УДК 517.938.5, 517.911.5

© *Е. А. Панасенко*

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАМКНУТЫМИ ОБРАЗАМИ [1]

Рассматривается динамическая система сдвигов в пространстве $\mathfrak{R}$ непрерывных функций, принимающих значения в полном метрическом пространстве $\big(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$ непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между функциями в этом пространстве определяется с помощью аналога метрики Бебутова в пространстве вещественных функций, определенных и непрерывных на всей числовой оси. Показано, что для компактности замыкания траектории точки в $\mathfrak{R}$ достаточно, чтобы исходная функция была ограничена и равномерно непрерывна в метрике ρ_{cl}. Как следствие, доказано, что замыкание траектории рекуррентного движения или траектории почти периодического движения в $\mathfrak{R}$ компактно.

Ключевые слова: пространство многозначных функций с замкнутыми образами, динамическая система сдвигов, замыкание траектории.

Введение

Для изучения вопросов качественной теории дифференциальных включений удобно привлекать аппарат динамических систем: минимальные и инвариантные множества, омега- и альфа-предельные множества, периодические, почти периодические или рекуррентные свойства движений в фазовом пространстве. Эта практика успешно используется для изучения асимптотики решений дифференциальных систем. Особая роль здесь принадлежит топологическим динамическим системам сдвигов, динамическим системам А. А. Маркова (см., например, [1]), которые не только естественным образом возникают в теории автономных дифференциальных включений (для которых сдвиг любого решения по времени также является решением), но и позволяют рассматривать неавтономные включения с помощью автономных, используя соответствующую параметризацию.

В работе М. В. Бебутова [2], опубликованной в 1941 г., была изучена динамическая система сдвигов в пространстве вещественных функций, определенных и непрерывных на всей числовой оси, в частности, были получены условия компактности замыкания траектории точки в этом пространстве. В данной заметке приводятся аналогичные утверждения для динамической системы сдвигов в пространстве многозначных функций с замкнутыми (но не обязательно ограниченными или выпуклыми) образами в пространстве $\mathbb{R}^n$. Расстояние между замкнутыми множествами в $\mathbb{R}^n$ при этом определяется с помощью метрики, введенной в [3], а расстояние между многозначными функциями — с помощью аналога метрики Бебутова, полученной в [2].

Динамические системы сдвигов в пространстве многозначных функций с компактными (а также замкнутыми выпуклыми) образами изучались в работах [4–7].

§ 1. Пространство многозначных функций с образами в $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$

Пусть $\mathbb{R}^n$ — пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\varrho(x, M) \doteq \min\limits_{y\in M}|x-y|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ от точки x до замкнутого множества M; $S_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}$, $O_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| \leqslant r\}$, $O_r^o(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\}$ — сфера, замкнутый и открытый шары, соответственно, в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в x_0; $O_r \doteq O_r(0)$; $O_r^o \doteq O_r^o(0)$; $S_r \doteq S_r(0)$; $O_0(x_0) = S_0(x_0) = \{x_0\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11–01–00645) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространства *непустых компактных* и *непустых замкнутых* подмножеств $\mathbb{R}^n$, соответственно. Пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ будем рассматривать с метрикой Хаусдорфа dist, пространство $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ снабдим метрикой ρ_{cl} (см. [3]), определяемой для любых $F, G \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F,G) \doteq |\varrho(0,F) - \varrho(0,G)| + \sup_{r>0} \min\left\{\mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G),\ \frac{1}{r}\right\}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{S}_r F \doteq (F \cap O_r^o) \cup S_r$, $\mathfrak{S}_r G \doteq (G \cap O_r^o) \cup S_r \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим некоторые основные свойства метрики ρ_{cl} и пространства $\big(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$, которые нам потребуются в дальнейшем.

Теорема 1. 1) *Для любых множеств $F, G \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*

$$\rho_{\mathrm{cl}}(F,G) \leqslant |\varrho(0,F) - \varrho(0,G)| + 1 < \infty, \tag{2}$$

в частности,

$$|F|_{\mathrm{cl}} \doteq \rho_{\mathrm{cl}}\big(\{0\}, F\big) = \left\{ \begin{array}{ll} 2\varrho(0,F), & \varrho(0,F) \leqslant 1 \\ \varrho(0,F)+1, & \varrho(0,F) > 1 \end{array} \right\} \leqslant \varrho(0,F) + 1.$$

2) *Из сходимости последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ в метрике ρ_{cl} следует сходимость числовой последовательности $\{\varrho(0,F^i)\}_{i=1}^\infty$ и сходимость при любом $r > 0$ последовательности $\{(F^i \cap O_r^o) \cup S_r\}_{i=1}^\infty$ в метрике Хаусдорфа* dist.

3) *Если сходится последовательность $\{\varrho(0,F^i)\}_{i=1}^\infty$ и найдется такое $r_0 \geqslant 0$, что для любого $r > r_0$ последовательность $\{(F^i \cap O_r^o) \cup S_r\}_{i=1}^\infty$ сходится в метрике* dist, *то последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ сходится в метрике ρ_{cl}.*

4) *Пространство $\big(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$ является полным.*

5) *Любое замкнутое ограниченное подмножество $\big(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\big)$ является компактным.*

Доказательство. Доказательства утверждений 1) – 4) (а также ряд других свойств метрики ρ_{cl}) приведены в [3].

Покажем справедливость свойства 5). Пусть множество $\mathfrak{F}$ пространства $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ замкнуто и ограничено. Тогда для компактности $\mathfrak{F}$ достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным. Фиксируем произвольное положительное ε и построим конечную ε-сеть для множества $\mathfrak{F}$. Ограниченность множества $\mathfrak{F}$ означает существование такого $p > 0$, что $|F|_{\mathrm{cl}} \leqslant p$ для любого $F \in \mathfrak{F}$. Не уменьшая общности можно считать, что $p \geqslant 2/\varepsilon$. Рассмотрим множество $\mathfrak{F}_p \doteq \{\mathfrak{S}_p F : F \in \mathfrak{F}\}$, где $\mathfrak{S}_p F = (F \cap O_p^o) \cup S_p$. Это множество является ограниченным подмножеством пространства $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, оно вполне ограничено. Тогда для него существует конечная $\bar{\varepsilon} \doteq \varepsilon/2$-сеть $U_{\bar{\varepsilon}} \subset \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что для любого $F \in \mathfrak{F}$ найдется множество $F_{\bar{\varepsilon}} \in U_{\bar{\varepsilon}}$, такое, что $\mathrm{dist}\big(F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_p F\big) \leqslant \bar{\varepsilon}$. Оценим $\rho_{\mathrm{cl}}(F_{\bar{\varepsilon}}, F)$. Так как функция $r \mapsto \mathrm{dist}\big(\mathfrak{S}_r F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_r F\big)$ не убывает (см. [3]), то

$$\sup_{r>0} \min\left\{\mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_r F), \frac{1}{r}\right\} = \sup\left\{\sup_{0<r\leqslant p}\big\{\mathrm{dist}(\mathfrak{S}_r F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_r F)\big\}, \sup_{r>p}\big\{1/r\big\}\right\} \leqslant \varepsilon/2,$$

а из свойств расстояния по Хаусдорфу получаем

$$|\varrho(0,F_{\bar{\varepsilon}}) - \varrho(0,F)| = |\varrho(0,F_{\bar{\varepsilon}}) - \varrho(0,\mathfrak{S}_p F)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Таким образом, $\rho_{\mathrm{cl}}(F_{\bar{\varepsilon}}, F) \leqslant \varepsilon$, и $U_{\bar{\varepsilon}}$ будет ε-сетью для множества $\mathfrak{F}$. □

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{R}$, элементами которого являются функции $F\colon \mathbb{R} \to \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$, *непрерывные в метрике* ρ_{cl}, то есть для любой функции $F \in \mathfrak{R}$ в каждой точке $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнено следующее условие: *для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ из неравенства $|t_0 - t| < \delta$ следует неравенство $\rho_{\mathrm{cl}}\big(F(t_0), F(t)\big) < \varepsilon$.*

Замечание 1. Отметим, что для функций с образами в пространстве $\bigl(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n),\ \rho_{\mathrm{cl}}\bigr)$ можно ввести понятия *полунепрерывности сверху* и *полунепрерывности снизу.* Для этого надо рассмотреть функцию *полуотклонения* $\rho^+_{\mathrm{cl}} : \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)\times\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}_+$, определенную равенством

$$\rho^+_{\mathrm{cl}}(F,G) \doteq |\varrho(0,F)-\varrho(0,G)| + \sup_{r>0}\min\left\{d(\mathfrak{S}_rF,\mathfrak{S}_rG),\ \frac{1}{r}\right\}, \tag{3}$$

где $d(\cdot,\cdot)$ — полуотклонение по Хаусдорфу одного компактного множества от другого. Очевидно, что $\rho_{\mathrm{cl}}(F,G)=\max\bigl\{\rho^+_{\mathrm{cl}}(F,G),\rho^+_{\mathrm{cl}}(G,F)\bigr\}$. Тогда функцию $F:\mathbb{R}\to\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ назовем полунепрерывной сверху (снизу) в точке t_0, если выполнено следующее условие: *для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta>0$, *что для всех* t, *удовлетворяющих неравенству* $|t_0-t|<\delta$, *выполнено неравенство* $\rho^+_{\mathrm{cl}}\bigl(F(t),F(t_0)\bigr)<\varepsilon\quad\bigl(\rho^+_{\mathrm{cl}}\bigl(F(t_0),F(t)\bigr)<\varepsilon\bigr)$. Далее, функцию F назовем полунепрерывной сверху (снизу), если она полунепрерывна сверху (снизу) в каждой точке. Таким образом, функция F будет непрерывной, если она является одновременно полунепрерывной сверху и снизу.

На $\mathfrak{R}$ определим метрику, аналогичную метрике Бебутова в пространстве действительных функций, заданных и непрерывных на всей числовой прямой [2], а именно:

$$\rho_{\mathfrak{R}}(F^1,F^2) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\min\left\{\rho_{\mathrm{cl}}\bigl(F^1(t),F^2(t)\bigr),\frac{1}{|t|}\right\},\quad F^1,F^2\in\mathfrak{R}. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что пространство $(\mathfrak{R},\rho_{\mathfrak{R}})$ является *полным метрическим,* а сходимость последовательности в метрике $\rho_{\mathfrak{R}}$ равносильна сходимости равномерной на отрезках, то есть $\rho_{\mathfrak{R}}(F^i,F)\to 0$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon,\vartheta>0$ найдется номер $N=N(\varepsilon,\vartheta)$, такой, что $\max\limits_{|t|\leqslant\vartheta}\rho_{\mathrm{cl}}\bigl(F^i(t),F(t)\bigr)<\varepsilon$ для всех $i\geqslant N$.

§ 2. Динамическая система сдвигов в пространстве многозначных функций

Напомним, что пара (Σ,h^t) есть *топологическая динамическая система*, если на метрическом пространстве Σ задана однопараметрическая группа преобразований $h^t:\Sigma\to\Sigma$ (то есть для любых $t,s\in\mathbb{R}$, $\sigma\in\Sigma$ имеет место $h^{t+s}\sigma=h^th^s\sigma$), удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0}=\sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t,σ) на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$. Пространство Σ называют *фазовым пространством* динамической системы, h^t — *потоком* на Σ, функцию $t\to h^t\sigma$ — *движением* точки σ, а

$$\mathrm{orb}(\sigma)\doteq\{h^t\sigma : t\in\mathbb{R}\}\quad\text{и}\quad \mathrm{orb}_+(\sigma)\doteq\{h^t\sigma : t\geqslant 0\}$$

— соответственно *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ.

Пусть теперь $F\in\mathfrak{R}$, и F_τ определяет сдвиг функции F на константу $\tau\in\mathbb{R}:F_\tau(t)\doteq F(t+\tau)$, $t\in\mathbb{R}$. Если определить поток на $\mathfrak{R}$ равенством $h^\tau F\doteq F_\tau$, то пара $(\mathfrak{R},h^\tau)$ будет задавать *топологическую динамическую систему сдвигов.*

Будем говорить, что функция $F\in\mathfrak{R}$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{A}$, если:

1) функция $t\to\varrho(0,F(t))$ *ограничена* на $\mathbb{R}$, то есть существует такое $c>0$, что для любого $t\in\mathbb{R}$ выполнено неравенство $\varrho(0,F(t))\leqslant c$;

2) F *равномерно непрерывна* на $\mathbb{R}$ в метрике ρ_{cl}, то есть для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех t_1,t_2 из неравенства $|t_1-t_2|<\delta$ следует неравенство $\rho_{\mathrm{cl}}(F(t_1),F(t_2))<\varepsilon$.

Следующая теорема является аналогом теоремы об устойчивости по Лагранжу траектории в пространстве функций непрерывных на всей числовой оси [2].

Теорема 2. *Если функция* $F\in\mathfrak{R}$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{A}$, *то замыкание* $\overline{\mathrm{orb}}(F)$ *траектории* $\mathrm{orb}(F)\doteq\bigl\{h^\tau F:\tau\in\mathbb{R}\bigr\}$ *компактно в метрике* (4).

Доказательство. Покажем сначала, что любое семейство функций $\{G\}$ из $\overline{\mathrm{orb}}(F)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на всей числовой оси. Согласно определению замыкания траектории, для всякой функции $G \in \overline{\mathrm{orb}}(F)$ найдется последовательность моментов времени $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, такая, что последовательность $\{h^{\tau_i}F\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к G в топологии равномерной сходимости на отрезках, то есть для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$, начиная с некоторого номера $I = I(\varepsilon, \vartheta)$, неравенство $\rho_{\mathrm{cl}}\big(F_{\tau_i}(t), G(t)\big) \leqslant \varepsilon$ имеет место для любого $t \in [-\vartheta, \vartheta]$. Следовательно, равномерная ограниченность функций G следует из ограниченности F (которую гарантирует пункт 1) условия **A**) и неравенства

$$|G(t)|_{\mathrm{cl}} = \rho_{\mathrm{cl}}\big(\{0\}, G(t)\big) \leqslant \rho_{\mathrm{cl}}\big(\{0\}, F_{\tau_i}(t)\big) + \rho_{\mathrm{cl}}\big(F_{\tau_i}(t), G(t)\big), \quad t \in \mathbb{R},$$

а равностепенная непрерывность — из равномерной непрерывности F и неравенства

$$\rho_{\mathrm{cl}}\big(G(t+\vartheta), G(t)\big) \leqslant \rho_{\mathrm{cl}}\big(G(t+\vartheta), F_{\tau_i}(t+\vartheta)\big) + \rho_{\mathrm{cl}}\big(F_{\tau_i}(t+\vartheta), F_{\tau_i}(t)\big) + \rho_{\mathrm{cl}}\big(F_{\tau_i}(t), G(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Далее, при каждом положительном ϑ множество $\{G_{\vartheta}\}$ сужений на отрезок $[-\vartheta, \vartheta]$ семейства функций $\{G\}$ удовлетворяет условиям обобщенной теоремы Арцела и, следовательно, является компактным. Следовательно, из этого семейства можно выделить последовательность, сходящуюся на отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$, из которой, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на отрезке $[-\vartheta-1, \vartheta+1]$ и так далее. Тем самым показано, что диагональная последовательность сходится равномерно на каждом конечном интервале. Таким образом, доказано, что множество $\overline{\mathrm{orb}}(F)$ компактно. □

Рассмотрим теперь траектории рекуррентных или почти периодических движений в пространстве $\mathfrak{R}$. Напомним, что движение $\tau \to h^{\tau}F$ точки $F \in \mathfrak{R}$ называется *рекуррентным*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\ell(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \rho_{\mathfrak{R}}(h^{\tau}F, F) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$, то есть $\ell(\varepsilon) \bigcap [t_0, t_0 + T] \neq \emptyset$ для некоторого $T > 0$ и всех $t_0 \in \mathbb{R}$. Далее, движение $\tau \to h^{\tau}F$ называется *почти периодическим*, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотным является множество

$$L(\varepsilon) \doteq \big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{s \in \mathbb{R}} \rho_{\mathfrak{R}}(h^{s+\tau}F, h^{s}F) \leqslant \varepsilon\big\}.$$

Очевидно, что если движение почти периодично, то оно рекуррентно, при этом обратное утверждение неверно.

Следствие 1 (см. [2]). *Пусть $F \in \mathfrak{R}$ и движение $\tau \to h^{\tau}F$, где $h^{\tau}F = F_{\tau}$, рекуррентно (почти периодично). Тогда замыкание $\overline{\mathrm{orb}}(F)$ траектории F компактно в метрике* (4).

Доказательство. Согласно теореме 2 достаточно показать, что F удовлетворяет условию **A**. Из рекуррентности движения $\tau \to h^{\tau}F$ и определения метрики Бебутова $\rho_{\mathfrak{R}}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотным будет множество

$$\theta(\varepsilon) \doteq \big\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} \rho_{\mathrm{cl}}(F(t+\tau), F(t)) \leqslant \varepsilon\big\}.$$

Это, в свою очередь, означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $T = T(\varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется $\xi \in [0, T]$, удовлетворяющее неравенству

$$\max_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} \rho_{\mathrm{cl}}\big(F(t+t_0), F(t+\xi)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда из (5) следует

$$|F(t_0)|_{\mathrm{cl}} \leqslant 1 + \max_{\xi \in [0,T]} |F(\xi)|_{\mathrm{cl}}.$$

Таким образом, учитывая свойства метрики ρ_{cl} (см. теорему 1), получаем ограниченность функции $t \to \varrho(0, F(t))$.

Покажем теперь равномерную непрерывность функции F на всей числовой оси. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $T = T(\varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется хотя бы одно ξ, $\xi \in [0, T]$, удовлетворяющее условию

$$\max_{|t| \leqslant 3/\varepsilon} \rho_{\text{cl}}\big(F(t + t_0), F(t + \xi)\big) \leqslant \varepsilon/3. \tag{6}$$

Так как F является равномерно непрерывной на $[-T, T]$, то найдется такое $\delta \leqslant \varepsilon/3$, что при $|\eta| \leqslant \delta$ выполнено

$$\max_{|t| \leqslant T} \rho_{\text{cl}}\big(F(t + \eta), F(t)\big) \leqslant \varepsilon/3. \tag{7}$$

Тогда для $|\eta| \leqslant \delta$ и произвольного $t_0 \in \mathbb{R}$ из оценок (6) и (7) получаем

$$\rho_{\text{cl}}\big(F(t_0 + \eta), F(t_0)\big) \leqslant \rho_{\text{cl}}\big(F(\eta + t_0), F(\eta + \xi)\big) + \rho_{\text{cl}}\big(F(\eta + \xi), F(\xi)\big) + \rho_{\text{cl}}\big(F(\xi), F(t_0)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, условие **A** имеет место. Доказательство для случая почти периодического движения $\tau \to h^\tau F$ аналогично. $\square$

В динамической системе сдвигов $\big(\mathfrak{R}, h^\tau\big)$ рекуррентные свойства движений связаны с рекуррентными свойствами самих функций из $\mathfrak{R}$. Функция $F : \mathbb{R} \to \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ называется *рекуррентной*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество (ε, ϑ)-почти периодов

$$l(\varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leqslant \vartheta} \rho_{\text{cl}}\big(F(t + \tau), F(t)\big) \leqslant \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. А если для всякого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество ε-почти периодов

$$L(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho_{\text{cl}}\big(F(t + \tau), F(t)\big) \leqslant \varepsilon\},$$

то функция $t \to F(t)$ называется *почти периодической.*

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого во многом повторяет доказательство следствия 1.

Теорема 3. *Функция $F \in \mathfrak{R}$ рекуррентна тогда и только тогда, когда движение $\tau \to h^\tau F$ рекуррентно, и почти периодична тогда и только тогда, когда движение $\tau \to h^\tau F$ почти периодично.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
2. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. Ин-та матем. при МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1–52.
3. Жуковский Е.С., Панасенко Е.А. Об одной метрике в пространстве непустых замкнутых подмножеств пространстве $\mathbb{R}^n$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 15–26.
4. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
5. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.

6. Панасенко Е.А. О существование рекуррентных и почти периодических решений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 42–57.
7. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.

Поступила в редакцию 27.12.2011

Панасенко Елена Александровна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: panlena_t@mail.ru

E. A. Panasenko
Dynamical system of translations in the space of multi-valued functions with closed images

Keywords: space of multivalued functions with closed images, dynamical system of translations, closure of trajectory.

Mathematical Subject Classifications: 37C99, 34A60

In the work there is considered the dynamical system of translations in the space $\mathfrak{R}$ of continuous multi-valued functions with images in complete metric space $\bigl(\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\mathrm{cl}}\bigr)$ of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$. The distance between such functions is measured by means of the metric analogous to the Bebutov metric constructed for the space of continuous real-valued functions defined on the whole real line. It is shown that for compactness of the trajectory's closure in $\mathfrak{R}$ it is sufficient to have initial function bounded and uniformly continuous in the ρ_{cl} metric. As consequence, it is also proved that the trajectory's closure of a recurrent or an almost periodic motion is compact in $\mathfrak{R}$.

REFERENCES

1. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1949, 550 p.
2. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52.
3. Zhukovskii E.S., Panasenko E.A. On one metric in the space of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'ut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 15–26.
4. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Tr. Mat. Inst. Steklov*, 2008, vol. 262, pp. 202–221.
5. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.
6. Panasenko E.A. On existence of recurrent and almost periodic solutions to differential inclusion, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'ut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 42–57.
7. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136.

Received 27.12.2011

Panasenko Elena Aleksandrovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: panlena_t@mail.ru