

УДК 517.933

© Г. А. Трутнев

ШЕСТНАДЦАТИТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА

Рассматривается задача моделирования твердотельного волнового гироскопа. Модель строится в виде механической системы, состоящей из шестнадцати масс. Выводится уравнение динамики данной системы. Полученная модель сравнивается с другими существующими моделями ТВГ.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, динамические системы.

Введение

Твердотельный волновой гироскоп (ТВГ) занимает одно из важнейших направлений в разработке высокоточных и высоконадежных гироскопических измерительных систем. ТВГ — инерциальный прибор, работа которого основана на действии сил Кориолиса в колеблющейся симметричной полусферической оболочке. При вращении основания вокруг оси симметрии оболочки стоячая волна, возбужденная в резонаторе, начинает поворачиваться как относительно резонатора, так и относительно инерциального пространства. Зная угол поворота волны относительно резонатора, можно рассчитать угол поворота основания.

Актуальными вопросами при создании ТВГ остается увеличение точностных характеристик гироскопов, что требует больших временных затрат и финансовых вложений. Важной задачей в данной области является моделирование чувствительного элемента и поиск оптимального управления колебаниями, возбужденными в резонаторе. В данной работе рассматриваются вопросы моделирования чувствительного элемента ТВГ с помощью механических систем, полученная модель сравнивается с другими существующими моделями.

§ 1. Описание модели

Резонатор ТВГ представляет собой полусферу на ножке, с помощью которой чувствительный элемент жестко крепится в основание прибора (рис. 1). В рабочем режиме в резонаторе возбуждаются колебания на его резонансной частоте, при этом образуется стоячая волна. Рабочей является вторая форма колебаний — наименьшая собственная форма изгибных колебаний кромки резонатора (рис. 2). На рисунке сплошной линией обозначено недеформированное состояние, пунктирными — крайние положения деформированного состояния кромки. Гироскопический эффект проявляется в том, что при повороте основания и резонатора колебательная картина поворачивается в ту же сторону, но на меньшую величину, то есть после поворота резонатора стоячая волна будет располагаться под углом к первоначальной оси возбуждения. Возбуждение нужной формы колебаний и управление волной осуществляется с помощью системы управления. В литературе [9] можно найти описание системы управления, состоящей из шестнадцати электродов. На кромке резонатора можно выделить 16 областей, куда прикладываются управляющие воздействия. Поэтому имеет смысл моделировать работу прибора с помощью 16-точечной системы.

Для удобства и единообразия записи договоримся, что индексы в выражениях принимают значения только от 1 до 16. Значения, не входящие в данный промежуток, нужно пересчитать по следующей формуле:

$$i = (i - 1) \bmod 16 + 1.$$

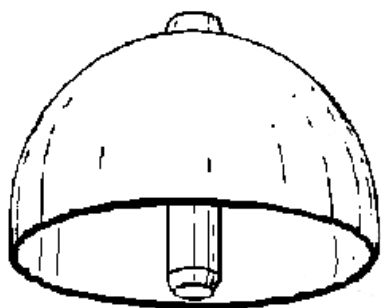


Рис. 1. Резонатор ТВГ

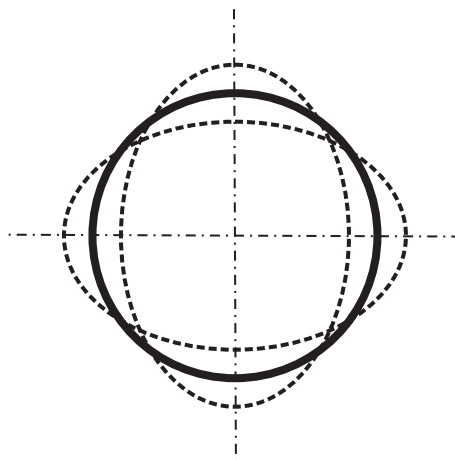


Рис. 2. Вторая форма колебаний кромки резонатора

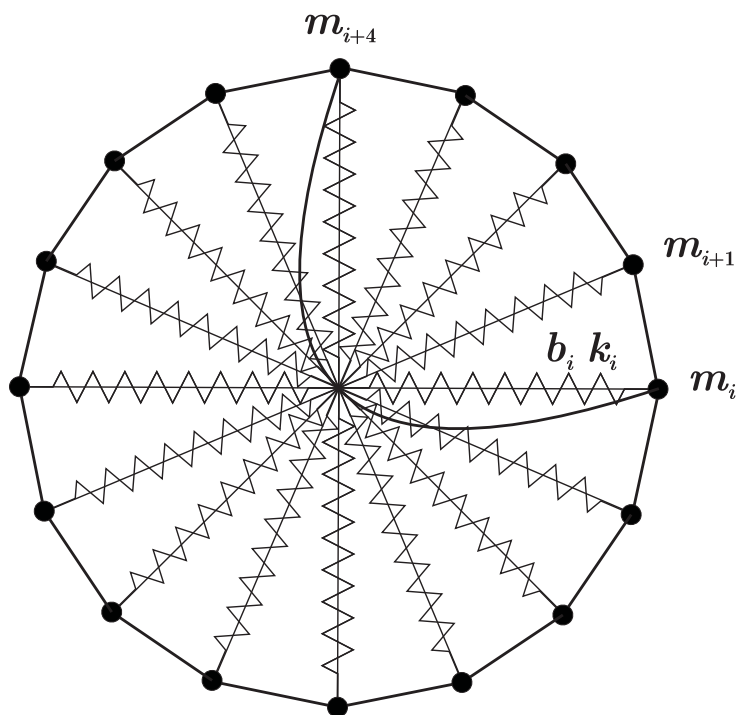


Рис. 3. Шестнадцатиточечная модель

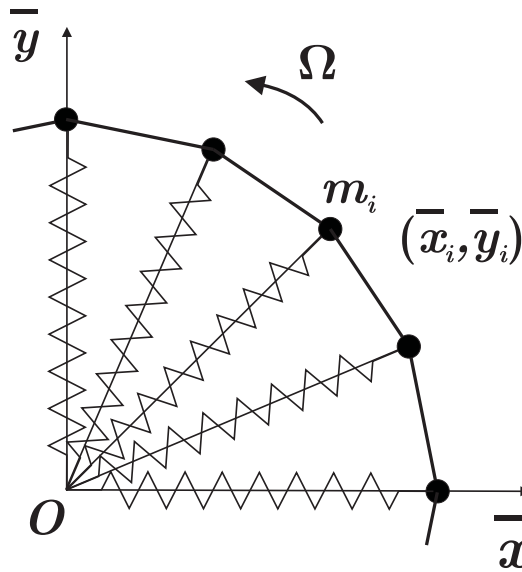


Рис. 4. Декартова система координат

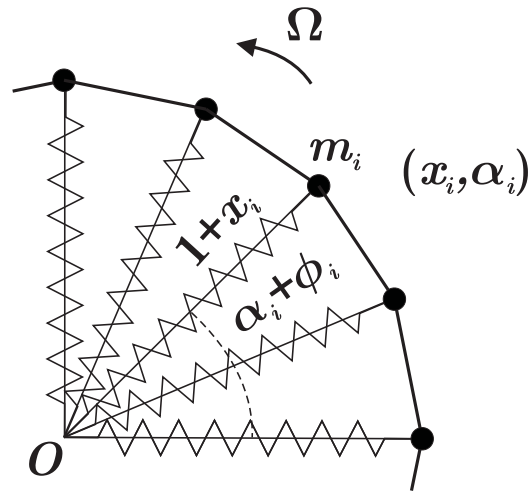


Рис. 5. Обобщенная система координат

Рассмотрим механическую систему (рис. 3), которая может свободно вращаться вокруг центральной точки с установленной угловой скоростью Ω . Система состоит из шестнадцати точечных масс m_i ($i = 1 \dots 16$), равноудаленных от центра. В состоянии равновесия расстояние от центра до массы считаем равным единице. Нумеровать массы будем против часовой стрелки, крайнюю правую массу считаем первой. Массы расположены на направляющих стержнях, шарнирно соединенных с центром системы. На стержни навиты пружины с жесткостью k_i ($i = 1 \dots 16$) и коэффициентами сопротивления b_i ($i = 1 \dots 16$), массы могут перемещаться только в плоскости. Соседние массы соединены жесткой нерастяжимой связью, это связано с тем, что колебания, растяжение и сжатие кромки резонатора существенно меньше деформации изгиба, и поэтому не будут учитываться в данной модели. Также в механической системе есть 16 дополнительных связей в виде гибких нерастяжимых соединений, проходящих через центр и соединяющих массы, отделенные углом 90° (на рисунке 3 показано только одно соединение, остальные добавляются аналогично). Это необходимо для того, чтобы при возбуждении второй формы колебаний перемещения масс по перпендикулярным осям были равны по величине и обратны по знаку, как и в реальном резонаторе.

У кромки резонатора есть положение равновесия, а амплитуда колебаний (1 мкм) мала по сравнению с радиусом резонатора (30 мм). Будем искать линейное приближение системы ДУ, «хорошо» описывающее динамику системы при малых отклонениях масс от положения равновесия. Выводить уравнение динамики механической системы будем с помощью метода Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{q_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

где q_j — обобщенная координата, T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, Q_j — «проекция» сил на обобщенные координаты q_j , n — число обобщенных координат. Для того, чтобы записать систему ДУ, нужно выразить кинетическую энергию через обобщенные координаты, найти производные кинетической энергии по обобщенным координатам, «проекции» сил на обобщенные координаты и подставить в уравнение Лагранжа. Когда получена система ДУ, можно произвести линеаризацию.

Сперва обратимся к вопросу выбора подходящей системы координат. Рассмотрим сначала систему в декартовой системе координат (рис. 4). Положение массы m_i описывается парой

(\bar{x}_i, \bar{y}_i) . В положении равновесия координаты массы m_i равны

$$\bar{x}_i^0 = \cos(\varphi_i + \theta), \quad \bar{y}_i^0 = \sin(\varphi_i + \theta), \quad \dot{\theta} = \Omega, \quad \varphi_i = \frac{i-1}{8}\pi.$$

Выражение для кинетической энергии в данной системе координат записывается обычным образом:

$$T = \sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{2} (\dot{\bar{x}}_i^2 + \dot{\bar{y}}_i^2). \quad (1.2)$$

Рассматривать данную механическую систему в декартовой системе координат неудобно. Выберем обобщенные координаты, характеризующие отклонения от положения равновесия (рис. 5). Положение массы m_i будет описываться парой (x_i, α_i) . Переменная x_i характеризует радиальные отклонения, переменная α_i характеризует угловые отклонения массы m_i от положения равновесия. Данная обобщенная система координат является подвижной (не инерциальной). Она вращается относительно декартовой системы с угловой скоростью Ω . Запишем связь обобщенных координат с декартовыми:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= (1 + x_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta), \\ \bar{y}_i &= (1 + x_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Положение равновесия в новой системе координат описывается следующими равенствами:

$$x_i^0 = 0, \quad \alpha_i^0 = 0, \quad i = 1 \dots 16.$$

Проверим невырожденность новой системы координат. Для этого якобиан J преобразования координат не должен быть равен нулю. Функции $\bar{x}_i(x_i, \alpha_i)$, $\bar{y}_i(x_i, \alpha_i)$ непрерывно дифференцируемы. Найдем частные производные и вычислим якобиан:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} &= \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t)), & \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \alpha_i} &= -(1 + x_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t)), \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_i} &= \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t)), & \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \alpha_i} &= (1 + x_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t)), \\ J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \alpha_i} \end{vmatrix} = 1 + x_i. \end{aligned}$$

Учитывая малость колебаний и, соответственно, малость значений x_i ($|x_i| \ll 1$), выполнено условие $x_i \neq -1$, гарантирующее невырожденность новой системы координат, то есть взаимно однозначное соответствие обобщенной и декартовой систем координат.

Пользуясь уравнениями связи двух координатных систем, перепишем выражение для кинетической энергии (1.2) для новых координат, подставив в него уравнения (1.3):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i^2 + \dot{\bar{y}}_i^2 &= (\dot{x}_i \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t)) - (1 + x_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t))(\dot{\alpha}_i + \Omega))^2 + \\ &+ (\dot{x}_i \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t)) + (1 + x_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta(t))(\dot{\alpha}_i + \Omega))^2 = \dot{x}_i^2 + (1 + x_i)^2(\dot{\alpha}_i + \Omega)^2, \\ T &= \sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + (1 + x_i)^2(\dot{\alpha}_i + \Omega)^2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Многие переменные являются зависимыми, так как в системе присутствуют дополнительные связи. Дополнительные связи сокращают число независимых переменных. Запишем в аналитическом виде эти связи:

$$x_i = -x_{i+4}, \quad (1.5)$$

$$(1 + x_i)^2 + (1 + x_{i-1})^2 - 2(1 + x_i)(1 + x_{i-1}) \cos\left(\frac{\pi}{8} + \alpha_i - \alpha_{i-1}\right) = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad (1.6)$$

для $i = 1 \dots 16$.

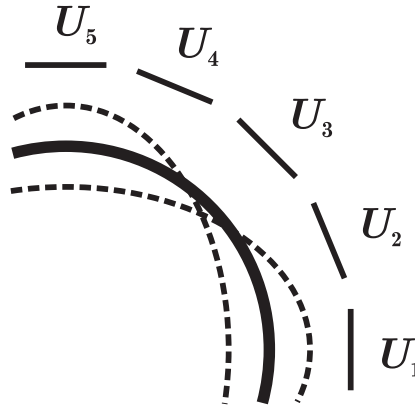


Рис. 6. Управляющие электроды

Первое уравнение описывает действие гибкой рейки, второе — действие жесткой связи между соседними массами. Запишем выражение (1.5) в следующем виде:

$$x_{i+4} = -x_i, \quad x_{i+8} = x_i, \quad x_{i+12} = -x_i, \quad i = 1 \dots 4. \quad (1.7)$$

Второе выражение связи (1.6) имеет сложный вид, перепишем его в следующем виде:

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \arccos \left(\frac{(1+x_i)^2 + (1+x_{i-1})^2 - 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2(1+x_i)(1+x_{i-1})} \right) - \frac{\pi}{8},$$

отсюда можно найти выражения для α_i , $i = 2 \dots 16$:

$$\alpha_i = \alpha_1 + \sum_{j=2}^i P_j = \alpha_1 + R_i, \quad \text{где} \quad (1.8)$$

$$P_j = \arccos \left(\frac{(1+x_j)^2 + (1+x_{j-1})^2 - 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2(1+x_j)(1+x_{j-1})} \right) - \frac{\pi}{8}, \quad R_1 = 0.$$

Выражения (1.7) и (1.8) сокращают число независимых переменных с 32 до 5. В качестве независимых переменных возьмем x_1 , x_2 , x_3 , x_4 и α_1 . Механическая система однозначно описывается пятью wybranными переменными, которые связаны системой из пяти ДУ.

Перейдем к вопросу влияния сил на динамику масс. Все рассматриваемые связи являются голономными, удерживающими и идеальными, поэтому учитывать их реакции не нужно. Необходимо рассмотреть влияние сил растяжения–сжатия пружины, сил рассеивания и управляющие воздействия. Запишем выражения для сил растяжения–сжатия в декартовых координатах:

$$f_{\bar{x}_i} = -k_i \Delta \bar{x}_i, \quad f_{\bar{y}_i} = -k_i \Delta \bar{y}_i,$$

где $\Delta \bar{x}_i$ и $\Delta \bar{y}_i$ — проекции абсолютного удлинения i -й пружины на оси \bar{x} и \bar{y} соответственно. Запишем выражения для диссипативных сил в декартовых координатах:

$$g_{\bar{x}_i} = -b_i \dot{\Delta} \bar{x}_i, \quad g_{\bar{y}_i} = -b_i \dot{\Delta} \bar{y}_i,$$

где $\dot{\Delta} \bar{x}_i$ и $\dot{\Delta} \bar{y}_i$ — проекции скорости изменения абсолютного удлинения i -й пружины на оси \bar{x} и \bar{y} соответственно.

Кроме рассмотренных выше сил, на систему действуют внешние силы, величину которых можно изменять (рис. 6). В реальном приборе поверхность резонатора и электроды покрыты электропроводящим слоем, поэтому их можно рассматривать как плоский конденсатор.

Со стороны электродов на резонатор действуют силы электрического притяжения, которые определяются следующим выражением:

$$F_i = -\frac{\varepsilon_0 S U_i^2}{2r_i^2},$$

где ε_0 — магнитная постоянная, S — площади электродов и магнитной постоянной, r_i — расстояние между электродом и резонатором, U_i — напряжение между электродом и резонатором. По аналогии будем считать, что на каждую массу механической системы действует обобщенная внешняя сила, равная

$$h_i = -\frac{\beta u_i}{(d_i + x_i)^2},$$

где β — некоторый положительный коэффициент (подбирается исходя из экспериментальных данных), d_i — коэффициент, аналогичный расстоянию между кромкой резонатора и ближайшим электродом в состоянии покоя, u_i — неотрицательные управляющие функции. Для упрощения модели будем считать, что $u_i = u_{i+4}$ и $d_i = d_{i+4}$ для $i = 1 \dots 16$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{x}_i} &= \Delta_i \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) = x_i \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta), \\ \Delta_{\bar{y}_i} &= \Delta_i \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) = x_i \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta), \\ \dot{\Delta}_{\bar{x}_i} &= \dot{\Delta}_i \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) = \dot{x}_i \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta), \\ \dot{\Delta}_{\bar{y}_i} &= \dot{\Delta}_i \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) = \dot{x}_i \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta),\end{aligned}$$

где Δ — удлинение i -й пружины, $\dot{\Delta}$ — скорость изменения удлинения i -й пружины. Далее нужно найти «проекции» сил Q_{q_j} на обобщенные координаты:

$$Q_{q_j} = \sum_{i=1}^{16} \left[F_{\bar{x}_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_j} + F_{\bar{y}_i} \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial q_j} - \frac{\beta u_i}{(d_i + q_i)^2} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \right],$$

где F — проекция силы на соответствующую ось декартовой системы координат, q_j — одна из обобщенных независимых координат. Рассмотрим отдельно случаи для Q_{x_j} и Q_{α_1} . Сначала найдем Q_{x_j} :

$$\begin{aligned}Q_{x_j} &= \sum_{i=1}^{16} \left[-(k_i \Delta_{\bar{x}_i} + b_i \dot{\Delta}_{\bar{x}_i}) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} - (k_i \Delta_{\bar{y}_i} + b_i \dot{\Delta}_{\bar{y}_i}) \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x_j} - \frac{\beta u_i}{(d_i + x_i)^2} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{16} \left[-(k_i \Delta_i + b_i \dot{\Delta}_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} (1 + x_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) \right] - \right. \\ &\quad \left. -(k_i \Delta_i + b_i \dot{\Delta}_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} (1 + x_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta u_i}{(d_i + x_i)^2} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=1}^{16} - \left[k_i \Delta_i + b_i \dot{\Delta}_i + \frac{\beta u_i}{(d_i + x_i)^2} \right] \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \\ &= - \sum_{i=0}^3 k_{j+4i} x_j - \sum_{i=0}^3 b_{j+4i} \dot{x}_j - \frac{2\beta u_j}{(d_j + x_j)^2} + \frac{2\beta u_j}{(d_j - x_j)^2}. \quad (1.9)\end{aligned}$$

Теперь рассчитаем Q_{α_1} :

$$\begin{aligned} Q_{\alpha_1} &= \sum_{i=1}^{16} \left[-(k_i \Delta \bar{x}_i + b_i \dot{\Delta} \bar{x}_i) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \alpha_1} - (k_i \Delta \bar{y}_i + b_i \dot{\Delta} \bar{y}_i) \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial \alpha_1} - \frac{\beta u_i}{(d_i + x_i)^2} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{16} (k_i \Delta_i + b_i \dot{\Delta}_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) (1 + x_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) - \\ &\quad - (k_i \Delta_i + b_i \dot{\Delta}_i) \sin(\alpha_i + \varphi_i + \theta) (1 + x_i) \cos(\alpha_i + \varphi_i + \theta) = 0. \end{aligned}$$

Получилось, что «проекция» обобщенных сил на координату α_1 равна нулю: $Q_{\alpha_1} = 0$. Также переменная α_1 в явном виде не входит в выражение для кинетической энергии, поэтому переменная α_1 является циклической. Этим можно воспользоваться и записать первое уравнение системы, которое будет иметь первый порядок, а не второй:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} &= C = \text{const}, \\ \sum_{i=1}^{16} m_i (1 + x_i)^2 (\dot{\alpha}_i + \Omega) &= C, \\ \dot{\alpha}_1 &= \frac{C - \sum_{i=2}^{16} m_i (1 + x_i)^2 \dot{R}_i - \Omega \sum_{i=1}^{16} m_i (1 + x_i)^2}{\sum_{i=1}^{16} m_i (1 + x_i)^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Величина C остается постоянной в любой момент времени. Константу C можно вычислить, подставив начальные условия для обобщенных координат и их скоростей. Если положить, что в начальный момент времени система находилась в покое, т.е. $x_i = 0$, $\dot{x}_i = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\dot{\alpha}_1 = 0$, то получим $C = \Omega \sum_{i=1}^{16} m_i = \Omega M$.

Далее остается записать остальные 4 уравнения. Для этого в уравнение Лагранжа (1.1) нужно подставить выражения (1.4), (1.7), (1.8) и (1.9), где обобщенные переменные q_j равны x_j для $j = 1 \dots 4$. Сперва вычислим производные кинетической энергии по обобщенным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left[\sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + (1 + x_i)^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega)^2) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{2} \left[2 \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} + 2(1 + x_i)^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_k} \right], \\ \frac{\partial T}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + (1 + x_i)^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega)^2) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{16} \frac{m_i}{2} \left[2(1 + x_i) (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega)^2 \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + 2(1 + x_i)^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial x_k} \right], \end{aligned}$$

где $k = 1 \dots 4$.

Тогда левая часть уравнения Лагранжа будет равна следующему выражению:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial T}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{16} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} + 2(1+x_i) \dot{x}_i (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_k} + (1+x_i)^2 (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{R}_i + \dot{\Omega}) \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_k} + (1+x_i)^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_k} - (1+x_i) (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega)^2 \frac{\partial x_i}{\partial x_k} - (1+x_i)^2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial x_k} \right).$$

Упростим последнее выражение, учитывая следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial R_i}{\partial x_k}, \quad i = 1 \dots 16, \quad k = 1 \dots 4.$$

Тогда выражение для левой части уравнения Лагранжа запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial T}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{16} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + 2(1+x_i) \dot{x}_i (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + (1+x_i)^2 (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{R}_i + \dot{\Omega}) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} - (1+x_i) (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega)^2 \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right).$$

Введем дополнительное условие на угловую скорость Ω . Будем считать, что Ω мала и медленно меняется, т. е. $\Omega^2 \ll \Omega$ и $\dot{\Omega} \ll \Omega$. Исключим из последнего выражения слагаемые с Ω^2 и $\dot{\Omega}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial T}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{16} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + 2(1+x_i) \dot{x}_i (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + (1+x_i)^2 (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{R}_i) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} - (1+x_i) \left[(\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i)^2 + 2\Omega(\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i) \right] \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right). \quad (1.11)$$

В полученное выражение нужно подставить R_i и \dot{R}_i для $i = 1 \dots 16$, x_i для $i = 5 \dots 16$, а также, пользуясь выражением (1.10), можно сразу подставить $\dot{\alpha}_1$ и $\ddot{\alpha}_1$. В результате мы получим систему из четырех ДУ. Далее будем искать линейное приближение, которое с «хорошей» точностью описывает поведение системы около положения равновесия. Механическая система находится в положении равновесия при $x_i = 0$, $\dot{x}_i = 0$, $\ddot{x}_i = 0$ для $i = 1 \dots 4$. В общем виде систему ДУ можно записать в следующем виде:

$$G(\ddot{y}, \dot{y}, y) = Q(\dot{y}, y),$$

$$\text{где } y = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad G = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y}, \quad Q = (Q_{x_1}, Q_{x_2}, Q_{x_3}, Q_{x_4})^T.$$

Тогда линеаризованное уравнение в окрестности решения (положение равновесия) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{y}} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \ddot{z} + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \dot{z} + \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} z = \frac{\partial Q}{\partial \dot{y}} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \dot{z} + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} z,$$

где z характеризует малые радиальные отклонения масс от положения равновесия. Последо-

вательно найдем выражения для частных производных, входящих в последнее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_k}{\partial \ddot{x}_l} &= \sum_{i=1}^{16} m_i \left[\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{x}_l} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + (1+x_i)^2 \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}_1}{\partial \ddot{x}_l} + \frac{\partial \ddot{R}_i}{\partial \ddot{x}_l} \right) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial G_k}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} &= \sum_{i=1}^{16} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} + \frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} + \frac{\partial R_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \right], \\ \frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} &= -\frac{\sum_{i=2}^{16} m_i (1+x_i)^2 \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_l}}{\sum_{i=1}^{16} m_i (1+x_i)^2}, \quad \frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} = -\frac{\sum_{i=2}^{16} m_i \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}}}{M}, \\ \frac{\partial G_k}{\partial \dot{x}_l} &= \sum_{i=1}^{16} m_i \left[2(1+x_i) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_l} (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + 2(1+x_i) \dot{x}_i \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} + \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_l} \right) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \right. \\ &\quad \left. + (1+x_i)^2 \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} + \frac{\partial \ddot{R}_i}{\partial \dot{x}_l} \right) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} - 2(1+x_i) (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} + \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_l} \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right], \\ \frac{\partial G_k}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} &= \sum_{i=1}^{16} m_i \left[2\Omega \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} - \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial R_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} - \frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial R_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} + \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \frac{\partial R_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \right], \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_l} &= \sum_{i=1}^{16} m_i \left(2 \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \dot{x}_i (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + 2(1+x_i) \dot{x}_i \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial x_l} + \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial x_l} \right) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \right. \\ &\quad \left. + 2(1+x_i) \dot{x}_i (\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_l} + 2(1+x_i) \frac{\partial x_i}{\partial x_l} (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{R}_i) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + (1+x_i)^2 \left(\frac{\partial \ddot{\alpha}_1}{\partial x_l} + \frac{\partial \ddot{R}_i}{\partial x_l} \right) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} + \right. \\ &\quad \left. + (1+x_i)^2 \frac{\partial x_i}{\partial x_l} (\ddot{\alpha}_1 + \ddot{R}_i) \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \left[(\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i)^2 + 2\Omega(\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i) \right] \frac{\partial x_i}{\partial x_k} - \right. \\ &\quad \left. - (1+x_i) \left[2(\dot{\alpha}_1 + \dot{R}_i + \Omega) \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial x_l} + \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial x_l} \right) \right] \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} &= \sum_{i=1}^{16} m_i \left[\left(\frac{\partial \ddot{\alpha}_1}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} + \frac{\partial \ddot{R}_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \right) \frac{\partial R_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} - 2\Omega \left(\frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} + \frac{\partial \dot{R}_i}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \right) \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} \right], \\ \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} &= -(b_j + b_{j+4} + b_{j+8} + b_{j+12}), \quad l = j, \quad \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{x}_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} = 0, \quad l \neq j. \\ \frac{\partial Q_j}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} &= -(k_j + k_{j+4} + k_{j+8} + k_{j+12}) - \frac{8\beta u_j}{d_j^3}, \quad l = j, \quad \frac{\partial Q_j}{\partial x_l} \Big|_{\substack{y=0 \\ \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0}} = 0, \quad l \neq j. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления проведены в программе Maple 6. Запишем полученное линейное приближение системы дифференциальных уравнений исходной механической системы:

$$A\ddot{z} + 2\Omega B\dot{z} + b \cdot \dot{z} + k \cdot z = \delta \cdot z \cdot u, \quad (1.12)$$

где под операцией $\langle \cdot \rangle$ понимается покомпонентное умножение векторов,

$$A = h^2 \left(-\frac{1}{\mu} \eta^T \eta + A_0 \right), \quad B = h(B_0 - B_0^T + \eta^T \xi - \xi^T \eta),$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \tilde{h}\sigma_1 + 2\tilde{\mu}_1 & 2\Sigma_{2,5} + 2\Sigma_{10,13} & 2\Sigma_{3,5} + 2\Sigma_{11,13} & 2\Sigma_{4,5} + 2\Sigma_{12,13} \\ 2\Sigma_{2,5} + 2\Sigma_{10,13} & \tilde{h}\sigma_2 + 2\tilde{\mu}_2 & 2\Sigma_{3,6} + 2\Sigma_{11,14} & 2\Sigma_{4,6} + 2\Sigma_{12,14} \\ 2\Sigma_{3,5} + 2\Sigma_{11,13} & 2\Sigma_{3,6} + 2\Sigma_{11,14} & \tilde{h}\sigma_3 + 2\tilde{\mu}_3 & 2\Sigma_{4,7} + 2\Sigma_{12,15} \\ 2\Sigma_{4,5} + 2\Sigma_{12,13} & 2\Sigma_{4,6} + 2\Sigma_{12,14} & 2\Sigma_{4,7} + 2\Sigma_{12,15} & \tilde{h}\sigma_4 + 2\tilde{\mu}_4 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = 2 \begin{pmatrix} 0 & -m_5 - m_{13} & -m_5 - m_{13} & -m_5 - m_{13} \\ m_2 + m_{10} & 0 & -m_6 - m_{14} & -m_6 - m_{14} \\ m_3 + m_{11} & m_3 + m_{11} & 0 & -m_7 - m_{15} \\ m_4 + m_{12} & m_4 + m_{12} & m_4 + m_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = (m_1 + m_5 + m_9 + m_{13}, \dots, m_4 + m_8 + m_{12} + m_{16}),$$

$$\xi = (m_1 - m_5 + m_9 - m_{13}, \dots, m_4 - m_8 + m_{12} - m_{16}),$$

$$b = (b_1 + b_5 + b_9 + b_{13}, \dots, b_4 + b_8 + b_{12} + b_{16}),$$

$$k = (k_1 + k_5 + k_9 + k_{13}, \dots, k_4 + k_8 + k_{12} + k_{16}),$$

$$\delta = -8\beta \left(\frac{1}{d_1^3}, \dots, \frac{1}{d_4^3} \right), \quad z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, \quad u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T,$$

$$\Sigma_{i,j} = 2 \sum_{p=i}^j m_p - m_i - m_j, \quad \eta = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \tilde{h} = \frac{1}{h^2} - 1, \quad h = \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

§ 2. Идеальная модель

Рассмотрим случай идеальной системы: все массы равны m , все жесткости равны k , демпфирующие коэффициенты равны нулю. Управляющие воздействия также нулевые. Уравнение (1.12) запишется в следующем виде:

$$A\ddot{x} + 4\Omega h B\dot{x} + w^2 x = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad w^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3h^2 + 1 & 2h^2 & 0 & -2h^2 \\ 2h^2 & 3h^2 + 1 & 2h^2 & 0 \\ 0 & 2h^2 & 3h^2 + 1 & 2h^2 \\ -2h^2 & 0 & 2h^2 & 3h^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение может быть разложено по собственным формам колебания. Основной формой колебания является вторая. Найдем изменение основной формы колебаний, для этого воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. Положим:

$$x = cp(t) + sq(t) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \cos(2\frac{\pi}{8}) \\ \cos(2\frac{\pi}{4}) \\ \cos(2\frac{3\pi}{8}) \end{pmatrix} \cdot p(t) + \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \sin(2\frac{\pi}{8}) \\ \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{3\pi}{8}) \end{pmatrix} \cdot q(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot p(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot q(t). \quad (2.2)$$

Вектора c и s ортогональны, характеризуют вторую форму колебаний системы. Подставляем выражение (2.2) в (2.1), получим:

$$A(c\ddot{p} + s\ddot{q}) + 4\Omega hB(c\dot{p} + s\dot{q}) + w^2(cp + sq) = 0.$$

Далее полученное выражение умножаем скалярно на c и на s . В результате получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} (A(c\ddot{p} + s\ddot{q}) + 4\Omega hB(c\dot{p} + s\dot{q}) + w^2(cp + sq), c) = 0, \\ (A(c\ddot{p} + s\ddot{q}) + 4\Omega hB(c\dot{p} + s\dot{q}) + w^2(cp + sq), s) = 0. \end{cases}$$

Найдем значения соответствующих скалярных произведений и упростим:

$$\begin{cases} (Ac, c)\ddot{p} + (As, c)\ddot{q} + 4\Omega h((Bc, c)\dot{p} + (Bs, c)\dot{q}) + w^2((c, c)p + (s, c)q) = 0, \\ (Ac, s)\ddot{p} + (As, s)\ddot{q} + 4\Omega h((Bc, s)\dot{p} + (Bs, s)\dot{q}) + w^2((c, s)p + (s, s)q) = 0. \end{cases}$$

$$(Ac, c) = (As, s) = 6h^2 + 2 + 4h^2\sqrt{2}, \quad (Bc, c) = (Bs, s) = 0,$$

$$(Ac, s) = (As, c) = 0, \quad (Bc, s) = (Bs, c) = 2\sqrt{2} + 2, \quad (c, c) = 2, \quad (s, s) = 2,$$

$$\begin{cases} ((6 + 4\sqrt{2})h^2 + 2)\ddot{p} + 4(2\sqrt{2} + 2)h\Omega\dot{q} + 2w^2p = 0, \\ ((6 + 4\sqrt{2})h^2 + 2)\ddot{q} - 4(2\sqrt{2} + 2)h\Omega\dot{p} + 2w^2q = 0. \end{cases}$$

Окончательно получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{p} + 4K_1\Omega\dot{q} + K_2p = 0, \\ \ddot{q} - 4K_1\Omega\dot{p} + K_2q = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где

$$K_1 = \frac{(\sqrt{2} + 1)h}{(3 + 2\sqrt{2})h^2 + 1} \approx 0.390, \quad K_2 = \frac{w^2}{(3 + 2\sqrt{2})h^2 + 1} \approx 0.813w^2$$

$$\omega = \frac{w}{\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})h^2 + 1}} \approx 0.901w.$$

Система ДУ (2.3) является стандартным гироскопическим уравнением. Тогда можно сказать, что K_1 — масштабный коэффициент, K_2 — квадрат частоты колебания. Масштабным коэффициентом (МК) называется отношение угла поворота волны относительно механической системы к углу поворота механической системы. В статье [3] МК аналогичной восьмиточечной модели равен 0.365, в работе [5] МК кольцевой модели равен 0.4. МК шестнадцатиточечной механической системы ближе к МК кольца, что является естественным. Данная механическая система ближе по свойствам к кольцу по сравнению с восьмиточечной моделью. Полученная модель проще кольцевой модели, хотя более громоздка. В ней отсутствуют частные производные. Полученные уравнения удобно использовать для численных экспериментов и поиска управления стоячей волной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басараб М. А., Кравченко В. Ф., Матвеев В. А. Математическое моделирование физических процессов в гироскопии. Монография. — М.: Радиотехника, 2005. — 176 с.
2. Бонштедт А. В., Кузьмин С. В., Мачехин П. К. Восьмиточечная модель твердотельного волнового гироскопа // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 135–214.
3. Бонштедт А. В., Зайцев В. А., Мачехин П. К., Тонков Е. Л. Оптимизация управления твердотельным волновым гироскопом // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2005. — № 1. — С. 189–214.
4. Джанджгава Г. И. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе ТВГ // Гироскоп и навигация. — 2008. — № 1. — С. 22–31.
5. Жбанов Ю. К., Журавлев В. Ф. О балансировке ТВГ // Механика твердого тела. — 1998. — № 4. — С. 32–55.
6. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. — М.: Наука, 1985. — 125 с.
7. Егармин Н. Е. Погрешности ВТГ // Институт проблем механики АН СССР. Препринт № 391, 1989.
8. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В. И. Дронг и др; под общ. ред. К. С. Колесникова — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 736 с.
9. Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. — 168 с.
10. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
11. Скарборо Д. Б. Гироскоп: теория и применения. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. — 248 с.

Поступила в редакцию 20.12.10

G. A. Trutnev

Sixteen points' model of hemispherical wave gyroscope

One considers the model of hemispherical wave gyro in the form of mechanical's system. Model consists of sixteenth masses. One derives the equation of the movement this system.

Keywords: mathematical modeling, differential equations, dynamic systems.

Mathematical Subject Classifications: 70H03

Трутнев Георгий Александрович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет. 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп.4).

ОАО «ИЭМЗ «Купол», 426033, Россия, г. Ижевск, ул. Песочная, 3. E-mail: gooshaa@mail.ru