УДК 517.97

© *Г. В. Шевченко*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Предлагается численный метод решения задачи оптимального быстродействия для линейных систем с постоянным запаздыванием. Доказано, что этот итерационный метод сходится за конечное число итераций к ε-оптимальному решению. Под ε-оптимальным решением понимается пара $\{T, u\}$, где $u = u(t)$, $t \in [0, T]$ — допустимое управление, под действием которого управляемая система переходит в ε-окрестность начала координат за время $T \leqslant T_{\min}$, $T_{\min}$ — время оптимального по быстродействию перехода в начало координат. Достаточно общая задача быстродействия с запаздыванием исследована в работе [Васильев Ф.П., Иванов Р.П. О приближенном решении задачи быстродействия с запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1970. Т. 10, № 5. С. 1124–1140.], предложено ее приближенное решение и обсуждены вычислительные аспекты. Однако для решения вспомогательных задач оптимального управления, возникающих при применении предлагаемых способов решения задачи быстродействия, предлагается использовать методы градиентного и ньютоновского типов, которые имеют локальную сходимость. Предложенный нами метод имеет глобальную сходимость.

Ключевые слова: допустимое управление, оптимальное управление, оптимальное по быстродействию управление.

§ 1. Постановка задачи и геометрическая интерпретация

Пусть управляемый объект описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x + C(t)x(t-\tau) + Bu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор состояния объекта, $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — непрерывные матрицы размеров $n \times n$, $n \times s$ и $n \times n$ соответственно, $\tau > 0$ — действительное число, $u \in \mathbb{R}^s$ — измеримое управление, стесненное ограничением

$$u(t) \in U, \tag{2}$$

$x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-\tau, 0]$, $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция. Здесь U — выпуклый телесный компакт из $\mathbb{R}^s$, содержащий внутри начало координат.

Предполагается, что система (1) является управляемой в начало координат при заданной непрерывной функции $\varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$.

Задача. *Найти допустимое управление $u^0(t)$, $t \in [0, T]$ (2), переводящее систему (1) при заданной функции $\varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$ за минимально возможное время $T = T_{\min}$ в начало координат.*

Эта задача эквивалентна следующей задаче: найти минимальное время $T = T_{\min}$ такое, что граница множества $\mathfrak{R}(T)$ содержит начало координат. Здесь и далее через $\mathfrak{R}(T)$ обозначается область достижимости системы (1), то есть множество точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$, в которые можно попасть при заданной функции $\varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$ за время T допустимыми управлениями. Аналогично [2] можно доказать, что множество $\mathfrak{R}(T)$ строго выпукло, замкнуто и ограничено при любом конечном $T > 0$, если выпукло и компактно множество $B(t)U$ для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10–01–00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

любого $t \in [0,T]$. Кроме того, так как по предположению система (1) управляема в начало координат, $\mathfrak{R}(T)$ есть тело в $\mathbb{R}^n$ [3]. Принцип максимума для задачи оптимального быстродействия без запаздывания, то есть при $C(t) \equiv 0$, является ещё и достаточным условием оптимальности, а область достижимости строго выпукла. Легко установить, что последнее утверждение относительно достаточности и выпуклости имеет место и для задачи с постоянным запаздыванием. Поэтому в силу вышесказанного область достижимости $\mathfrak{R}(T)$ есть строго выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^n$.

Введем необходимые в дальнейшем понятия [4,5]. Пусть $z^1, \ldots, z^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ — такие различные точки, что линейная выпуклая оболочка $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$ этих точек является телом в $\mathbb{R}^n$. Множество σ будем называть *n-мерным симплексом* или просто *n-симплексом* с вершинами $z^1, \ldots, z^{n+1}$. Два n-симплекса σ^1 и σ^2 называются *смежными*, если их пересечение σ^* — $(n-1)$-симплекс, причем все вершины σ^* одновременно принадлежат как σ^1, так и σ^2, то есть он является их общей гранью максимальной размерности.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактное тело, $\sigma^0 = [z_0^1, \ldots, z_0^{n+1}]$ есть n-симплекс с вершинами, лежащими на границе Ω. По каждой его грани $\sigma_j^0 = [z_0^1, \ldots, z_0^{j-1}, z_0^{j+1}, \ldots, z_0^{n+1}]$ $(j = \overline{1, n+1})$ максимальной размерности строим смежный ему симплекс с вершинами $z_0^1, \ldots, z_0^{j-1}, \widetilde{z}^j, z_0^{j+1}, \ldots, z_0^{n+1}$, у которого «новая» вершина $\widetilde{z}^j$ является граничной точкой Ω, максимально удалена от гиперплоскости, проходящей через остальные вершины, и расположена по разные стороны с точкой z_0^j относительно этой гиперплоскости. Это означает, что для построенного симплекса выполнены следующие условия: существуют такое число $d \neq 0$ и такой вектор коэффициентов $\widetilde{c}^j \in \mathbb{R}^n$ указанной гиперплоскости, что

$$\langle \widetilde{c}^j, z_0^i \rangle = d, \ (i = \overline{1, n+1}, i \neq j), \quad \langle \widetilde{c}^j, z_0^j \rangle < d, \tag{3}$$

$$\langle \widetilde{c}^j, \widetilde{z}^j \rangle = \max_{x \in \Omega} \langle \widetilde{c}^j, x \rangle > d, \quad \widetilde{z}^j \in \partial\Omega, \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов.

Назовем построенные симплексы, смежные симплексу σ^0, *симплексами 1-го слоя*, а симплекс σ^0 будем считать симплексом 0-го слоя. Затем для каждого симплекса 1-го слоя по его $(n-1)$-мерным граням, которые не являются общими с $(n-1)$-мерными гранями симплекса σ^0, строим по той же схеме смежные симплексы. Построенные симплексы составят 2-й слой. Ясно, что во втором слое содержится ровно $n(n+1)$ симплекс. Аналогично для каждого симплекса k-го слоя $(k \geqslant 2)$ строятся смежные ему симплексы $(k+1)$-го слоя.

Обозначим через $\mathfrak{S}_k$ — объединение всех симплексов k-го слоя. Ясно, что в k-м слое будет $n^{k-1}(n+1)$ симплексов. По построению в силу компактности Ω видно, что $\mathrm{co}(\Omega) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k}$, где $\mathrm{co}(\Omega)$ — выпуклая оболочка Ω, $\overline{D}$ — замыкание D.

Таким образом, внутренность множества Ω оказывается покрытым n-симплексами с вершинами на границе Ω. (В дальнейшем, говоря о покрытии n-симплексами, мы подразумеваем построенное покрытие.) Имеет место, следовательно,

Теорема 1 (о покрытии [5]). *Внутренность любого компактного тела Ω в $\mathbb{R}^n$ можно покрыть n-симплексами с вершинами на границе Ω.*

Из теоремы вытекают два полезных следствия.

Следствие 1. *Пусть Ω — компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и $z^0 \in \mathrm{int}\,\Omega$. Тогда для любого покрытия ее внутренности $\mathfrak{S} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k$ существуют такие конечное $k_0 \geqslant 0$ и n-симплекс $\sigma \in \mathfrak{S}_{k_0}$, что $z^0 \in \sigma$.*

Следствие 2. *Пусть Ω — компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и $z^0 \notin \Omega$. Тогда для любого покрытия ее внутренности $\mathfrak{S} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k$ существует такое конечное $k_0 \geqslant 0$, что в k_0-м слое находится по* *крайней мере один n-симплекс σ, у которого опорная к его некоторой вершине гиперплоскость строго отделяет множество Ω от точки z^0.*

Области достижимости $\mathfrak{R}(T)$ для любого конечного $T > 0$, как было сказано выше, являются строго выпуклыми компактными телами в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, для них справедлива теорема 1 о покрытии и ее следствия. Если $0 \notin \mathfrak{R}(T)$, то 1) $T < T_{\min}$ и 2) в силу следствия 2 при построении покрытия области $\mathfrak{R}(T)$ смежными n-симплексами $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k$ через конечное число итераций $l \geqslant 1$ (под итерацией здесь понимается построение очередного симплекса) получим симплекс с вершиной, опорная гиперплоскость в которой является строго отделяющей $\mathfrak{R}(T)$ от начала координат. Однако построения всех симплексов всех слоев до некоторого $k_0 \leqslant l$ не требуется. Как будет показано ниже, достаточно ограничиться построением конечной последовательности попарно смежных n-симплексов $\{\sigma^k\}$, $\sigma^k \in \mathfrak{S}_k$ $(k = \overline{0, l-1})$, обладающих свойством

$$\rho(\sigma^k) \geqslant \rho(\sigma^{k+1}),$$

где $\rho(\sigma^k)$ — расстояние от начала координат до n-симплекса σ^k.

Основываясь на вышеизложенном, предложим алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия, дающий ε-оптимальное решение за конечное число итераций. Формальное описание алгоритма сделано в следующем разделе.

§ 2. Алгоритм решения задачи быстродействия

Введем следующие обозначения:

T_k — k-е приближение оптимального времени $T_{\min}$;

$c^{(k)}$ — k-е приближение оптимального значения граничного условия сопряженной системы [6] к системе (1);

$x(T_k, u^{\text{ext}})$ — решение системы (1) в момент времени $t = T_k$ при управлении $u^{\text{ext}} = u^{\text{ext}}(t)$ $(t \in [0, T_k])$ таком, что

$$u^{\text{ext}}(t) = \arg\max_{u \in U} \langle c^{(k)}, x(t) \rangle, \quad t \in [0, T_k]; \tag{5}$$

k — номер итерации.

Алгоритм

Шаг 1. $k := 0$; $T_k := 0$; $\widetilde{c}_{k+1} := -x^0/\|x^0\|$; $p := 0$.

Шаг 2. $k := k+1$; $c^{(k)} := \widetilde{c}_k$; $T_k := \begin{cases} T_{k-1}, & \text{если } \langle \widetilde{c}_k, x(T_{k-1}, u^{\text{ext}}) \rangle \geqslant 0, \\ T^* & \text{в противном случае,} \end{cases}$

где T^* — такое наименьшее число $\zeta > T_{k-1}$, что $\langle \widetilde{c}_k, x(\zeta, u^{\text{ext}}) \rangle = 0$.

Шаг 3. $p := p+1$; $u^p(t) := u^{\text{ext}}(t)(t \in [0, T_k])$; $c^p := \widetilde{c}_k$; $z^p := x(T_k, u^{\text{ext}})$.

Шаг 4. Если $\|z^p\| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \geqslant 0$ — требуемая точность попадания в начало координат, то задача решена и T_k — ε-оптимальное время, $u^p(t)$ $(t \in [0, T_k])$ — ε-оптимальное управление.

Шаг 5. Если $(p > 1) \wedge (T_{k-1} < T_k)$, то полагаем $z^i := x(T_k, u^i)$, где $u^i = u^i(t) = u^{\text{ext},i}(t)$, $t \in [0, T_k]$, $u^{\text{ext},i}$ — допустимое управление, доставляющее максимум (5) при $c^{(k)} = c^i$ $(i = \overline{1, p-1})$.

Шаг 6. Если $p \leqslant n$, то находим решение $\widetilde{c}_{k+1}$ следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle c, z^i \rangle = -1 \quad (i = \overline{1, p}) \tag{6}$$

и переходим к шагу 2. Если решение не существует, хотя и $p \leqslant n$, то находим решение $\widetilde{c}_{k+1}$ системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle c, 0.5 \cdot (z^i + x^0) \rangle = -1 \quad (i = \overline{1, p}). \tag{6a}$$

Затем, если $\langle \widetilde{c}_{k+1}, z^1 \rangle > 0$, то меняем знак $\widetilde{c}_{k+1}$, переходим к шагу 2. (Из несовместности системы (6) непосредственно следует совместность (6a).)

Шаг 7. Находим решение $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n+1}^0)$ системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \tag{7}$$

Шаг 8. Находим решение $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{n+1}^*)$ задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями

$$\min_{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\, \alpha_i \geqslant 0} \frac{1}{2} \Big\| \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i z^i \Big\|^2. \tag{7$'$}$$

(Заметим, что задачу (7$'$) можно решить с помощью конечного метода [7].) Берем любой индекс $i_0 \in \{i:\ \alpha_i^* = 0\} \bigcap \{i: \lambda_i^0 < 0\}$.

Замечание 1. Такой индекс существует в силу леммы 3 (см. разд. 3). Кроме того, такой выбор индекса на следующей итерации обеспечивает невырожденность матрицы системы (7) и то, что $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$ — n-симплекс. В противном случае, если выбирать в качестве i_0 любой индекс из множества $\{i:\ \alpha_i^* = 0\}$, может оказаться, что $\lambda_{i_0}^0 = 0$. А тогда ранг матрицы системы (7) будет меньше n и σ не n-симплекс.

Шаг 9. Полагаем $\widetilde{c}_{k+1} = -\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i^* z^i \Big/ \Big\| \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i^* z^i \Big\|$, $z^{i_0} := z^p$; $c^{i_0} := c^p$; $u^{i_0}(t) := u^p(t)$ $(t \in [0, T_k])$, $p := n$ и переходим к шагу 2.

Предложенный алгоритм можно описать еще следующим образом, разбив его на два этапа.

Первый этап (шаги 1–6). Построение n-симплекса $\sigma = [z^1, \ldots,\ z^{n+1}]$ с вершинами $z^i \in \partial\mathfrak{R}(T_{q_0})$, $i = \overline{1, n+1}$.

Второй этап (шаги 2–5, 7–9). Для каждого $T_q \leqslant T_{\min}$, $q = q_0, q_0+1, \ldots$, решается задача

$$\min_{x \in \mathfrak{R}(T_q)} \|x\|. \tag{$*$}$$

Поиск решения задачи $(*)$ прекращается, если опорная к $\mathfrak{R}(T_q)$ гиперплоскость в точке z^{n+1} строго отделяет $\mathfrak{R}(T_q)$ от начала координат: $\langle c^{n+1}, z^{n+1} \rangle < 0$. Здесь по построению (см. шаг 2) $z^{n+1} = \arg \max\limits_{x \in \mathfrak{R}(T_q)} \langle c^{n+1}, x \rangle$.

Момент времени $T_{q+1} > T_q$ удовлетворяет равенству (см. шаг 2) $\langle c^{n+1}, x(T_{q+1}, u^{n+1}) \rangle = 0$. Завершает q-ю итерацию шаг 5.

Итерационный процесс продолжается пока $\|z^{n+1}\| > \varepsilon$.

Для решения вспомогательной задачи $(*)$ используется следующая итерационная схема.

На симплексе $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$ находятся точка $x^* = \arg \min\limits_{x \in \sigma} \|x\|$ и одновременно коэффициенты ее разложения $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{n+1}^*)$ по вершинам симплекса σ (шаг 8). Из совокупности точек $\{z^1, \ldots, z^{n+1}\}$ выбрасывается одна из точек z^{i_0} таких, что

$$i_0 \in \{i = \overline{1, n+1} \mid \alpha_i^* = 0, \lambda_i^0 < 0\},$$

где $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n+1}^0)$ — решение системы линейных алгебраических уравнений (7) (шаг 7). Оставшиеся точки перенумеровываются, c^{n+1} полагается равным $-x^*/\|x^*\|$), вычисляется новая точка z^{n+1}. Итерация схемы повторяется.

Схема генерирует последовательность симплексов $\{\sigma_k\}$ таких, что $\rho(\sigma_k) > \rho(\sigma_{k+1})$.

Сделаем несколько пояснений к описанию алгоритма. Шаг 1 подготовительный. Шаги 2 и 3 — построение вершины симплекса, лежащей на границе области $\mathfrak{R}(T_k)$. На шаге 2 также проверяется будет ли гиперплоскость с коэффициентами $\widetilde{c}_k$ строго отделять $\mathfrak{R}(T_{k-1})$ от начала координат и если да, то осуществляется изменение текущего времени ($T_k := T^*$). Шаг 4 — проверка критерия остановки итерационного процесса. На шаге 5 в случае $T_{k-1} < T_k$ вершины $z^1, \ldots, z^{p-1}$ симплекса выбираются на границе $\mathfrak{R}(T_k)$ (это достигается интегрированием системы (1) от времени T_{k-1} до T_k при соответствующих экстремальных управлениях). Шаг 6 — получение коэффициентов гиперплоскости, по которым определяется очередная «новая» вершина (шаги 2 и 3) симплекса. Шаги 7–9 — это выбор $(n-1)$-мерной грани симплекса, по которой будут смежны «старый» симплекс с «новым» симплексом. «Новая» вершина будет получена на шагах 2, 3 по $\widetilde{c}_{k+1}$ (шаг 9) и тем самым построен «новый» n-симплекс.

Отметим, что на первых $(n+1)$-й итерации в общем случае будет построен n-симплекс нулевого слоя покрытия области достижимости $\mathfrak{R}(T_{n+1})$. После этого на очередной итерации будет получен либо смежный ему симплекс 1-го слоя покрытия внутренности области $\mathfrak{R}(T_{n+1})$ (случай $T_{n+1} = T_{n+2}$), либо симплекс нулевого слоя покрытия внутренности области $\mathfrak{R}(T_{n+2})$ (случай $T_{n+2} > T_{n+1}$). Аналогично на $(l+n+1)$-й итерации будет получен либо симплекс $(l-j-1)$-го слоя покрытия внутренности $\mathfrak{R}(T_{l+n+1}) = \mathfrak{R}(T_{j+n+1})$ (в случае $T_{j+n+1} = T_{i+n+1}$, $1 \leqslant j < l$, $i = \overline{1,l}$), либо симплекс нулевого слоя покрытия внутренности области $\mathfrak{R}(T_{l+n+1})$ (случай $T_{l+n+1} > T_{l+n}$), $(l \geqslant 2)$.

Теперь перейдем к доказательству сходимости алгоритма. Оно приведено в следующем разделе.

§ 3. Доказательство сходимости

Приведем несколько утверждений, которые положены в основу алгоритма. Пусть $\sigma = [z^1, \ldots, z^p]$ есть $(p-1)$-мерный симплекс, где $z^i \in \mathbb{R}^n$ $(i = \overline{1,p};\ p \leqslant n+1)$, $\rho(\sigma)$ — расстояние от симплекса σ до начала координат.

Лемма 1 (см. [4]). *Система линейных алгебраических уравнений*

$$\langle c, z^i \rangle = -1 \, (i = \overline{1,p}) \tag{8}$$

несовместна тогда и только тогда, когда совместна система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i z^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1. \tag{9}$$

Лемма 2 (см. [4]). *Пусть $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0)$ — решение системы (9), причем хотя бы одно $\lambda_{i_0}^0 < 0$ $(i_0 \in \{1, \ldots, p\})$. Тогда точки z^{i_0} и 0 лежат в разных полупространствах относительно любой гиперплоскости вида $\langle c, x \rangle = -1$, проходящей через точки z^i $(i \neq i_0; i = \overline{1,p})$.*

Лемма 3 (см. [4]). *Пусть $\rho(\sigma) = \|x^*\|$, $x^* \in \sigma = [z^1, \ldots, z^p]$, $x^* = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^* z^i$, $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i^* = 1$, $\alpha_i^* \geqslant 0$ и пусть $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0)$ решение системы (9), причем $\lambda_{i_1}^0, \ldots, \lambda_{i_l}^0 < 0$. Тогда среди коэффициентов разложения $\alpha_{i_1}^*, \ldots, \alpha_{i_l}^*$ найдется по крайней мере один равный нулю.*

Теорема 2 (о сходимости). *Для любого $\varepsilon > 0$ алгоритм через конечное число итераций дает ε-оптимальное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П., Иванов Р.П. О приближенном решении задачи быстродействия с запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1970. Т. 10. № 5. С. 1124–1140.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
3. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.

4. Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 8. С. 1184–1196.
5. Шевченко Г.В. Численное решение нелинейной задачи оптимального быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 4. С. 580–593.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1983. 393 с.
7. von Hohenbalken B. A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes // Math. Program. 1975. Vol. 9. P. 189–206.

Поступила в редакцию 20.02.2012

Шевченко Геннадий Васильевич, к. ф.-м. н., с.н.с., лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4. E-mail: shevch@math.nsc.ru

G. V. Shevchenko
Computational solution of time-optimal control problem for linear systems with delay

Keywords: admissible control, optimal control, time-optimal control.

Mathematical Subject Classifications: 49J15, 49M05

A computational method of solving time-optimal control problem for linear systems with delay is proposed. It is proved that the method converges in a finite number of iterations to an ε-optimal solution, which is understood as a pair $\{T, u\}$, where $u = u(t),\ t \in [0, T]$ is an admissible control that moves the system into an ε-neighborhood of the origin in time $T \leqslant T_{\min}$, and the optimal time is $T_{\min}$. An enough general time-optimal control problem with delay is studied in [Vasil'ev F. P, Ivanov R. P. On an approximated solving of time-optimal control problem with delay, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1970, vol. 10, no. 5, pp. 1124–1140 (in Russian)], an approximate solution is proposed for it, and computational aspects are discussed. However, to solve some auxiliary optimal control problems arising there, it is suggested to use methods of gradient and Newton type, which possess only a local convergence. The method proposed in the present paper has a global convergence.

REFERENCES

1. Vasil'ev F.P., Ivanov R.P. On approximated solution of a time-optimal control problem with delay, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1970, vol. 10, no. 5, pp. 1124–1140.
2. Boltyanskii V.G. *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* (Mathematical methods of optimal control), Moscow: Nauka, 1969, 408 p.
3. Kwakernaak Kh., Sivan R. *Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya* (Linear optimal systems of control), Moscow: Mir, 1977, 650 p.
4. Shevchenko G.V. A numerical algorithm for solving a linear time-optimality problem, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2002, vol. 42, no. 8, pp. 1123–1134.
5. Shevchenko G.V. Numerical method for solving a nonlinear time-optimal control problem with additive control, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 11, pp. 1768–1778.
6. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical theory of optimal processes), Moscow: Phizmatgiz, 1983, 393 p.
7. von Hohenbalken B. A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes, *Math. Program*, 1975, vol. 9, pp. 189–206.

Received 20.02.2012

Shevchenko Gennadii Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of Differential and Difference Equations, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, pr. Acad. Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia. E-mail: shevch@math.nsc.ru