0\}$, причем на этом множестве система, предельная к системе (2.8), не имеет других решений, кроме $\bar\omega = 0$, $\bar s_0 = \pm\bar r_0$. На основе теоремы из [3] имеем асимптотическую устойчивость положения $\bar\omega = 0$, $\bar s_0 = \bar r_0$ и неустойчивость решения $\bar\omega = 0$, $\bar s_0 = -\bar r_0$. Таким образом, управляющий момент (2.6) при условии (2.10) решает задачу об одноосной ориентации спутника в кениговой системе координат.

Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим задачу о трехосной ориентации спутника.

Пусть заданы два взаимно перпендикулярных орта $\bar s_{01}$ и $\bar s_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два орта $\bar r_{01}$, $\bar r_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$. Положив

$$\bar s_{03} = \bar s_{01} \times \bar s_{02}, \quad \bar r_{03} = \bar r_{01} \times \bar r_{02},$$

поставим задачу о трехосной стабилизации — определить управляющий момент $\bar M^y$, обеспечивающий асимптотическое совпадение реперов $\bar s_{01}, \bar s_{02}, \bar s_{03}$ и $\bar r_{01}, \bar r_{02}, \bar r_{03}$.

Уравнения движения первого и второго тел в системе координат $Oxyz$:

$$I_1\dot{\bar{\omega}} + \dot{I}_1\bar{\omega} + \bar{\omega}\times I_1\bar{\omega} = \bar{M'}_1 + \bar{M}^y + \bar{M}_2,$$

$$\begin{aligned}&\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}(\dot{\bar{\omega}} + \dot{\bar{\omega}}^{02}) + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02}) + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02}) +\\ &+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02}) = \bar{M'}_2 - \bar{M}_2.\end{aligned}$$

Тогда в предположении отсутствия внешних сил ($\bar{M'}_1 = \bar{M'}_2 = 0$) получим уравнения движения всего спутника:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + (\dot{I}_1 + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega} + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}\dot{\bar{\omega}}^{02} +\\ &+(\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}^{02} + \bar{\omega}\times I_1\bar{\omega} + (\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega} +\\ &+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02} = \bar{M}^y.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Покажем, что решения задачи о трехосной ориентации можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\begin{aligned}&\bar{M}^y = -B\bar{\omega} - \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02} +\\ &+(\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1} + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\bar{\omega}^{02} + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\bar{r}_{0i}\times\tilde{s}_{0i}),\end{aligned} \qquad \tilde{s}_{0i} = A\bar{s}_{0i}, \tag{2.12}$$

где A — матрица перехода от системы координат $O\alpha\beta\gamma$ к системе $Oxyz$.

Утверждение 2. *При выборе управляющего момента M^y в виде* (2.12) *любое движение спутника асимптотически приближается к состоянию покоя $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$, $i = (1,2,3)$, либо стремится к такому состоянию. Причем это состояние покоя асимптотически устойчиво по Ляпунову, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, не устойчиво по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $\tilde{s}_{0i}$ вращаются относительно системы $Oxyz$ с угловой скорость $-\bar{\omega}$, и их движение описывается уравнениями:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{s}}_{01} = -\bar{\omega}\times\tilde{s}_{01},\\ \dot{\tilde{s}}_{02} = -\bar{\omega}\times\tilde{s}_{02},\\ \dot{\tilde{s}}_{03} = -\bar{\omega}\times\tilde{s}_{03}.\end{cases}$$

Уравнения движения (2.11) при управлении (2.12) имеют вид

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + (\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega} + \bar{\omega}\times I_1\bar{\omega} +\\ &+(\bar{\omega}+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega} + \bar{\omega}\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02} = -B\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\bar{r}_{0i}\times\tilde{s}_{0i}).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Система (2.13) имеет положения равновесия:

$$\bar{\omega} = 0, \quad \bar{s}_{01} = \pm\bar{r}_{01}, \quad \bar{s}_{02} = \pm\bar{r}_{02}, \quad \bar{s}_{03} = \pm\bar{r}_{03},$$

и при этом других положений равновесия на множестве $\{\omega = 0\}$ система не имеет.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar{\omega}^\top(I_1 + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\bar{r}_{0i} - \tilde{s}_{0i})^2\right).$$

Производная функции Ляпунова в силу уравнений движения (2.13) без учета слагаемых выше второго порядка малости будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} \cong -\bar{\omega}^\top B\bar{\omega} - \bar{\omega}^\top C\bar{\omega} - \frac{1}{2}\bar{\omega}^\top(\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}, \tag{2.14}$$

где элементы симметричной матрицы $C = \{c_{ij}\}$ вычисляются по формулам (2.9).

Подбором элементов матрицы B создадим управляющий момент (2.12) таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$\bar{\omega}^{\top}\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right] \bar{\omega} \geqslant b_0 \|\bar{\omega}\|^2, \qquad b_0 > 0. \tag{2.15}$$

Тогда матрица $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]$ будет определенно–положительной, и производная функции Ляпунова будет иметь оценку

$$\dot{V} \leqslant -b_0 \|\bar{\omega}\|^2 \leqslant 0.$$

Множество, на котором производная (2.14) равна нулю, есть множество $\{\omega = 0\}$. Система (2.13) на множестве $\{\omega = 0\}$ не имеет других решений, кроме $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{01} = \pm \bar{r}_{01}$, $\bar{s}_{02} = \pm \bar{r}_{02}$, $\bar{s}_{03} = \pm \bar{r}_{03}$. Поэтому на основе теоремы из [3] имеем, что положение равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво. Таким образом, управляющий момент (2.12) при выполнении условия (2.15) решает задачу трехосной ориентации системы двух тел в кениговой системе координат.

Утверждение доказано.

§ 3. Ориентация относительно неинерциальной системы координат

Рассмотрим задачу ориентации спутника относительно произвольной неинерциальной системы координат.

Пусть опять $O_1\xi\eta\zeta$ есть инерциальная система координат, $Oxyz$ — жестко-связанная с телом T_1 система координат. А система $O\alpha\beta\gamma$ пусть вращающаяся с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$ относительно неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$.

Зададим два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$ (орт $\bar{s}_0$ неизменен в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\bar{r}_0$ неизменен в $Oxyz$) и рассмотрим задачу об одноосной ориентации спутника, при которой ось $\bar{r}_0$ должна быть направлена по оси $\bar{s}_0$. Как и ранее, движение первого тела опишем уравнением (2.2), второго — уравнением (2.4), тогда (2.5) будет описывать движение системы двух соосных тел.

Если в начальный момент времени $t = 0$ орт $\bar{r}_0$ совпадает с ортом $\bar{s}_0$, то под действием момента

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 = {} & (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}}_0 + (\dot{I}_1 + \hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}_0 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1} \dot{\bar{\omega}}^{02} + \\ & + (\hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}^{02} + \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{\omega}_0 + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

орт $\bar{r}_0$ будет стабилизирован в направлении $\bar{s}_0$.

При наличии начальных отклонений или действии малых возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\bar{M}$, который обеспечивал бы ориентацию орта $\bar{r}_0$ по отношению к $\bar{s}_0$.

Обозначим

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0(t) + \bar{x}, \tag{3.2}$$

где где $\bar{x}$ — возмущение, $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$. Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.5), получим уравнение возмущенного движения в предположении, что внешние силы отсутствуют:

$$\begin{aligned} & (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + (\dot{I}_1 + \hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{\omega}_0 + \\ & + \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{x} + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} = \bar{M}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Изменение вектора $\bar{s}_0$ можно описать уравнением

$$\frac{d\bar{s}_0}{dt} = \frac{d\tilde{s}_0}{dt} + (-(\bar{\omega}_0 + \bar{x}) \times \bar{s}_0),$$

или

$$\dot{\bar{s}}_0 = -(\bar{\omega}_0 + \bar{x}) \times \bar{s}_0.$$

Для решения задачи об одноосной ориентации выберем управляющий момент в виде

$$\bar{M} = -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1}\bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0). \tag{3.4}$$

Утверждение 3. *Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются из (3.1) и (3.4), решает задачу об ориентации орта $\bar{r}_0$ в направлении орта $\bar{s}_0$. Причем положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ асимптотически устойчиво, а положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение движения (3.3) под действием управляющего момента (3.4) имеет вид

$$\begin{aligned}
&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + (\dot{I}_1 + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x} + \bar{x} \times I_1\bar{x} + \bar{x} \times I_1\bar{\omega}_0 + \\
&+\bar{\omega}_0 \times I_1\bar{x} + \bar{x} \times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x} + \bar{x} \times I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x} = \\
&= -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Система (3.5) на множестве $\{x = 0\}$ имеет только два положения равновесия:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{s}_0 = \pm\bar{r}_0.$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar{x}^\top (I_1 + \hat{\delta} I_2\hat{\delta}^{-1})\bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 - \bar{s}_0)^2\right).$$

Ее производная в силу системы (3.5) без учета слагаемых третьей степени будет иметь следующий вид

$$\dot{V} \cong -\bar{x}^\top B\bar{x} - \bar{x}^\top C\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x}^\top(\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}} I_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x},$$

где $C = \{c_{ij}\}$ — симметричная матрица с элементами, определяемыми формулами:

$$c_{11} = (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + (\omega_{03} + \omega_3^{02})(I_{2yx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),$$

$$c_{22} = (\omega_{03} + \omega_3^{02})(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) - (\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2zx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),$$

$$c_{33} = (\omega_{01} + \omega_1^{02})I_{2yz} - (\omega_{02} + \omega_2^{02})I_{2xz},$$

$$\begin{aligned}
&2c_{12} = 2c_{21} = -(\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2zx}\sin\delta + \\
&+I_{2zy}\cos\delta) + (\omega_{03} + \omega_3^{02})((I_{2xx} - I_{2yy})\cos\delta - 2I_{2xy}\sin\delta),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$2c_{13} = 2c_{31} = (\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2yx}\cos\delta - I_{2yy}\sin\delta) + (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2zz} - I_{2xx}cos\delta + I_{2yx}\sin\delta) - \omega_3^{02}I_{2yz},$$

$$2c_{23} = 2c_{32} = (\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2yx}\sin\delta + I_{2yy}\cos\delta - I_{2zz}) - (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) + \omega_3^{02}I_{2xz}.$$

Пусть управляющий момент создается таким образом, что выполняется неравенство (это возможно сделать подбором элементов матрицы B)

$$\bar{x}^\top\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}} I_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]\bar{x} \geqslant b_0\|\bar{x}\|^2, \qquad b_0 > 0.$$

Тогда матрица $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{I}_1 + \dot{\hat{\delta}} I_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]$ будет определенно-положительной, и производная функции Ляпунова будет иметь оценку

$$\dot{V} \leqslant -b_0\|\bar{x}\|^2 \leqslant 0.$$

Множество, на котором производная равна нулю, есть множество $\{x = 0\}$. Предельная система к системе (3.5) на множестве $\{x = 0\}$ не имеет других решений, кроме $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ и $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$. Поэтому на основе теоремы из [3] имеем, что положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ асимптотически устойчиво, а положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова. Итак, управляющий момент $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются из (3.1) и (3.4), решает задачу об ориентации орта $\bar{r}_0$ в направлении орта $\bar{s}_0$.

Утверждение доказано.

Рассмотрим задачу о трехосной ориентации спутника относительно неинерциальной системы координат.

Пусть заданы два перпендикулярных орта $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два перпендикулярных орта $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$. Положим $\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$, $\bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02}$.

Поставим задачу определения управляющего момента $\bar{M}^y$, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$, а орт $\bar{r}_{02}$ в направлении $\bar{s}_{02}$. Тогда орт $\bar{r}_{03}$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_{03}$.

Опять движение спутника относительно центра масс в предположении отсутствия внешних сил ($\bar{M}' = \bar{M}_1' = \bar{M}_2' = 0$) имеют вид, аналогичный (2.5):

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + (\dot{I}_1 + \hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega} + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1} \dot{\bar{\omega}}^{02} + \\ &+ (\hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}^{02} + \bar{\omega} \times I_1 \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) = \bar{M}^y.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ репер $\bar{r}_{01}, \bar{r}_{02}, \bar{r}_{03}$ совпадает с репером $\bar{s}_{01}, \bar{s}_{02}, \bar{s}_{03}$, то под действием момента (3.1) репер $\bar{r}_{01}, \bar{r}_{02}, \bar{r}_{03}$ будет стабилизирован в направлении $\bar{s}_{01}, \bar{s}_{02}, \bar{s}_{03}$.

При наличии начальных отклонений или действии возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\bar{M}$, который обеспечивал бы искомую трехосную ориентацию.

Введем отклонения в виде (3.2).

Подставляя (3.1) и (3.2) в (3.7) , получим уравнение возмущенного движения:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + (\dot{I}_1 + \hat{\delta} \dot{I}_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{\omega}_0 + \\ &+ \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{x} + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} = \bar{M}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Для решения задачи о трехосной ориентации выберем управляющий момент в виде

$$\bar{M} = -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\bar{r}_{0i} \times \tilde{s}_{0i}), \quad \tilde{s}_{0i} = A\bar{s}_{0i}, \tag{3.9}$$

где A — матрица перехода от системы координат $O\alpha\beta\gamma$ к системе $Oxyz$.

Утверждение 4. *Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются соответственно из* (3.1) *и* (3.9), *решает задачу об ориентации спутника относительно $O\alpha\beta\gamma$. Причем положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Движение векторов $\tilde{s}_{0i}$ описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}_{01} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{01}, \\ \dot{\tilde{s}}_{02} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{02}, \\ \dot{\tilde{s}}_{03} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{03}. \end{cases}$$

Уравнение движения (3.8) при управлении (3.9) имеет вид

$$\begin{aligned}&(I_1+\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}}+(\dot{I}_1+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x}+\bar{x}\times I_1\bar{x}+\bar{x}\times I_1\bar{\omega}_0+\\&+\bar{\omega}_0\times I_1\bar{x}+\bar{x}\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x}+\bar{x}\times I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}_0+\bar{\omega}^{02})+(\bar{\omega}_0+\bar{\omega}^{02})\times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x}=\\&=-B\bar{x}-\dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\bar{r}_{0i}\times\tilde{s}_{0i}).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Система (3.10) на множестве $\{x=0\}$ имеет положения равновесия:

$$\bar{x}=0,\quad \bar{s}_{01}=\pm\bar{r}_{01}\quad,\quad \bar{s}_{02}=\pm\bar{r}_{02},\quad \bar{s}_{03}=\bar{s}_{01}\times\bar{s}_{02},$$

Производная функции Ляпунова

$$V=\frac{1}{2}\left(\bar{x}^\top(I_1+\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\bar{x}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\bar{r}_{0i}-\tilde{s}_{0i})^2\right)$$

в силу системы (3.10) без учета слагаемых выше второго порядка малости будет иметь вид

$$\dot{V}\cong-\bar{x}^\top B\bar{x}-\bar{x}^\top C\bar{x}-\frac{1}{2}\bar{x}^\top(\dot{I}_1+\dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x},\tag{3.11}$$

где элементы симметричной матрицы $C=\{c_{ij}\}$ определяются формулами (3.6).

Подберем элементы матрицы B согласно условию

$$\bar{x}^\top\left[B+C+\frac{1}{2}(\dot{I}_1+\dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]\bar{x}\geqslant b_0\left\|\bar{x}\right\|^2,\qquad b_0>0.$$

Тогда матрица $\left[B+C+\frac{1}{2}(\dot{I}_1+\dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}\dot{I}_2\hat{\delta}^{-1}+\hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]$ будет определенно–положительной, и производная функции Ляпунова будет определенно–отрицательной по скоростям

$$\dot{V}\leqslant-b_0\left\|\bar{x}\right\|^2\leqslant 0.$$

Множество, на котором производная равна нулю, есть множество $\{x=0\}$. Система, предельная к (3.10), на множестве $\{x=0\}$ не имеет других решений, кроме

$$\bar{x}=0,\quad \bar{s}_{01}=\pm\bar{r}_{01}\quad,\quad \bar{s}_{02}=\pm\bar{r}_{02},\quad \bar{s}_{03}=\pm\bar{r}_{0}.$$

Поэтому на основе теоремы из [3] получим, что положение равновесия $\bar{x}=0$, $\bar{s}_{0i}=\bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво.

Тем самым имеем, что управляющий момент $\bar{M}^y=\bar{M}_0+\bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются из (3.1) и (3.9), решает задачу об ориентации системы двух соосных тел относительно произвольной неинерциальной системы координат $O\alpha\beta\gamma$.

Доказательство окончено.

Результаты, полученные в работе, развивают соответствующие результаты о стабилизации программных движений из [1, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раушенбах В. В., Токарь В. И. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974. — 589 с.
2. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980. — 301 с.
3. Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ — 1984. — Т. 48. — Вып. 2
4. Андреев А. С., Чудинова И. А. К задаче об ориентации спутника относительно произвольной системы координат // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. — 2001. — № 1. — С. 3–11.

5. Асланов В. С., Дорошин А. В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска // Космические исследования. — 2002. — Т. 40 — № 2. — С. 193–200.

Поступила в редакцию 22.03.10

O. A. Mysina

About one-axial and tri-axial orientations of coaxial bodys of variable structure

In work the problem about one-axial and tri-axial orientations of a coaxial bodys of variable structure concerning Kenigovoj and any not inertial system of co-ordinates is put. The stabilisation problem dares active board by a principle of the feedback realised, for example, by engines of small draught. Stabilising controls and conditions at which desirable orientation is possible are received. The task in view dared on the basis of a method of functions of Lyapunov and a method of the limiting equations and the limiting systems, allowing to use Lyapunov's functions with constant sings derivatives.

Keywords: one-axial orientation, tri-axial orientations, functions with constant sings, Lyapunov's function.

Mathematical Subject Classifications: 74H45

Мысина Ольга Александровна, аспирант кафедры Теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе 34, тел. 8-917-946-30-49, e-mail: olgamysina@yandex.ru