

УДК 618.3.06

© А. Ю. Переварюха

## ПЕРЕХОД К УСТОЙЧИВОМУ ХАОТИЧЕСКОМУ РЕЖИМУ В НОВОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ЕДИНСТВЕННОЙ БИФУРКАЦИИ<sup>1</sup>

В статье рассматривается возникновение хаотического аттрактора в неунимодальном одномерном отображении, моделирующем динамику популяции. Появление не являющегося переходным хаотического режима происходит без каскада бифуркации. Изменение в поведении модели возникает после обратной касательной бифуркации. С биологической точки зрения эффект интерпретируется резким включением дополнительных факторов смертности для поколения на определенном этапе. Разработанная модель описывает волнообразную зависимость запаса и пополнения при воспроизводстве отдельных видов рыб, наблюдавшуюся в естественной среде.

*Ключевые слова:* нелинейные модели динамики популяций, сценарий перехода к хаосу в отображении

### Введение

Исторически сложилось два альтернативных направления в методологии моделирования динамики популяций. Первое направление связано с использованием систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и восходит к работам Вито Вольтерра. Выдающийся физик Поль Дирак высказал мнение, что «теория, обладающая математической красотой, имеет больше шансов оказаться правильной, чем уродливая теория, согласующаяся с какими-то числами». Возможно, в этом кроется принципиальная разница между подходами механики и экологии. Так называемые «вольтерровские» модели не нашли широкого применения в практических задачах, красивых замкнутых циклов в реальных данных получить не удалось. Биологи начали разрабатывать модели балансового равенства и трофодинамические модели продукционных процессов. Не связанные с проблемами продукционной биологии конкретных объектов работы сосредоточились на изучении поведения систем дифференциальных уравнений с различного вида правыми частями.

Репродуктивная активность многих популяций ограничивается некоторым определённым моментом времени и имеет строгую временную периодичность. Естественным образом дискретные динамические системы, в том числе матричные модели, стали одним из основных аппаратов математической биологии, используемых при моделировании популяционных процессов. Однако, практика применения дискретных моделей в биологических задачах развивалась ранее, чем были изучены и исследованы изменения режимов поведения траекторий нелинейных отображений. Об экспериментально обнаруженном в численных экспериментах Р. Мэем эффекте хаотизации в простых биологических моделях при увеличении параметра сообщили ведущие журналы *Science*, *Nature*, но большинство работ практической экологической проблематики с проблемами бифуркаций аттракторов динамических систем не пересекались.

Исследователи на основании моделирования делали важные для управления экосистемой теоретические выводы, например о влиянии высокой кормкости водоёма и сбалансированности трофических связей на стабилизацию автоколебаний численности видов гидробионтов [1]. В действительности, наблюдаемые ими изменения связаны с влиянием особенностей математического аппарата, который может существовать совершенно отдельной «жизнью» от теоретических представлений науки, в рамках которой предлагаются модели. Известно, что в

<sup>1</sup>Работа выполнена поддержке гранта Правительства Санкт-Петербурга.

различных нелинейных отображениях наблюдаются аналогичные сценарии появления циклических и аперiodических режимов вне зависимости от наличия биологической интерпретации их переменных.

В настоящей работе описывается разработанная новая модель, обладающая возможностью реализации двух видов аперiodической динамики.

### § 1. Унимодальные отображения в моделировании динамики популяций

В ихтиологии широко известны и применяются модели, предложенные различными авторами для описания динамики численности популяций рыб на основе формализации зависимости между нерестующим запасом и полученным от него пополнением. Модели теории формирования пополнения используются в отдельных задачах и как элементы комплексных, многовидовых моделей водных экосистем.

Модели вида запас-пополнение классифицировались в зависимости от положенных в их основу теоретических биологических предположений. Автору представляется более целесообразным группировать модели по возможности появления топологически неэквивалентных фазовых портретов.

Дробно-линейная модель Бивертон-Холта не обладает возможностью изменений режима поведения и для неё, как для любой монотонно возрастающей зависимости, возможно только единственное стационарное состояние равновесия. Гораздо более сложное поведение демонстрируют унимодальные отображения Рикера и Шепарда, и весьма интересным представляется их сравнение.

Дискретная динамическая система в виде функциональных итераций с использованием формулы Рикера:

$$R_{j+1} = aR_j e^{-bR_j}. \quad (1)$$

представленная в виде полугруппы итераций  $\{\psi^{(j)}\}_{j \geq 0}$ , где  $R_0, R_1, R_2 \dots$  — последовательность точек, описывающих эволюцию системы, определённых условием  $R_{j+1} = \psi(R_j)$  для любых  $j > 0$  обладает глобальным аттрактором. Бифуркационный параметр  $a$  характеризует репродуктивный потенциал популяции, коэффициент  $b$  негативное действие различных факторов плотности.

Бифуркация удвоения периода происходит, когда производная в стационарной точке  $\psi'(R^*) = -1$ , при  $a = e^2$ . Появляется устойчивый цикл периода два  $\{R_1^*, R_2^*\}$  а прежде устойчивая точка  $R^*$  становится репеллером и делит область притяжения образовавшегося цикла на два субинтервала  $\Upsilon_1, \Upsilon_2$ . Для  $R_0 \approx \hat{R}_0, R_0 \in \Upsilon_1, \hat{R}_0 \in \Upsilon_2$  отличается порядок обхода цикла  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(R_0)^n = R_1^*$  при  $n = 2^i$  и соответственно  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\hat{R}_0)^n = R_1^*$  при  $n \neq 2^i$ . При последовательном увеличении параметра  $a$  развивается каскад бифуркаций периодов цикла  $2^i, i \rightarrow \infty$ . Характеристики появления последовательных удвоений цикла исследованы М. Фейгенбаумом в знаменитой работе об универсальности в поведении нелинейных систем [2]. Проявление универсальности состоит в том, что если  $\Lambda_n$  значение параметра, при котором период удваивается в  $n$ -й раз, то тогда величина  $\delta_n$  быстро приближается к постоянной величине:

$$\delta_n = \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4,6692 \dots$$

При значении коэффициента  $a > 14,3$  невозможно выделить устойчивого замкнутого цикла, движение траектории становится хаотическим в смысле определения Ли и Йорка [3], предполагающего неограниченность множества периодов периодических траекторий и существование несчетного множества непериодических траекторий. Предложено несколько определений хаоса и, если судить по опубликованной в 2009 г. статье Колесова и Розова [4], где было дано новое определение хаотического инвариантного множества, обобщающее ранее известное, проблема определения не закрыта.

Бесконечное число ставших нестабильными циклических точек приводит к разделению области притяжения аттрактора  $\Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup \dots \cup \Upsilon_i \subset \Omega$ . Попадание в другой субинтервал изменяет

траекторию движения по аттрактору и таким образом возникает чувствительность к выбору начальной точки траектории  $R_0$ .

Эффект чувствительной зависимости поведения траекторий в странных аттракторах от незначительного изменения начальных условий накладывает ограничение на использование таких моделей для прогнозирования динамики популяций. Однако, существуют примеры, когда на основе модели Рикера в диапазоне значений бифуркационного параметра, соответствующего хаотической динамике, делались теоретические выводы, например о том, что миграции совсем незначительного количества особей может привести к смене доминирования у двух популяций горбуши [5]. Согласно мнению авторов [5] репродуктивный потенциал горбуши так высок, что её динамика должна соответствовать движению траектории по странному аттрактору. На основании исследования той же модели Берриман сделал вывод о том, что так как амплитуда аperiodических колебаний численности популяции в режиме динамического хаоса очень велика, то популяции находящиеся в таком состоянии подвержены риску вымирания [6].

Модель Шепарда была аналогично предложена для формализации зависимости запаса и пополнения, но форма графика функции может быть более разнообразной, чем у модели Рикера так как были введены дополнительные параметры:

$$R_{j+1} = \frac{aR_j}{(1 + R_j/K)^m}, \quad (2)$$

где  $K$  — интерпретируется как биомасса, при превышении которой начинают действовать зависящие от плотности факторы смертности;  $m$  — параметр, определяющий интенсивность воздействия компенсационной (увеличивающейся от возрастания плотности) смертности. Особенности графика модели Шепарда зависят от соотношения параметров в весьма широком диапазоне, возможно возрастание кривой пополнения при росте запаса так и сокращение пополнения, опережающее увеличение запаса.

Для динамической системы (2) аналогично возможны появления циклов периода  $2^n$  и реализация сценария Фейгенбаума, но бифуркационным параметром является показатель степени знаменателя  $m$ . Следовательно, если рассматривать биологическую интерпретацию двух моделей, то для модели Шепарда переход к хаотическому режиму будет происходить вследствие усиления действия лимитирующих факторов, а для модели Рикера при увеличении эффективности репродуктивной активности популяции. Дж. Шепард предполагал улучшить теорию Рикера [7] и ввел с его точки зрения более общую, универсальную зависимость, но в действительности с позиций теории динамических систем две модели запас-пополнение взаимно исключают справедливость друг друга.

Таким образом, сценарий перехода к хаосу, реализующийся через каскад бифуркаций в дискретных динамических системах, приводит к противоречию исследователей в части существенной интерпретации результатов применения моделей математической биологии. Реальные дискретные модели экосистем включают себя целый комплекс разностных уравнений, трофических функций с нелинейными зависимостями и на практике очень сложно найти точки бифуркаций в пространстве их параметров. Одной или двух бифуркационных диаграмм может быть недостаточно.

## § 2. Постхаотические эффекты в динамике (1) и (2)

Каскадом бифуркаций удвоения периода спектр нелинейных эффектов в рассматриваемых моделях математической биологии не ограничивается. В динамике унимодальных отображений происходят явления, которые не интерпретировались и весьма вероятно, что в принципе не могут быть интерпретированы с биологической точки зрения.

Несколько нелинейных явлений и метаморфозов в поведении дискретных динамических систем, связанных не только с бифуркациями, происходят в окнах периодичности.

Окна периодичности возникают после касательных бифуркаций. При данной бифуркации производная  $n$ -ной итерации в появляющихся новых неподвижных точках  $\psi^{n'}(R^*) = 1$ . Цикл периода 3 вытесняет странный аттрактор, когда у  $\psi^3(R)$  формулы (1) при  $a_c = 22,54$

появляются шесть новых нетривиальных стационарных точек, пересечений с биссектрисой  $R_n = R_{n+1}$ , три из которых образуют устойчивый цикл, а три другие неустойчивый. Три последнее число в специальном порядке доказанной А. Шарковским теоремы о сосуществовании циклов в одномерных отображениях [8], появление цикла периода 3 означает наличие в динамической системе циклов других всевозможных периодов  $k$ , в том числе  $k \neq 2^i$ .

Бифуркации удвоения изменяют только аттрактор, касательная бифуркация приводит к изменению не только типа аттрактора динамической системы, меняется геометрическая структура областей притяжения и это определяет особенности поведения траектории на протяжении «окна периодичности», под которым будем понимать некоторый диапазон значений бифуркационного параметра. Поведение траектории при  $a \in [a_c, a_t]$  вопреки ранее сформированным представлениям о динамике исследуемых биологических моделей не ограничивается последовательной сменой циклических режимов.

Рассмотрим третью итерацию (1)  $R_{n+1} = \psi^3(R_n)$  как отдельную динамическую систему. В диапазоне значений  $[a_c, a_t]$  существования периодического окна отображение имеет три аттрактора и границы областей притяжения этих аттракторов становятся фрактальными согласно определению, данному в работе [9]. Далее при плавном увеличении  $a$  стационарные точки  $\psi^3(R^*) = R^*$  теряют устойчивость, и происходит каскад бифуркаций удвоения, однако определенная константа  $\delta$  при удвоениях нечетных циклов не наблюдается.

Каскад бифуркаций цикла  $\psi^n(R) = \psi^{n+3}(R)$  приводит к тому, что хаотический аттрактор в окне периодичности разделен на три сегмента:  $\Upsilon_1 \cap \Upsilon_2 \cap \Upsilon_3 = \emptyset$ . Когда нестабильные циклические точки, возникшие при касательной бифуркации, попадают внутрь этих сегментов, происходит внутренний кризис, один из возможных метаморфозов хаотического аттрактора [10], несвязные сегменты объединяются и периодическое окно закрывается.

Таким образом, после прохождения каскада бифуркаций удвоения при плавном изменении параметров в моделях (1) и (2) наблюдается ряд нелинейных эффектов, не интерпретируемых с биологической точки зрения.

### § 3. Альтернативные сценарии перехода к хаотическому режиму

В рассмотренном дискретном отображении хаос возникает после бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода цикла. Расстояние между точками бифуркации в пространстве параметров быстро сокращается и в результате период цикла  $\rightarrow \infty$ . Подобный сценарий реализуется для унимодальных отображений с экстремумом близким к квадратичному. В том числе сценарий Фейгенбаума реализуется для моделей, предлагавшихся для применения в математической биологии, так и в не имеющих никакого отношения к биологии функциональных преобразованиях, например  $x_{n+1} = \sigma \sin \pi x_n$ . Критерием для реализации каскада бифуркаций служит условие  $S_\psi < 0$  дифференциального инварианта Шварца [11]:

$$S_\psi = \frac{\psi'''(R)}{\psi'(R)} - \frac{3}{2} \left( \frac{\psi''(R)}{\psi'(R)} \right)^2.$$

Одномерные отображения можно классифицировать в зависимости от значения  $S_\psi$ , *никаким образом* биологически не интерпретируемого параметра. Выделим не сохраняющие знак и знакопостоянные отображения, которые в свою очередь могут характеризоваться положительным, отрицательным ( $SU$ -отображения) или  $S_\psi = 0$ . Знакопостоянство будем оценивать по графику полученной при численном решении ОДУ функциональной зависимости, знакопостоянство шварциана невозможно при наличии более одной точки перегиба  $\psi''(R) = 0$  [12]. Динамика унимодальных отображений, особенности возникновения циклов различных периодов и переходы к хаосу изучены достаточно подробно. Помимо уже рассматривавшегося бесконечного каскада удвоений периода выделено еще два пути перехода к хаосу («route to chaos») [9]. Возможность моментального возникновения хаотического режима связанная с описанным явлением граничного кризиса хаотического аттрактора, исчезающего, когда увеличивающийся аттрактор соприкасается с границами своей области притяжения. Граничный кризис происходит в отображении  $x_{n+1} = Z - x_n^2$  при  $Z = Z_c = 2$ . Хаотический аттрактор достигает

границ интервала  $-2 \leq x \leq 2$ , при  $Z > Z_c$  аттрактор исчезает и  $x_n \rightarrow \infty$ . В таком сценарии при изменении параметра в обратном  $Z < Z_c$  направлении происходит «одномоментное» возникновение хаотического аттрактора.

С касательной бифуркацией и окнами периодичности связан другой вид возникновения хаотического движения в отображениях — перемежаемость [13] (intermittency). До того как происходит касательная бифуркация, когда управляющий параметр немного меньше бифуркационного значения, длительные периоды почти периодического движения прерываются нерегулярно возникающими хаотическими всплесками. Перед бифуркацией приводящей к появлению цикла периода 3, три точки между минимумами и максимумами третьей итерации (1)  $\psi^3(R)$  приближаются к биссектрисе координатного угла, геометрическому месту стационарных точек. Тогда расстояние  $|\psi(\hat{R}) - \hat{R}| \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow a_t$  и движение траектории, попадающей в окрестность одного из трех экстремумов  $\psi^3(R)$  становится практически периодическим:  $|\psi(R) - \psi^{n+3}(R)| \approx 0$ , но выход из окрестности сопровождается для динамической системы в данном узком диапазоне значений параметра  $a$  непериодическими колебаниями значительной амплитуды, но небольшой продолжительности.

#### § 4. Роль неунимодальности $R = \psi(S)$ в динамике популяций и её моделирование

В экологических системах могут наблюдаться весьма сложные зависимости. В частности возникла задача описания различных волнообразных кривых зависимости между нерестующим запасом и получившимся пополнением у популяций осетровых рыб Каспийского моря.

Автором в работе [14] была разработана метод моделирования с учетом наличия скачкообразных изменений в раннем онтогенезе и их влиянии на динамику смертности поколения согласно теории этапности развития рыб. Основная идея нового метода заключается в применении уравнений со структурно изменяющейся правой частью при переходах между выделенными основными стадиями развития  $D_0, D_1, D_2$  особей поколения на основе реализации гибридного автомата в инструментальной среде *AnyLogic<sup>tm</sup>* и применения непрерывно-дискретного представления модельного времени:

$$\tau = \{\{Gapp_1, [0, T_1], Gappost_1\}_1, \dots, \{Gapp_n, [T_{n-1}, T_n], Gappost_n\}_n\}.$$

Была получена сглаженная куполообразная функциональная зависимость, соответствующая данным наблюдениям о воспроизводстве популяции волжского осетра *Acipenser guldenstaedtii* и показано, что устойчивым стационарным состоянием для популяции, находящейся в диапазоне численности большей критической  $R > L$ , является цикл периода 2, отвечающий режиму автоколебаний:  $\psi^n(R^*) = \psi^{n+2}(R^*)$ .

Основанием для разработки новой гибридной модели, описываемой в данной статье, явилась необходимость математического исследования другого явления, обнаруженного автором по анализу данных наблюдений и описанного ранее в работах ихтиологов.

В природе у зависимости между нерестовым запасом и численностью пополнения может наблюдаться несколько экстремумов. Впервые о том, что кривая зависимости запаса и пополнения может быть неунимодальной, (ихтиологи чаще употребляют термины «волнообразной» или «двоякоизогнутой») указывал ещё У. Рикер и писал о важности данного явления на примере конкретной популяции горбуши. Теоретическое обсуждение причин возникновения подобного характера зависимости приведено в книге [15]. Особый интерес представляет приведенный там следующий график волнообразной зависимости запаса пополнения для одной из промысловых популяций лосося Британской Колумбии (рис. 1). Из приведенной зависимости не понятно, как популяция может пересечь границу областей  $B$  по направлению к верхнему устойчивому состоянию. В динамической интерпретации зависимости пересечение границы области притяжения  $B$  возможно, если допускается интродукция особей  $\Delta X$  из других ареалов обитания. Между двумя максимумами наблюдается диапазон значений запаса, в которых  $R < S$ , следовательно, популяция не восстанавливает свою численность, и такой характер существенно сказывается на качественном поведении системы. Зависимость предполагает для динамической системы наличие двух нетривиальных аттракторов  $C > A > 0$  с гладкой границей областей

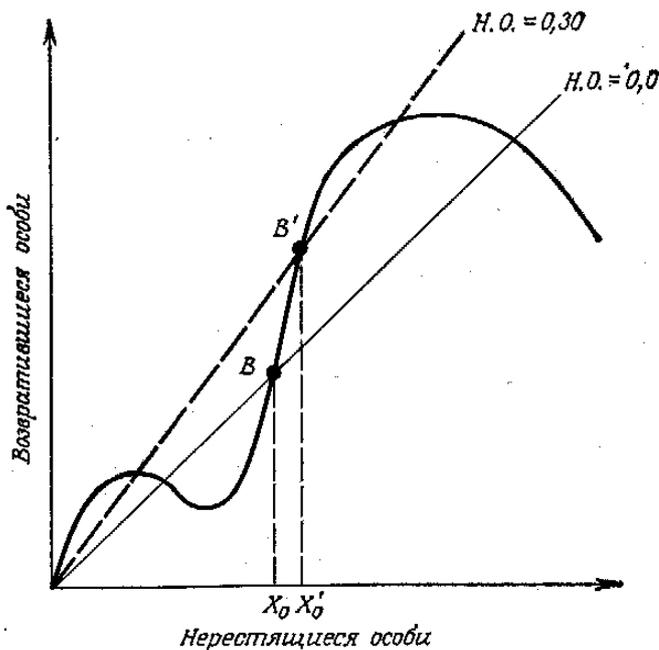


Рис. 1. Неунимодальность в зависимости запаса и пополнения горбуши

притяжения  $\Omega_A$  и  $\Omega_C$ , что не позволяет моделировать наблюдаемое иногда в динамике промысловых популяций явление:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(R_0) = C, \text{ при } R_0 \in \Omega_A.$$

Переход согласно такой зависимости возможен только в сторону устойчивого состояния с низкой численностью, что объясняется нерациональным промыслом. Пунктирная диагональная линия на рисунке показывает возможное смещение стационарных точек при увеличении промысловой смертности  $H$ . По мнению Р. Петермана далее зависимость при возрастании  $S$  убывает практически до близких к нулю значений. Однако, такое предположение не соответствует другим имеющимся данным.

Независимо от [15] автор анализировал данные за более чем 50-летний период наблюдений о воспроизводстве каспийской севрюги *Acipenser stellatus*. Ихтиологи не предавали особого значения зависимости запаса и пополнения у севрюги из-за незначительности коэффициента корреляции, но неожиданно был обнаружен на графике выраженный волнообразный характер зависимости (рис. 2). Именно обнаружение такой зависимости явилось предпосылкой и точкой отсчета для всех последующих исследований в области хаотической динамики и работе по методам применения гибридных автоматов в контексте задач математической биологии.

Очевидная разница в форме зависимости между запасом и пополнением двух анадромных видов рода *Acipenser* может быть объяснена различиями в экологии нереста и средней плодовитости самок [16]. Севрюга и русский осётр нерестятся в разные сроки и используют различные нерестилища. Более теплолюбивая севрюга нерестится в период летней межени на русловых нерестилищах. Для моделирования волнообразной зависимости была принципиально модернизирована описанная в [14] модель формирования пополнения:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \Theta(S)\beta)N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k + \zeta}, \Theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)}, \end{cases} \quad (3)$$

с применением следующим образом дважды структурно изменяющейся правой частью первого уравнения, где дополнительно при переходе к стадии  $D_2$  используется уравнение отклоняю-

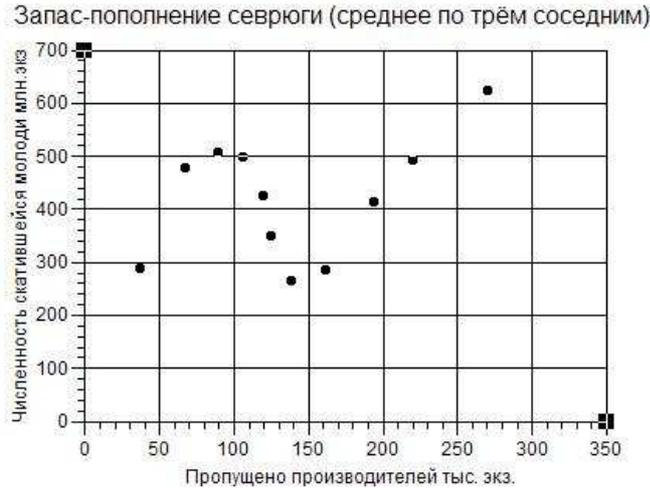


Рис. 2. Неунимодальность в зависимости запаса и пополнения севрюги

щимся аргументом<sup>2</sup> так как для популяционных процессов на старшей стадии уже характерна зависимость динамики в настоящий момент от предшествующего состояния поколения:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + \Theta(S)\beta)N(t), 0 < t \leq \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau)/w(\tau) + \beta)N(t), t > \tau, w(t) < w_{k1} \\ -(\alpha_2 w(t)N(t))N(t - \varsigma), w_{k1} < w(t) < w_k \end{cases} \quad (4)$$

где  $S$  — численность нерестового запаса;  $\tau$  — длительность самого раннего этапа развития, характеризующегося тем, что питание происходит за счет желточного мешка. Продолжительность периода зависит от биологических особенностей конкретного вида;  $\varsigma$  — небольшое по сравнению с временным интервалом расчета убыли численности поколения  $t \in [0, T]$  запаздывание.  $w_k$  — интерпретируется как уровень развития, достижение которого изменяет характер действия факторов смертности и выделяет событие, приводящее к реализации перехода  $D_1 \leftrightarrow D_2$ . в поведении гибридного автомата.  $N(0) = \lambda S$ , где  $\lambda$  — плодовитость популяции.

События в гибридных системах описываются предикатами, выделяющими из всех состояний системы событие, приводящие к изменению в характере развития процесса [17]. Таким образом, гибридная модель должна содержать набор булевских функций:

$$pred(t, s(t)) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \{\text{false}, \text{true}\},$$

определенных на решениях дифференциальных уравнений, выделяющие особые состояния, приводящие к смене поведения и набор правых частей (составляющих вектора  $s(t)$ ), со свойствами, обеспечивающими существование и единственность решения ОДУ.

Существует следующая проблема, как показано на рисунке (рис. 1) верхнее стационарное состояние не статично и может смещаться влево (вплоть до исчезновения), не только как следствие изменения доли промыслового изъятия из запаса, но и в результате воздействия ряда других факторов. Следовательно, необходимо рассматривать при моделировании и возможность изменения числа нетривиальных стационарных точек.

### § 5. Особенность перехода к хаотическому аттрактору в новой модели

Новая зависимость, полученная при численном интегрировании модели (4) в зависимости от изменения управляющего параметра в допустимом диапазоне может иметь либо 4 либо 2 нетривиальных стационарных точки. Таким образом, при увеличении действия факторов смертности наблюдается качественное изменение в поведении динамической системы  $R_{n+1} = \psi(R_n)$ , и данный метаморфоз изменяет вид реализующегося в системе хаотического режима.

<sup>2</sup>Естественное условие  $\varsigma < T$ .

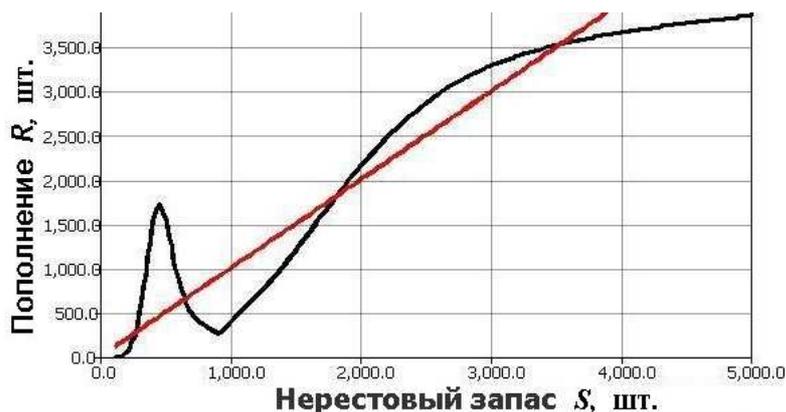
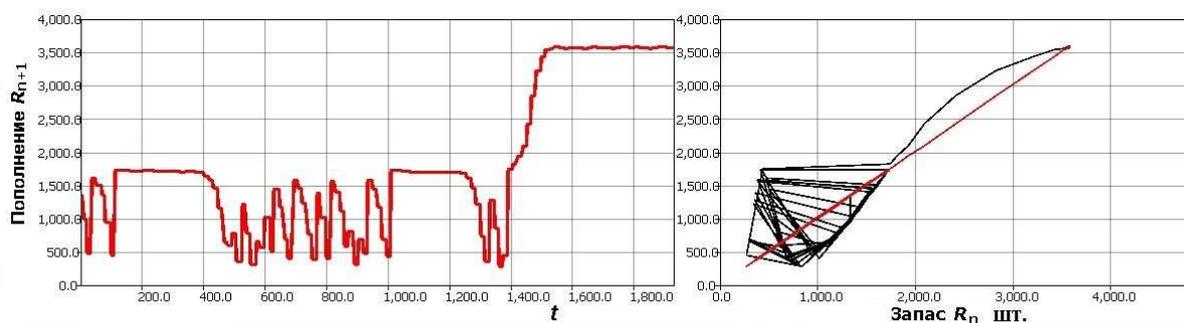
Рис. 3. Зависимость  $R = \psi(S)$  модели (4)

Рис. 4. Хаотический репеллер (4)

В случае, если нетривиальными стационарными точками являются  $R_1^* < R_2^* < R_3^* < R_4^*$  (рис.3) то, как показал анализ второй итерации  $\psi^2(R)$ , устойчивой точкой является только  $R_4^*$ . Необходимым и достаточным условием устойчивости неподвижной точки  $x^*$  одномерного отображения является критерий  $\psi^2(x) > x$  при  $x < x^*$  и  $\psi^2(x) < x$  при  $x > x^*$  [18]. Вторым аттрактором динамической системы является точка  $(0, 0)$ .

Если начальное значение  $R_0 \in (R_1^*, R_3^*)$ , то у траектории появляются непериодические значения, характеризующиеся чувствительностью к незначительному изменению  $R_0$ .

Траектория находится в данной области фазового пространства продолжительное время, которое аналогично зависит от выбора  $R_0$ , но с вероятностью  $p = 1$  покидает ее по направлению к одному из двух возможных аттракторов (рис. 4 временная диаграмма слева, фазовая справа). Вид реализующегося ограниченное время хаотического поведения траектории определяется термином «chaotic transient» – переходный хаос [19]. Характер границы между областями притяжения аттракторов является важной характеристикой мультистабильной динамической системы. В случае гладких границ, которыми отличалась динамическая система в предыдущей работе [14], при определении начальных условий траектория определенно соответствовала  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$  и малое изменение начальных условий не приводило к выходу фазовой траектории на альтернативный аттрактор. Усложнение характера границ влияет на режим поведения траектории системы, так же как и изменение типа аттрактора при бифуркации.

В случае (4) границы областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в  $[R_1^*, R_3^*]$  фрактальны и не образуют непрерывных подпространств в фазовом пространстве. Границы областей притяжения локально-несвязны («locally disconnected basin boundaries») по существующей классификации фрактальных границ [20]. Наличие фрактальных границ приводит к невозможности предсказания относительно того, в непрерывную часть области притяжения какого из двух существующих аттракторов попадет фазовая траектория. Таким образом, для зависимости (рис. 3) наблюдается наличие хаотического репеллера.

При увеличении управляющего параметра  $\alpha_1$  правая ветвь кривой окажется ниже биссектрисы координатного угла:  $\forall R \in [\min \psi(R), \infty) \psi(R) < R$ . Исчезают устойчивая  $R_4^*$  и не устойчивая  $R_3^*$  особые точки (рис. 5). Происходит изменение качественного поведения дина-



Рис. 5. Модель (4) после обратной касательной бифуркации

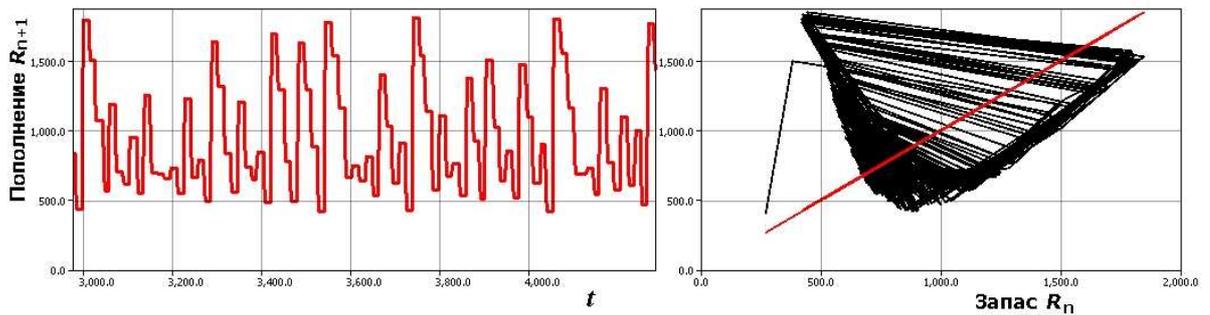


Рис. 6. Хаотический аттрактор,  $R_0 < \max \psi(R)$

мической системы. Траектория  $\forall R_0 \in \Omega_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(R_0)^n = \Phi$ , где  $\Phi$  — подмножество фазового пространства, в котором наблюдается аperiодический режим движения траектории и чувствительная зависимость от начальных условий (рис. 6, рис. 7 временная диаграмма слева, фазовая справа). Для  $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  таких, что  $\min \psi(R) > R_1^*$  наблюдается хаотический аттрактор, который возникает в части области хаотического репеллера  $\Phi \subset \Omega_3$ . Границы областей притяжения  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  становятся гладкими, единственной точкой-репеллером  $R_1^*$ .

Возникший хаотический аттрактор принципиально по своей структуре отличается от возникающего в точке накопления каскада бифуркаций аттрактора Фейгенбаума (§ 2).

Таким образом, экспериментально показано как в *неунимодальном* одномерном отображении может происходить переход к хаотическому аттрактору после исчезновения одного из регулярных аттракторов. В сценарии хаотизации не требуется каскада бифуркаций при условии  $S_\psi < 0$ , важно положение  $\min \psi(R)$ . Граничный кризис аттрактора наблюдается при  $\min \psi(R) = R_1^*$ .

В биологической интерпретации этот эффект означает возможность перехода к хаотическому режиму из-за увеличения компенсационной смертности на определённом этапе развития или из-за увеличения продолжительности этапа.

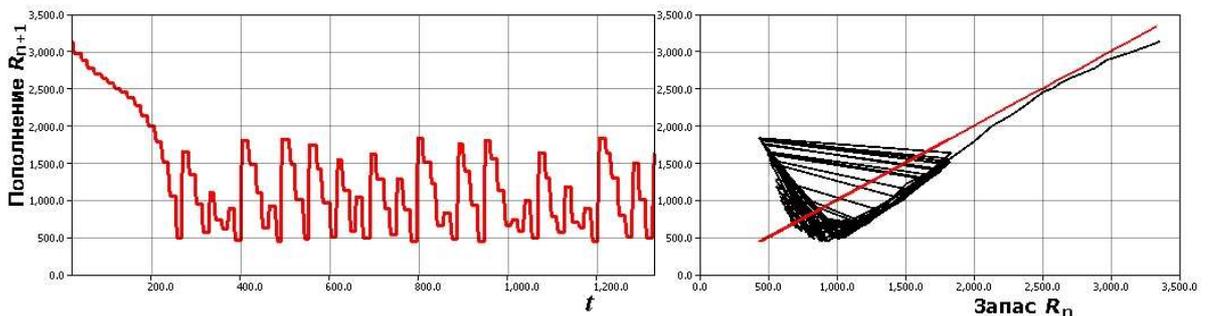


Рис. 7. Хаотический аттрактор,  $R_0 > \max \psi(R)$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меншуткин В. В., Казанский А. А. Математическое моделирование сообществ рыб на ЭВМ // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем: Сб. Л.: Гидрометеоиздат. 1981. — С. 251–256.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. — 1983. — Т. 141. — Вып. 2. — С. 343–374.
3. Li T., Yorke J. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. — 1975. — Vol. 82. — № 10. — P. 985–990.
4. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. К вопросу об определении хаоса // Успехи математических наук. — 2009. — Т. 64. — вып. 4. — С. 26–170.
5. Животовский Л. А., Храпцов В. В. Модель динамики численности горбуши *Oncorhynchus gorbusha* // Вопросы ихтиологии. — 1996. — Т. 36. — № 3. — С. 369–385.
6. Berrymann A., Milstein J. Are ecological systems chaotic and if not, why not? // Trends in Ecology and Evolution. — 1989. — Vol. 4. — Iss. 1. — P. 26–28.
7. Ricker W. Stock and recruitment // Journal Fisheries research board of Canada. — 1954. — Vol. 11. — № 5. — P. 559–623.
8. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов у непрерывного преобразования прямой в себя // Украинский математический журнал. — 1964. — Т. 26. — № 1. — С. 61–71.
9. Grebogi C., Ott E., Yorke J. Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics // Science. — 1987. — Vol. 238. — № 4827. — P. 632–638.
10. Grebogi C., Ott E., Yorke J. Chaotic attractors in crisis // Physical Review Letters. — 1982. — Vol. 48. — № 22. — P. 1507–1510.
11. Мун Ф. Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990. — 312 с.
12. Динамика одномерных отображений / Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивек А. Г., Федоренко В. В. — Киев: Наукова думка, 1989. — 216 с.
13. Hirsch E., Huberman B., Scalapino J. Theory of intermittency // Physical Review A. — 1982. — Vol. 25. — № 1. — P. 519–532.
14. Переварюха А. Ю. Циклические колебания и этапность развития в новых моделях динамики популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 3. — С. 116–125.
15. Экологические системы. Адаптивная оценка и управление / под ред. К. Холлинга. — М.: Мир, 1981. — 397 с.
16. Гераскин П. П., Металлов Г. Ф., Переварюха Ю. Н., Аксенов В. П., Дубовская А. В. Физиологические и популяционно-генетические исследования каспийских рыб // Рыбное хозяйство. — 2007. — № 3. — С. 66–68.
17. Сениченков Ю. Б. Численное моделирование гибридных систем. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. — 206 с.
18. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 320 с.
19. Paar V., Pavin N. Sensitive dependence of lifetimes of chaotic transient on numerical accuracy for a model with dry friction and frequency dependent driving amplitude // Modern Physics Letters B. — 1996. — Vol. 10. — № 4–5. — P. 153–159.
20. MacDonald S., Grebogi C., Ott E., Yorke J. Fractal basin boundaries // Physica D. — 1985. — Vol. 17. — № 2. — P. 125–153.

Поступила в редакцию 01.12.2009

**A. U. Perevarukha**

**Transition to robust chaotic mode as a result of single bifurcation in the new model of population dynamic**

Article considers arising of chaotic attractor for notunimodal one-dimensional map, which is a model of population dynamics. Chaotic mode, which is not transient behavior spring up without cascade of bifurcation. Change in behaviour of the map appears as a consequence of backward tangent bifurcation. In the biological view effect is interpreted by sudden inclusion of mortality rate for generation on appointed stage. The new model describes the wave-like dependency of the stock and recruitment existed for real fish population.

*Keywords:* nonlinear models of population dynamics, route to chaos

Mathematical Subject Classifications: 37G35

Переварюха Андрей Юрьевич, м.н.с., Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, 194223, Россия, г. Санкт-Петербург, наб. Фонтанки 139, E-mail: madelf@pisem.net