

УДК 519.688

© А. А. Болжисев

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА К ЗАДАЧЕ СЛУЧАЙНОЙ УПАКОВКИ ТВЁРДЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ СМЕСЕВОГО ТВЁРДОГО ТОПЛИВА

В работе представлена постановка задачи случайной упаковки твёрдых частиц в пространстве в виде минимизации целевой функции, являющейся мерой пересечений подобластей (представляющих частицы и запрещённые области) в \mathbb{R}^3 ; при этом желаемые особенности упаковки учитываются дополнительным слагаемым в целевой функции. Предложен новый алгоритм упаковки на основе метода случайного поиска, в котором оценка новой конфигурации частиц производится после каждого перемещения, а сами частицы увеличивают свой размер от начального до заданного по мере устранения пересечений между ними. Данный алгоритм сопоставлен с алгоритмом вязкой суспензии для случая упаковки равновеликих сфер в периодическом кубе; при плотности упаковки $\varphi < 0,55$ алгоритм случайного поиска формирует упаковки с меньшим количеством и размером кластеров частиц, в более плотных упаковках различия незначительны. Также показан пример формирования упаковки с особенностью в виде смещения частиц вплотную к твёрдой границе.

Ключевые слова: твёрдые сферы, твёрдые частицы, упаковка, случайный поиск, структура смесового твёрдого топлива.

Введение

Современные смесевые твёрдые топлива представляют собой высоконаполненные (до 95%) композиты и состоят из следующих компонентов: органический полимер, выполняющий роль связующего, твёрдый окислитель и горючий металлический порошок. Особенностью таких топлив является существенная зависимость их свойств от расположения частиц окислителя и металла в топливном заряде и их распределения по размерам [1].

Таким образом, первым шагом при исследовании горения смесового твёрдого топлива в «микромасштабе» является случайное размещение в расчётной области частиц окислителя и металла с заданным видом распределения размеров и объёмной долей.

Для решения данной задачи разработано несколько основных подходов.

Одним из наиболее распространённых является метод, предложенный Любачевским и Стиллингером [2]: задаётся случайное расположение частиц в расчётной области (частицы изначально имеют нулевой радиус), а также их скорость и направление движения; частицы движутся в расчётной области в соответствии с законами ньютоновской механики, постепенно увеличиваясь в размерах до номинальных значений (или до тех пор, пока дальнейшее движение не станет невозможным). Этот алгоритм используется для моделирования структуры топлива в работе [3].

Другой распространённый метод, редуцированной размерности, был предложен Дэвисом и Картером [4]. В нём сферические частицы помещаются в цилиндрический «стакан» со случайно выбранными координатами r и θ , а координата z принимает минимальное значение, при котором не возникает пересечения между частицами. Данный подход был использован в [5]. Авторы [6] и [7] усовершенствовали его, добавив к падению частицы возможность её перекачивания по другим частицам до достижения устойчивого положения.

Более простой метод, вязкой суспензии, разработан С. А. Рашковским [1]: задаётся случайное расположение частиц в расчётной области (допускается, чтобы частицы пересекали друг друга); на пересекающиеся частицы действуют центральные силы отталкивания, которые приводят частицы в движение; система частиц эволюционирует до тех пор, пока пересечения не

будут устранены. Аналогичный способ упаковки используется авторами [8]. Предлагаемый в настоящей статье алгоритм во многом основывается именно на этом методе.

Стоит также отметить подход, предложенный в [9]. В нём частицы одна за другой вводятся в расчётную область, при этом на каждой итерации частицы перемещаются на малое расстояние в произвольном направлении, если при этом не возникает пересечений. Отличительной особенностью данного алгоритма является дискретизация частиц на прямоугольной сетке, что позволяет моделировать упаковки частиц произвольной формы.

Недостатком всех перечисленных моделей является то, что в формируемую упаковку трудно внести какие-либо особенности (например, получить ровный ряд частиц на границе расчётной области, что имеет место в зарядах твёрдого топлива [10]). Также, все алгоритмы, кроме последнего, плохо обобщаются на случай частиц сложной формы.

Целью работы является разработка метода размещения частиц, лишённого данных недостатков.

§ 1. Постановка задачи

Пусть дано N частиц, каждая из которых представляет собой односвязную область $S_i \subset \mathbb{R}^3$ (предполагается декартова система координат). Обозначим $S_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ область, полученную из S_i параллельным переносом на вектор \mathbf{x} и поворотом на углы $\boldsymbol{\alpha}$ вокруг осей координат, проходящих через её центр масс (радиус-вектор центра масс будем обозначать $\mathbf{r}_c(S_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))$).

Таким образом, произвольная конфигурация частиц в пространстве будет задаваться множеством

$$\Sigma = \{ \langle S_i, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i \rangle, i = 1, \dots, N \}.$$

Будем считать, что конфигурация частиц Σ удовлетворяет решению задачи упаковки частиц в области Ω , если выполняются следующие условия:

(a) центры масс частиц лежат в области Ω :

$$\forall i : 1 \leq i \leq N \quad \mathbf{r}_c(S_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i)) \in \Omega; \quad (1.1)$$

(b) частицы не пересекаются:

$$\forall i, j : 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N, i \neq j \quad S_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) \cap S_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\alpha}_j) = \emptyset; \quad (1.2)$$

(c) частицы не лежат в запрещённых областях (используемых для задания граничных условий и иных ограничений на создаваемые упаковки; в общем случае запрещённая область Ω_P для каждой частицы своя, зависит от конфигурации частиц $\Omega_{P_i} = \Omega_{P_i}(S_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i), \Sigma)$ и может быть многосвязной):

$$\forall i : 1 \leq i \leq N \quad S_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) \cap \Omega_{P_i} = \emptyset. \quad (1.3)$$

Таких конфигураций может быть бесконечно много (или ни одной, однако установить это априори можно лишь в очень ограниченном числе случаев); чтобы выделить из них оптимальные, введём целевую функцию $Q(\Sigma)$ и наложим на решение дополнительное условие:

$$Q(\Sigma) = \min_{\Sigma} Q(\Sigma).$$

Таким образом, задачу упаковки составляет нахождение для заданных S_i таких \mathbf{x}_i и $\boldsymbol{\alpha}_i$, чтобы выполнялись перечисленные условия.

§ 2. Метод решения

Потребуем, чтобы функция $Q(\Sigma)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$Q(\Sigma) \leq 0; \quad (2.1)$$

$$Q(\Sigma) = 0, \quad \text{при невыполнении условий (1.1)–(1.3);} \quad (2.2)$$

и зададим функцию $W(\Sigma)$ как сумму мер пересечений частиц с запрещёнными областями и между собой:

$$W(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \left(\text{mes}(S_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) \cap \Omega_{P_i}) + \sum_{j=i+1}^N \text{mes}(S_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) \cap S_j(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\alpha}_j)) \right).$$

Тогда задача упаковки сведётся к минимизации функции $E(\Sigma) = W(\Sigma) + Q(\Sigma)$.

Если конфигурация Σ является минимумом функции E , то она, как следует из (2.1) и (2.2), будет решением поставленной задачи при условии, что $E(\Sigma) \leq 0$.

Для минимизации функции $E(\Sigma)$, в отсутствие предположений о виде этой функции и «наиболее предпочтительном» процессе минимизации, наиболее подходящим вариантом является использование одного из алгоритмов случайного поиска. В общем виде алгоритм случайного поиска можно сформулировать так [11].

Пусть требуется определить такой вектор \mathbf{v}^* , при котором целевая функция $E(\mathbf{v})$ принимает минимальное значение. Начиная с приближения \mathbf{v}_0 , по некоторому правилу случайным образом строится вектор $\mathbf{v}_i = g(\mathbf{v}_{i-1}, \dots, \mathbf{v}_0, E(\mathbf{v}_{i-1}), \dots, E(\mathbf{v}_0))$ так, чтобы вероятность его попадания в окрестность минимума $E(\mathbf{v})$ увеличилась. Расчёт заканчивается, когда $E(\mathbf{v})$ становится меньше некоторого заданного ε .

Наиболее часто используются марковские алгоритмы случайного поиска в которых $\mathbf{v}_i = g(\mathbf{v}_{i-1}, E(\mathbf{v}_{i-1}))$.

Прямой реализацией алгоритма случайного поиска для данной задачи будет следующая:

- (1) Получить начальную конфигурацию частиц Σ для которой выполняется условие (1.1) и вычислить $E(\Sigma)$.
- (2) Для каждой частицы выбрать случайные малые приращения $\Delta \mathbf{x}_i$ и $\Delta \boldsymbol{\alpha}_i$ (математическое ожидание этих величин должно равняться нулю), получив таким образом Σ' .
- (3) Вычислить $E(\Sigma')$; если $E(\Sigma') \leq E(\Sigma)$, то считать Σ' новым приближением, иначе в качестве приближения оставить Σ .
- (4) Если $E(\Sigma') \leq 0$ и $|\frac{E(\Sigma) - E(\Sigma')}{E(\Sigma)}| < \varepsilon$, то окончить расчёт, иначе перейти к п. 2.

Данную реализацию можно оптимизировать, выполняя шаг (3) после каждого перемещения частицы, так как в этом случае нужно перевычислить меры пересечений лишь для малого числа частиц, а эволюция системы будет происходить быстрее. Фактически такой подход является аналогом метода покоординатного спуска.

Ещё одним способом ускорения эволюции системы является постепенное увеличение размеров частиц. Введём коэффициент масштабирования k , $0 < k \leq 1$, который применим ко всем частицам. После нахождения решения для $k < 1$ масштабируем исходные частицы на $k + \Delta k$, оставляя неизменными найденные \mathbf{x}_i и $\boldsymbol{\alpha}_i$. Выполняется это из того соображения, что если найдено решение для частиц с масштабным коэффициентом k , то решение для частиц с масштабным коэффициентом $k + \Delta k$ может быть найдено малыми возмущениями \mathbf{x}_i и $\boldsymbol{\alpha}_i$ (при этом, если с ростом k уменьшать дисперсию случайного распределения, из которого выбираются $\Delta \mathbf{x}_i$ и $\Delta \boldsymbol{\alpha}_i$, получим вариант алгоритма имитации отжига). Одновременно с уменьшением размера частиц также уменьшается вероятность ситуации, когда $E(\Sigma') > E(\Sigma)$, то есть эволюция системы происходит быстрее.

Из последнего утверждения следует, что в случаях замедления эволюции системы может иметь смысл временное уменьшение размеров частиц для того, чтобы алгоритм нашёл более «перспективную» конфигурацию.

Из описания алгоритма и выражения для $E(\Sigma)$ видно, что он имеет вычислительную сложность $O(N^2)$, где N — количество частиц. Однако, как было отмечено выше, для определения значения $E(\Sigma')$ достаточно пересчитать только пересечения с частицами, ближайшими к перемещаемой. Таким образом, введение пространственного индекса, позволяющего эффективно отсекал дальние частицы, значительно ускорит расчёт.

Обычно применяется простой сеточный индекс [1–3]: расчётная область разбивается на равные ячейки, содержащие список находящихся в них частиц (частица относится к той ячейке, в которой находится её центр масс); при расчёте $E(\Sigma')$ учитываются только те частицы, которые находятся в той же ячейке, что и перемещаемая, и в соседних с ней.

Данный индекс хорошо работает при размерах ячейки больше либо равных размеру самой крупной частицы и незначительных различиях в диаметрах частиц. Когда имеет место значительная разница в размерах частиц (более, чем в полтора–два раза), этот вид индекса практически перестаёт выполнять свою роль [12]. Также этот индекс неприменим, когда форма частиц сильно отличается от сферической. Поэтому он был модифицирован следующим образом.

Расчётная область так же, как и в исходном индексе, разбивается на равные ячейки, содержащие список находящихся в них частиц. При этом частица заносится во все ячейки, через которые проходит описывающий её куб. При расчёте $E(\Sigma')$ учитываются частицы, отнесённые к ячейкам, через которые проходит куб, описывающий перемещаемую частицу.

Сравнительный анализ более совершенных пространственных индексов можно найти в [12].

§ 3. Результаты расчётов

Для оценки изложенного алгоритма был выбран простейший случай равновеликих сферических частиц. В качестве контрольного алгоритма был реализован простой и эффективный метод упаковки, предложенный С. А. Рашковским (метод вязкой суспензии [1]). Однако вблизи плотных упаковок есть вероятность, что этот алгоритм окажется не в состоянии определить направление перемещения частицы (когда силы, воздействующие на неё, окажутся уравновешенными) или войдёт в бесконечный цикл повторяющихся конфигураций. Эти проблемы были решены добавлением малых возмущений центров частиц, имеющих пересечения с другими (что несколько увеличило количество итераций до достижения решения).

Для оценки особенностей реализованных алгоритмов выполнялось построение упаковок из равновеликих сфер радиусом 5 мм в кубическом объёме со стороной в 100 мм и периодическими граничными условиями.

Оба реализованных алгоритма позволяют сформировать упаковку с плотностью $\varphi = 0,635$ для равновеликих сфер в объёме с периодическими граничными условиями, что близко к предельному значению для случайной плотной упаковки (обычно в качестве такового называется $\varphi = 0,64$, хотя удовлетворительного теоретического обоснования этому значению пока не дано [13]). Попыток повысить это значение не предпринималось, хотя сообщается, что можно достичь значения $\varphi = 0,68$ [14] (при том, что плотнейшая упаковка — в гранецентрированной кубической решётке — имеет плотность $\varphi = 0,74$).

Расчёты также выполнялись для упаковок плотностью приблизительно 0,3, 0,4, 0,5, 0,55 и 0,6. Всего производилось 10 запусков каждого алгоритма с различными начальными конфигурациями частиц, для каждого результата выполнялось определение количества и состава кластеров, координационных чисел частиц, расстояния до ближайшей частицы, распределения размеров кластеров, распределения координационных чисел, распределения расстояний до ближайшей частицы, вычисление парной корреляционной функции.

При исследовании координационных чисел и размеров кластеров контактирующими считались частицы, расстояние между которыми было меньше 0,1 диаметра, то есть 0,5 мм.

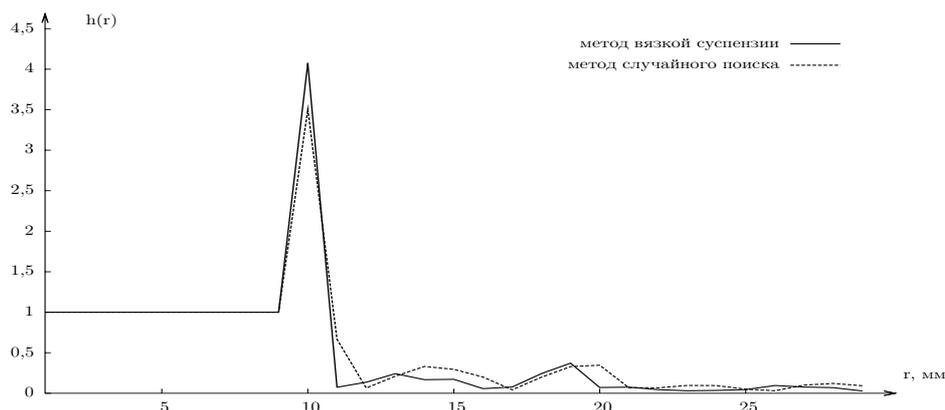


Рис. 1. Парные корреляционные функции

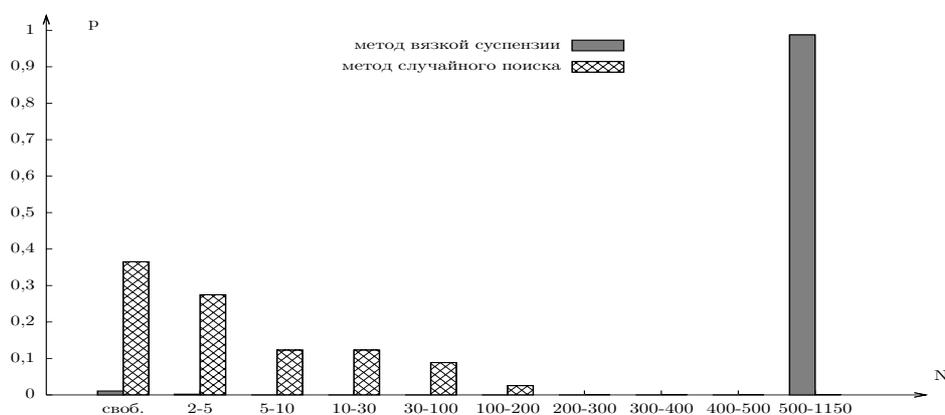


Рис. 2. Доли частиц в кластерах различного размера

Параметры методов были подобраны так, чтобы формировалась упаковка плотностью 0,6 с наиболее удалёнными друг от друга частицами. Для менее плотных упаковок перенастройка не производилась.

При $\varphi > 0,55$ параметры получаемых упаковок оказываются практически неразличимы. Ниже показаны результаты для $\varphi = 0,5$ как наиболее информативные.

Для оценки упорядоченности системы частиц используется парная корреляционная функция $g(r)$, отражающая отклонение распределения частиц от равномерного распределения на расстоянии r от опорной частицы. Но так как она представляет собой функцию, осциллирующую вокруг единицы, во избежание «выглаживания» при осреднении использовалась функция $h(r) = |g(r) - 1|$. Таким образом, равномерному распределению частиц соответствует нулевое значение этой функции.

Как видно из рисунка 1, оба алгоритма дают примерно одинаковые по равномерности упаковки.

Учёт наличия кластеров из частиц алюминия является важной стороной моделирования горения смесового твёрдого топлива так как такие кластеры не только имеют тенденцию к образованию агломератов, но и могут играть роль «тепловых мостиков» вглубь топливного заряда, вызывая там повышенное выделение газов связующим, что может привести к преждевременному выбросу в канал заряда дисперсных компонентов топлива [15].

Из данных рисунка 2 видно, что метод вязкой суспензии имеет тенденцию порождать крупные кластеры частиц, в то время как методу случайного поиска удаётся находить более свободные конфигурации, что также подтверждается данными о распределении расстояний до

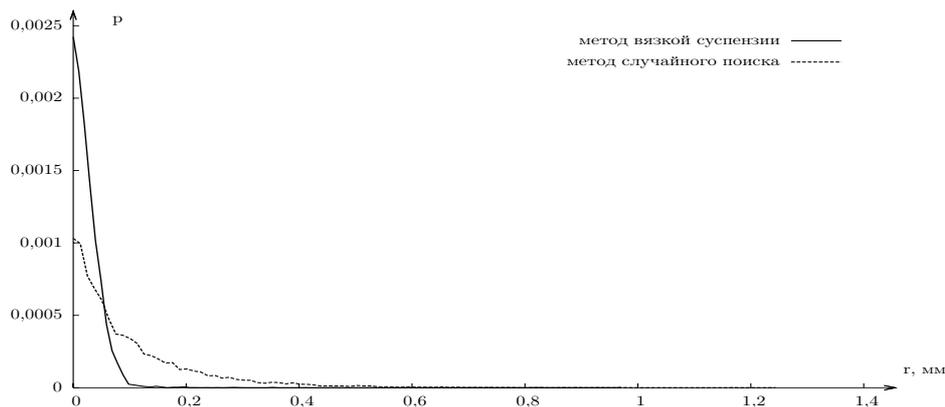


Рис. 3. Кривые плотности распределения расстояния до ближайшей частицы

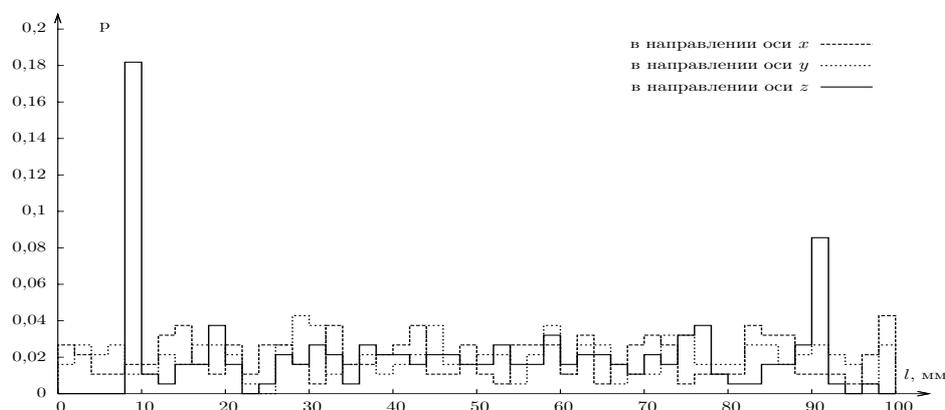


Рис. 4. Относительные частоты появления частиц в различных диапазонах расстояний от границы расчётной области

ближайшей частицы (рисунок 3).

Для проверки способности алгоритма случайного поиска находить конфигурации с заданными особенностями был выполнен расчёт с функцией $Q(\Sigma)$ вида

$$Q(\Sigma) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N -A \exp(-B|z_i - r_i|), & z \leq L; \\ 0, & z > L; \\ 0, & \text{при невыполнении условий (1.1)–(1.3),} \end{cases}$$

где z_i — координата z i -й частицы, r_i — её радиус, L — дальность действия, A и B — положительные константы.

Применение этой функции приводит к тому, что частицы, находящиеся вблизи границы $z = 0$ перемещаются вплотную к ней. Это можно видеть на рисунке 4, где в направлении оси z распределение частиц имеет пик вблизи $z = 0$, тогда как в направлении осей x и y частицы распределены равномерно.

§ 4. Заключение

В данной работе предложен новый алгоритм случайной упаковки твёрдых частиц в пространстве, позволяющий упаковывать частицы произвольной формы в областях со сложными граничными условиями, а также при наличии дополнительных ограничений на создаваемые упаковки.

Этот алгоритм в своём простейшем варианте сопоставлен с реализацией метода вязкой суспензии (для равновеликих сфер в объёме с периодическими граничными условиями). Обе реализации в состоянии сформировать упаковку с плотностью $\varphi = 0,635$. Для $\varphi > 0,55$ различия в характеристиках упаковок, полученных этими алгоритмами, оказываются незначительными. При меньших плотностях алгоритм случайного поиска формирует упаковки с более свободным расположением частиц.

Также показан пример наложения дополнительного ограничения на создаваемые упаковки в виде смещения частиц вплотную к твёрдой границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашковский С.А. Структура гетерогенных конденсированных смесей // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35. № 5. С. 65–74.
2. Lubachevsky B.D., Stillinger F.H. Geometric properties of random disk packings // Journal of Statistical Physics. 1990. Vol. 60. № 5/6. P. 561–583.
3. Knott G.M., Jackson T.L., Buckmaster J. Random packing of heterogeneous propellants // AIAA Journal. 2001. Vol. 39. № 4. P. 678–686.
4. Davis I.L., Carter R.G. Random particle packing by reduced dimensions algorithms // Journal of Applied Physics. 1990. Vol. 67. № 2. P. 1022–1029.
5. Tanner M.W. Multidimensional modeling of solid propellant burning rates and aluminium agglomeration and one-dimensional modeling of RDX/GAP and AP/HTPB: Ph.D. Diss. / Brigham Young University, 2008.
6. Webb M.D., Davis I.L. Random particle packing with large particle size variations using reduced-dimension algorithms // Powder Technology. 2006. Vol. 167. № 1. P. 10–19.
7. Shi Y., Zhang Y. Simulation of random packing of spherical particles with different size distributions // Applied Physics A: Materials Science & Processing. 2008. Vol. 92. № 3. P. 621–626.
8. O'Hern C.S., Langer S.A., Liu A.J., Nagel S.R. Random packings of frictionless particles // Physical Review Letters. 2002. Vol. 88. № 7. P. 1–4.
9. Jia X., Williams R.A. A packing algorithm for particles of arbitrary shapes // Powder Technology. 2001. № 120. P. 175–186.
10. Липанов А.М. Физико-химическая и математическая модели горения смесевых твёрдых топлив: препринт. Ижевск: ИПМ УрО РАН, 2007. 112 с.
11. Растрингин Л.А. Теория и применение случайного поиска. Рига: Зинатне, 1969. 307 с.
12. Raschdorf S., Kolonko M. A comparison of data structures for the simulation of polydisperse particle packings // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2011. Vol. 85. № 5. P. 625–639.
13. Kamien R.D., Liu A.J. Why is random close packing reproducible? // Physical Review Letters. 2007. Vol. 99. № 15. P. 1–4.
14. Torquato S., Truskett T.M., Debenedetti P.G. Is random close packing of spheres well defined? // Physical Review Letters. 2000. Vol. 84. № 10. P. 2064–2067.
15. Рашковский С.А. Статистическое моделирование процессов горения гетерогенных конденсированных смесей: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Институт проблем механики РАН. Москва, 2004. 428 с.

Поступила в редакцию 16.03.2012

Болкисев Андрей Александрович, аспирант, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: celsior.izh@gmail.com

A. A. Bolkisev

On the application of random searching for the hard particles packing problem for composite solid propellant structure modeling

Keywords: hard spheres, hard particles, packing, random searching, composite solid propellant structure.

Mathematical Subject Classifications: 49K45, 05B40

The paper presents a problem statement for random hard particles packing as minimization of an objective function that is the measure of overlapping of \mathbb{R}^3 subdomains representing particles and forbidden zones, with desired pack characteristics being accounted for by an additional summand in the objective function. A new algorithm based on the random search approach is proposed; it assesses a new particles configuration after each movement, and particles grow from an initial to full size as overlaps being removed. This algorithm is matched with the viscous suspension algorithm for the case of packing equal-sized spheres in a periodic cube. For packing fractions $\varphi < 0,55$ the random search algorithm yields packs with fewer and smaller particle clusters than the viscous suspension one, in denser packs differences are insignificant. An example of creating a pack with the feature that particles are shifted closely to the solid boundary is shown as well.

REFERENCES

1. Rashkovskii S.A. Structure of heterogeneous condensed mixtures, *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 65–74.
2. Lubachevsky B.D., Stillinger F.H. Geometric properties of random disk packings, *Journal of Statistical Physics*, 1990, vol. 60, no. 5/6, pp. 561–583.
3. Knott G.M., Jackson T.L., Buckmaster J. Random packing of heterogeneous propellants, *AIAA Journal*, 2001, vol. 39, no. 4, pp. 678–686.
4. Davis I.L., Carter R.G. Random particle packing by reduced dimensions algorithms, *Journal of Applied Physics*, 1990, vol. 67, no. 2, pp. 1022–1029.
5. Tanner M.W. Multidimensional modeling of solid propellant burning rates and aluminium agglomeration and one-dimensional Modeling of RDX/GAP and AP/HTPB, *Ph. D. Diss.*, Brigham Young University, 2008, 244 p.
6. Webb M.D., Davis I.L. Random particle packing with large particle size variations using reduced-dimension algorithms, *Powder Technology*, 2006, vol. 167, no. 1, pp. 10–19.
7. Shi Y., Zhang Y. Simulation of random packing of spherical particles with different size distributions, *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, 2008, vol. 92, no. 3, pp. 621–626.
8. O'Hern C.S., Langer S.A., Liu A.J., Nagel S.R. Random packings of frictionless particles, *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, no. 7, pp. 1–4.
9. Jia X., Williams R.A. A packing algorithm for particles of arbitrary shapes, *Powder Technology*, 2001, no. 120, pp. 175–186.
10. Lipanov A.M. *Fiziko-khimicheskaya i matematicheskaya modeli goreniya smesevykh tverdykh topliv: preprint* (Physico-chemical and mathematical models of burning of mix solid propellants: preprint), Izhevsk: Institute of Applied Mechanics, Ural Branch of RAS, 2007, 112 p.
11. Rastrigin L.A. *Teoriya i primenenie sluchainogo poiska* (Theory and applications of the random search), Riga: Zinatne, 1969, 307 p.
12. Raschdorf S., Kolonko M. A comparison of data structures for the simulation of polydisperse particle packings, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, vol. 85, no. 5, pp. 625–639.
13. Kamien R.D., Liu A.J. Why is random close packing reproducible? *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, no. 15, pp. 1–4.
14. Torquato S., Truskett T.M., Debenedetti P.G. Is random close packing of spheres well defined? *Physical Review Letters*, 2000, vol. 84, no. 10, pp. 2064–2067.
15. Rashkovskii S.A. Statistical modeling of burning processes of heterogeneous condensed mixtures, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Moscow, 2004, 428 p.

Received 16.03.2012

Bolkisev Andrei Aleksandrovich, post-graduate student, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: celsior.izh@gmail.com